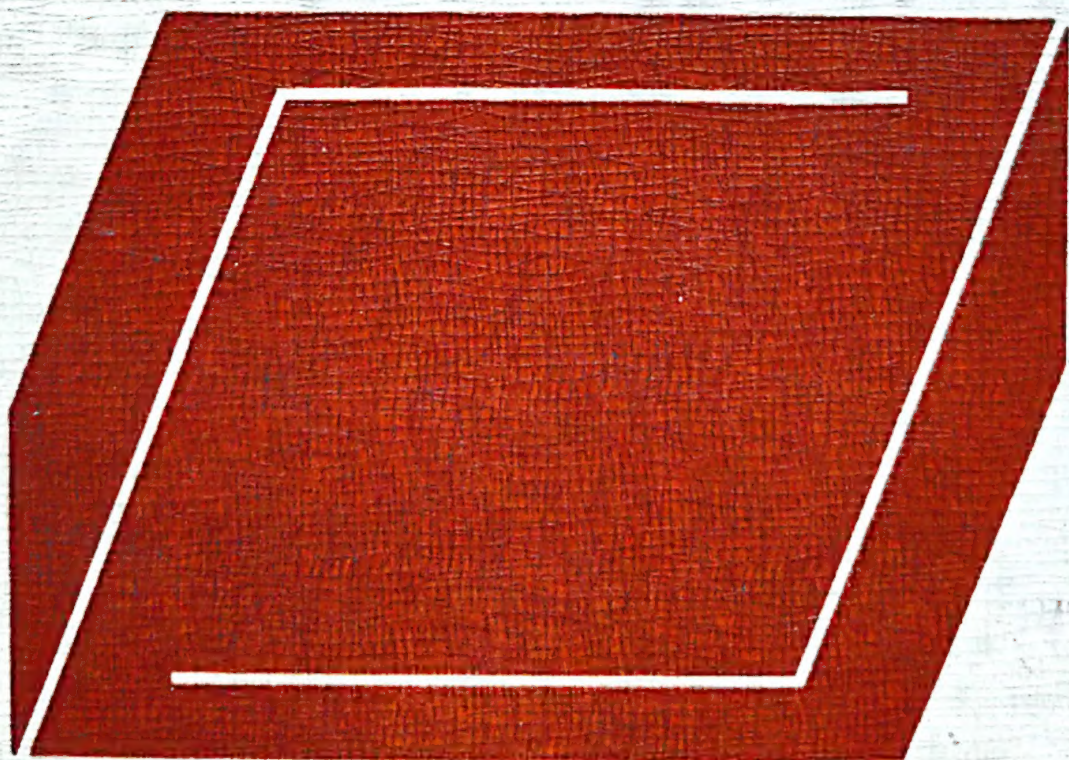


---

PROBLEME  
DE MATEMATICĂ  
TRADUSE  
DIN REVISTA SOVIETICĂ  
**KVANT**

---





---

# PROBLEME DE MATEMATICĂ TRADUSE DIN REVISTA SOVIETICĂ KVANT

---

Volumul I

(problemele 1–200)

Selectarea și traducerea: Lector univ. dr. Horea Banea



---

EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ — BUCUREȘTI, 1983



## PREFAȚĂ

În anul 1970 a apărut revista sovietică *Kvant* (Cuantă) „revistă popular-științifică de fizică și matematică” dar, și acest dar spune foarte mult, editată de Academia de Științe a U.R.S.S. și de Academia de Științe Pedagogice a U.R.S.S. Ea este adresată elevilor dornici de mai multă matematică și fizică decît le oferă programele școlare în vigoare.

Revista și-a atras repede simpatii și peste hotare și în multe numere ale *Gazetei Matematice* sau ale *Revistei Matematice* a elevilor din Timișoara s-au publicat probleme din *Kvant*.

Număr de număr, de la înființare, revista publică la rubrica sa „Culegere de probleme” doar cîte 5 probleme care însă „sînt destul de grele și pentru analizarea unora dintre ele ar trebui scris cîte un articol destul de mare. Multe dintre ele dau prilejul abordării unor clase întregi de probleme, prezentării unor metode generale. Aceste prezentări sînt făcute uneori în paginile revistei dar adesea cititorii înșiși trebuie să se gîndească singuri cum să generalizeze rezolvarea, cum să o simplifice, unde se aplică fenomenul despre care este vorba în problemă ș.a.”. Problemele prezentate sînt foarte variate și pe lîngă probleme cu conținut tradițional de algebră sau geometrie, apar probleme cu tablouri cu numere sau culori aranjate în diferite feluri, cu lăcuste sau purici care sar de pe o dreaptă pe alta, cu cavaleri prieteni sau dușmani între ei și multe altele. În spatele acestei matematici făcute cu zîmbetul pe buze și cu creioane colorate în mînă găsim și autori celebri și teoreme foarte „serioase” de teoria grafurilor, de combinatorică sau chiar de topologie.

Succesele echipei de elevi români la olimpiadele internaționale de matematică din ultimii ani s-au datorat, printre altele, și etapelor de pregătire în cantonamente prelungite. În aceste cantonamente, tot mai mulți elevi dotați pentru matematică au aflat (ceea ce unii știau deja) că dincolo de însușirea perfectă a unor algoritmi, pentru rezultate competitive la nivel internațional, mai trebuie ceva: o mare doză de perspicacitate, inventivitate și creativitate matematică. Ca orice altă calitate omenească și acestea se pot dezvolta prin antrenamente specifice. La acești elevi ne-am gîndit în primul moment cînd ne-am propus sarcina traducerii și prezentării problemelor din *Kvant*. Pe parcurs însă, ne-am dat seama că adresa acestor probleme este mult mai cuprinzătoare. Putem afirma că orice elev, chiar dintre aceia care nu au avut succese prea mari în învățarea matematicii, poate parcurge cu folos această culegere de largă cultură matematică, neapărat ca să afle răspunsul la tema pentru a doua zi, ci pentru ca să afle că există o matematică plăcută și utilă în imediata sa vecinătate. Să menționăm totuși orientativ că majoritatea problemelor sînt accesibile elevilor din treapta întâi de liceu, unele sînt accesibile elevilor din ultimele clase de gimnaziu și toate sînt accesibile oricărui om, indiferent de profesiunea sa, dacă are cunoștințe de matematică de nivel mediu.



Ni se pare însă că cei care pot utiliza culegerea cu cel mai mare folos sînt profesorii de matematică. Ei vor găsi în ea resurse nebănuite de a ilustra unele noțiuni și formule tradiționale în forme noi, vor găsi idei pentru teme la cercurile de elevi, sugestii pentru elaborarea unor probleme noi. De asemenea, este imposibil să nu se sesizeze atîtea aspecte metodice remarcabile ca: enunțuri de probleme pe cazuri particulare cu cerința de a le generaliza, utilizarea modelelor, folosirea culorii (mult mai sugestivă în unele situații decît notațiile cu indici), comentariile făcute în jurul rezolvărilor, anunțarea ideii înainte de prezentarea algoritmului ș.a.

În lucrarea pe care o prezentăm sînt date textele problemelor publicate în primii 8 ani de apariție a revistei, împreună cu rezolvările lor așa cum au fost date de redacție după 5—6 numere de la apariția enunțului. Nu ne-am propus să intervenim în fondul expunerilor și nici chiar în forma și notațiile utilizate care diferă uneori de cele folosite în manualele noastre. Acest lucru nu este însă un impediment pentru un cititor atent. Întrucît însă, rezolvările problemelor nu au fost date totdeauna la rubrica „Rezolvări” ci unele dintre ele au constituit subiectele unor articole mai ample care încadrau problema între altele asemănătoare, iar la altele au apărut reveniri succesive în urma scrisorilor unor cititori, uneori a trebuit să facem selecționări în text, să renunțăm (cu regret) la limbajul unor istorioare care arătau că încercările la care era supus personajul pozitiv din basme erau de natură... matematică.

Nu am considerat necesar să rearanjăm problemele după alte criterii lăsîndu-le în ordinea în care au apărut.

Dorim să subliniem încă o dată că nu este vorba de o carte de matematică „distractivă” (deși această calitate nu-i lipsește), ci de una de matematică „instructivă” (ceea ce este de fapt un pleonasm).

Comisia de matematică a Ministerului Educației și Învățămîntului a considerat că, abstracție făcînd de unele nepotriviri de amănunt dintre programele școlare românești și sovietice, cartea este foarte utilă elevilor și a încurajat proiectul traducerii.

Dr. HOREA BANEA



**M 1.** În țara Anciuria, condusă de președintele Miraflores, s-a apropiat timpul noilor alegeri prezidențiale. În țară sînt 20 de milioane de alegători dintre care numai un procent (armata regulată a Anciuriei) îl susține pe Miraflores. Miraflores, natural, dorește să fie ales, dar pe de altă parte el vrea ca alegerile să pară democratice. Iată ce numește Miraflores „votare democratică”: toți alegătorii sînt împărțiți în grupe egale, apoi fiecare dintre aceste grupe se împarte într-un număr oarecare de grupe egale, apoi acestea se împart din nou în grupe egale ș.a.m.d.; în cele mai mici grupe se alege reprezentantul grupei — electorul — apoi electorii aleg reprezentanții lor pentru votare în grupele mai mari ș.a.m.d.; în sfîrșit, reprezentanții celor mai mari grupe aleg președintele. Miraflores a împărțit alegătorii așa cum a vrut el și și-a instruit partizanii cum să voteze. Poate el organiza „alegerile democratice” astfel încît să fie ales președinte? (La egalitate de voturi cîștigă opoziția.)

A XXXII-a olimpiadă matematică din Moscova

**Răspuns.** Da, poate.

Înainte de toate să vedem cum se poate ca în alegerile acestea „cu mai multe trepte” să cîștige candidatul pentru care votează minoritatea. (În multe țări capitaliste se votează după acest sistem.) Cel mai simplu exemplu care ilustrează astfel de situație este reprezentat în figura 1: aici sînt nouă alegători — patru din gruparea A (în desen, cerculeț negru) și cinci din gruparea B (cerculeț albastru) — care sînt împărțiți în trei grupe de cîte trei alegători, astfel încît în două grupe cîștigă cei din A și deci ca rezultat al acestor alegeri „în două trepte” va fi ales candidatul susținut de cei din A, deși numărul susținătorilor săi este numai  $4/9$  din numărul total al alegătorilor. (Nu e greu să se stabilească faptul că, la alegerile în două trepte cu un număr mai mare de alegători, procentul voturilor necesare pentru alegere poate fi chiar și mai mic, dar să fie mai mare de 25%). Este clar că la o alegere în trei trepte acest procent poate fi făcut și mai mic. De exemplu, dacă înlocuim în figura 1 pe fiecare alegător printr-o grupă de 100 de cetățeni, astfel încît în grupa de tip B toți sînt din B iar într-una de tip A 51 sînt din A și 49 din B, obținem un exemplu

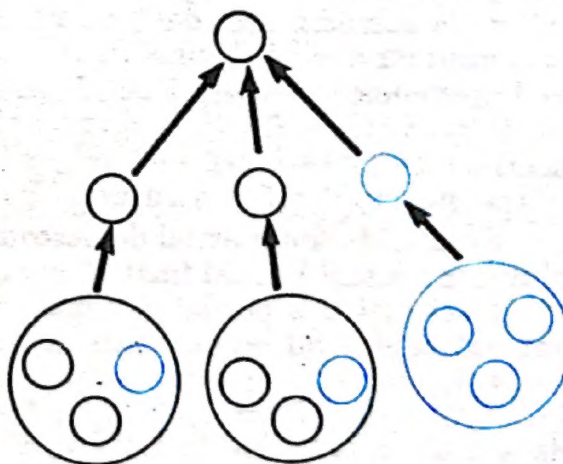


Fig. 1



de situație în care cei din A reprezintă numai  $\frac{4}{9} \cdot \frac{51}{100} = \frac{17}{75}$  din numărul total de alegători și totuși ei înving.

După aceste considerații introductive să trecem la rezolvarea problemei.

Împărțim toți alegătorii în 5 grupe de câte 4 milioane, astfel încît două dintre grupe să fie formate în întregime din adversari ai lui Miraflores (vom numi aceste grupe de tip B, iar celelalte trei de tip A). Fiecare dintre aceste grupe de „rangul întâi” le împărțim din nou în cinci grupe de rangul al doilea, astfel încît din cele cinci grupe care formează o grupă de tip A de rangul întâi trei să fie din A ș.a.m.d. așa cum se vede în tablou

Rangul grupeii $r$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Numărul total al grupelor de rang $r$	5	5 <sup>2</sup>	5 <sup>3</sup>	5 <sup>4</sup>	5 <sup>5</sup>	5 <sup>6</sup>	5 <sup>7</sup>	2 <sup>4</sup> ·5 <sup>7</sup>	2 <sup>8</sup> ·5 <sup>7</sup>
Cîte sînt din A	3	3 <sup>2</sup>	3 <sup>3</sup>	3 <sup>4</sup>	3 <sup>5</sup>	3 <sup>6</sup>	3 <sup>7</sup>	3 <sup>9</sup>	3 <sup>11</sup>
Cîți oameni sînt într-o grupă de rang $r$	4·10 <sup>6</sup>	8·10 <sup>5</sup>	16·10 <sup>4</sup>	32·10 <sup>3</sup>	64·10 <sup>2</sup>	1 280	256	16	1
În cîte grupe de rang $r + 1$ se împarte fiecare grupă de rang $r$	5	5	5	5	5	5	16	16	—
Cîte subgrupe de tip A de rang $r + 1$ are o grupă de tip A de rang $r$	3	3	3	3	3	3	9	9	—

Este clar că, în această împărțire, pentru victoria lui Miraflores e suficient ca pentru el să voteze

$$\frac{3^{11}}{2^8 \cdot 5^7} = \frac{177\,147}{20\,000\,000} < \frac{1}{100}$$

din totalul alegătorilor. Cum armata reprezintă 1% din totalul alegătorilor și ea îl susține pe Miraflores, el poate învinge.

Se poate încerca să se rezolve următoarea problemă mai generală: care este numărul minim de partizani ai lui Miraflores, astfel ca acesta să cîștige „alegerile democratice”, dacă numărul total de alegători este  $N$ ? Desigur că răspunsul nu depinde numai de mărimea numărului  $N$  ci și de modul în care se descompune în factori. Dacă  $N$  este prim, atunci alegătorii nu pot fi împărțiți în grupe egale (în afară de cazul banal:  $N$  grupe de câte un singur om) și pentru victorie este necesară majoritatea simplă. Să încercăm să răspundem la această problemă pentru un  $N$  oarecare.

Să considerăm o astfel de descompunere a lui  $N$  în grupe (de rangul întâi, al doilea ș.a.m.d.) astfel încît să cîștige Miraflores și numărul partizanilor săi să fie cel mai mic posibil. Evident că se poate considera că în grupele care votează contra lui nu este nici un partizan de al său și că toate grupele de tip A de același rang sînt împărțite la fel. Vom folosi notația [...] — „partea întreagă” ( $[x]$  este cel mai mare întreg care nu-l depășește pe  $x$ ). Evident că dacă o anumită grupă de tip A este formată din  $k$  grupe de rangul următor, atunci printre acestea trebuie să fie cel puțin  $\left[\frac{k}{2}\right] + 1$  de tip A. Să presupunem



că fiecare grupă de rang  $r$  ( $r = 1, 2, \dots, m - 1$ ) se descompune în  $k_r$  grupe de rangul următor, iar grupele de ultimul rang, al  $m$ -lea, sînt formate dintr-un singur om. Atunci pentru victoria grupei A, este necesar să fie cel puțin

$$R = \left( \left[ \frac{k_1}{2} \right] + 1 \right) \left( \left[ \frac{k_2}{2} \right] + 1 \right) \dots \left( \left[ \frac{k_m}{2} \right] + 1 \right)$$

voturi pentru A. Problema noastră s-a redus la următoarea: să se descompună numărul dat  $N$  într-un produs de factori  $k_1, k_2, \dots, k_m$ , astfel încît produsul  $R$  să fie minim.

Fie

$$N = k_1 k_2 \dots k_m$$

această descompunere. Așa cum va rezulta din lema următoare, se poate presupune că în această descompunere nu sînt factori  $k$  de forma  $k = p \cdot q$  unde  $p$  și  $q$  sînt mai mari decît 2 (dacă există astfel de factori, se poate continua descompunerea fără a mări pe  $R$ ).

**L e m ă. A v e m**

$$\left( \left[ \frac{p}{2} \right] + 1 \right) \left( \left[ \frac{q}{2} \right] + 1 \right) \leq \left[ \frac{p \cdot q}{2} \right] + 1$$

pentru orice numere întregi  $p$  și  $q$  mai mari decît 2.

**D e m o n s t r a Ț i e.** Dacă  $p$  și  $q$  sînt ambele pare, inegalitatea se poate scrie astfel:

$$\left( \frac{p}{2} + 1 \right) \left( \frac{q}{2} + 1 \right) \leq \frac{pq}{2} + 1,$$

$$(p + 2)(q + 2) \leq 2pq + 4,$$

$$pq - 2q - 2p + 4 \geq 4, \quad (p - 2)(q - 2) \geq 4,$$

ceea ce este evident, dacă  $p > 2$  și  $q > 2$ .

În cazul în care unul dintre numere, de exemplu  $p$  este par și celălalt  $q$  este impar, avem:

$$\left( \frac{p}{2} + 1 \right) \left( \frac{q}{2} + \frac{1}{2} \right) \leq \frac{pq}{2} + 1,$$

$$(p + 2)(q + 1) \leq 2pq + 4,$$

$$pq - 2q - p + 2 \geq 0, \quad (p - 2)(q - 1) \geq 0.$$

Cazul în care  $p$  și  $q$  sînt ambele impare se demonstrează analog. De aici rezultă că numerele impare  $N$  trebuie descompuse în factori primi „pînă la capăt”. Rămîne să analizăm situația factorilor 2.

Putem considera că în descompunere nu sînt factori de forma  $2q$ , unde  $q$  este impar, întrucît

$$2 \left( \left[ \frac{q}{2} \right] + 1 \right) = \left[ \frac{2q}{2} \right] + 1.$$

Din lema rezultă că dintre factorii pari este suficient să ne mărginim numai la 2, 4 și 8. Mai departe, este evident că  $2 \cdot 2$  este mai nefavorabil decît 4, întrucît  $\left( \left[ \frac{2}{2} \right] + 1 \right)^2 = 4 > \left[ \frac{4}{2} \right] + 1 = 3$ . Este convenabil ca  $2 \cdot 4$  să-l înlo-



cuim cu 8, intrucit  $2 \cdot 3 = 6 > 5$ ;  $4 \cdot 4$  este mai bun decit  $2 \cdot 8$  intrucit  $3 \cdot 3 = 9$  și  $2 \cdot 5 = 10$ ; în sfirșit  $4 \cdot 4 \cdot 4$  este mai puțin convenabil decit  $8 \cdot 8$ , intrucit  $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$  și  $5 \cdot 5 = 25$ , astfel încit mai mult de doi de 4 hu se pot păstra.

Astfel, răspunsul definitiv este: fie  $N = 2^d p_1 \dots p_m$ , unde  $m \geq 0$ ,  $d \geq 0$  sînt numere naturale,  $p_1, \dots, p_m$  sînt numere prime impare. Notăm prin  $P$  produsul

$$\frac{p_1 + 1}{2} \dots \frac{p_m + 1}{2}.$$

Atunci, numărul minim de partizani ai lui Miraflores, suficient pentru victorie este

$$R = 2P, \text{ dacă } d = 1 \text{ (adică dacă } N = 2p_1 \dots p_m)$$

$$R = 5^n P, \text{ dacă } d = 3n (N = 8^n p_1 \dots p_m)$$

$$R = 3 \cdot 5^n P, \text{ dacă } d = 3n + 2 (N = 4 \cdot 8^n p_1 \dots p_m)$$

$$R = 9 \cdot 5^n P, \text{ dacă } d = 3n + 4 (N = 4^{2n} p_1 \dots p_m), n \text{ număr natural.}$$

În particular, pentru  $N = 20\,000\,000 = 2^8 \cdot 5^7 = 4 \cdot 8^2 \cdot 5^7$ , obținem  $R = 3 \cdot 5^2 \cdot 3^7 = 164\,025$ .

M 2. Se dă o sferă de rază 1. Pe ea sînt așezate circumferințe congruente  $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n$  de rază  $r$  ( $n \geq 3$ ). Circumferința  $\gamma_0$  este tangentă la toate circumferințele  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ ; în plus sînt tangente și circumferințele  $\gamma_1$  și  $\gamma_2$ ;  $\gamma_2$  și  $\gamma_3$ ; ...,  $\gamma_n$  și  $\gamma_1$ . Pentru ce  $n$  este posibil acest lucru. Să se calculeze raza corespunzătoare  $r$ .

A XVIII-a olimpiadă matematică din Cehoslovacia

Răspuns:  $n = 3, 4, 5$ .

$$r = \sqrt{1 - \frac{1}{4 \sin^2 \frac{\pi}{n}}}.$$

Fiecărei circumferințe de pe sferă i se poate pune în corespondență „centrul său de pe sferă” adică extremitatea razei sferei care trece prin centrul cercului (care, evident, nu se găsește pe sferă). Acest punct va fi numit „centru” între ghilimele ca să subliniem că nu este vorba de centrul „obișnuit” (fig. 2, a). Să remarcăm că cercurile mari ale sferei nu au acest „centru”, pentru că centrul lor este în centrul sferei. Cercurile despre care este vorba în problemă nu pot fi cercuri mari ale sferei căci acestea nu pot fi tangente între ele (ele se intersectează în puncte diametrale opuse).

Punctul de tangentă dintre două circumferințe situate pe sferă (vezi fig. 2, b) este situat în planul  $P$  care trece prin centrele circumferințelor și prin centrul sferei. Într-adevăr ambele circumferințe sînt simetrice față de planul  $P$  și dacă ele ar avea un punct comun de o parte a acestui plan atunci ar trebui să aibă și un punct comun simetric cu primul, de partea cealaltă sau să nu aibă nici un punct comun. Dacă aceste circumferințe au aceeași rază  $r$ , atunci distanța dintre „centrele” lor este egală cu  $2r$ , pentru că în cercul mare obținut prin intersecția sferei cu planul  $P$  (fig. 2, c), diametrele circumferințelor noastre și segmentul care unește „centrele” lor subîntind arce congruente. Fie  $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$  „centrele” circumferințelor  $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ . Atunci  $A_0 A_1 = A_0 A_2 = \dots = A_0 A_n = A_1 A_2 = A_2 A_3 = \dots = A_n A_1 = 2r$ , cu alte



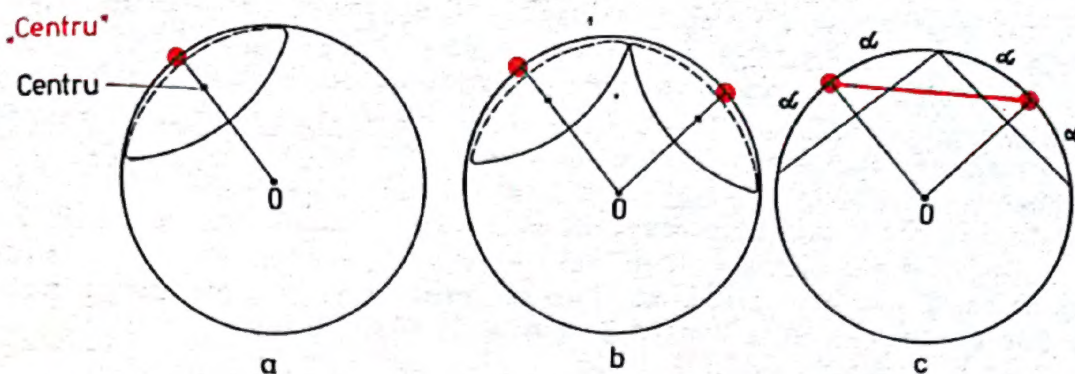


Fig. 2

cuvinte,  $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$  sînt vîrfurile unei piramide cu  $n$  vîrfuri înscrisă în sfera de rază 1 și astfel încît toate fețele sînt triunghiuri echilaterale cu laturile egale cu  $2r$ . Astfel este suficient să se construiască piramida care satisface aceste condiții pentru ca să rezolvăm problema.

Întrucît suma unghiurilor plane ale unui unghi  $n$ -edru cu vîrfurile în  $A_0$  este mai mică decît  $360^\circ$ :

$$n \cdot 60^\circ = \angle A_1 A_0 A_2 + \angle A_2 A_0 A_3 + \dots + \angle A_n A_0 A_1 < 360^\circ,$$

rezultă  $n < 6$ . Pentru  $n = 3, 4, 5$  se construiesc ușor piramidele respective.

Fie  $O$  centrul sferei. Înălțimea piramidei  $h$  și lungimea muchiei sale  $2r$  se află din următoarele considerații: raza  $KA_1$  a bazei piramidei este cateta în  $\triangle A_0 KA_1$  și o latură a triunghiului isoscel  $A_1 KA_2$  unde  $\angle A_1 KA_2 = 2\pi/n$  (vezi fig. 3, a, b)

$$\sqrt{4r^2 - h^2 \sin^2 \frac{\pi}{n}} = r.$$

Din  $\triangle A_0 OA_1$  avem  $r = h/2r$ , de aici  $h = 2r^2$ ,  $r = \sqrt{1 - \frac{1}{4 \sin^2 \frac{\pi}{n}}}$ .

Astfel, pentru  $n = 3$ ,  $r = \sqrt{\frac{2}{3}}$ , pentru  $n = 4$ ,  $r = \sqrt{\frac{1}{2}}$  și pentru  $n = 5$ ,

$r = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}}$  (s-au folosit valorile corespunzătoare pentru sinusurile unghiurilor).

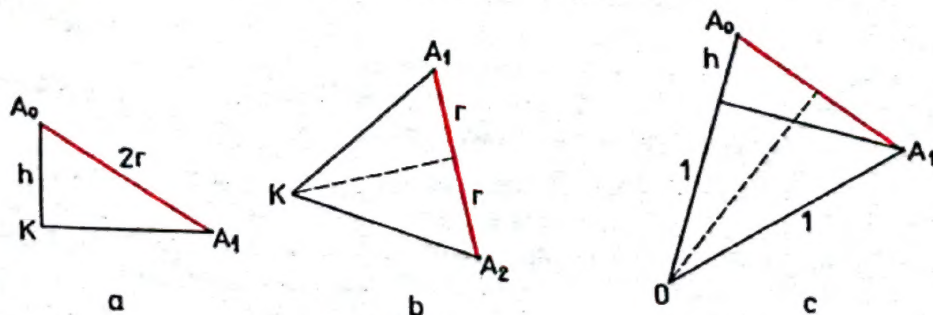


Fig. 3



Piramidele construite sînt strîns legate de poliedrele regulate care au toate fețele triunghiuri. Se știe că aceste poliedre sînt trei: tetraedrul, octaedrul și icosaedrul (fig. 4). Dacă la ultimile două tăiem cîte „un vîrf” (adică considerăm piramida determinată de toate muchiile care ajung în același vîrf) atunci obținem piramidele cerute de problemă.

Facem observația că condiția  $n \geq 3$  din textul problemei poate fi înlocuită cu  $n \geq 2$ . Cele trei cercuri  $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$  au „centrele” în vîrfurile unui triunghi echilateral înscris într-un cerc mare al sferei (fig. 5). Calculul lui  $r$ , oricît ar părea de ciudat, se poate face cu formula de mai sus (care a fost de fapt demonstrată numai pentru  $3 \leq n \leq 5$ ) și se obține

$$r = \sqrt{1 - \frac{1}{4 \sin^2 \frac{\pi}{2}}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

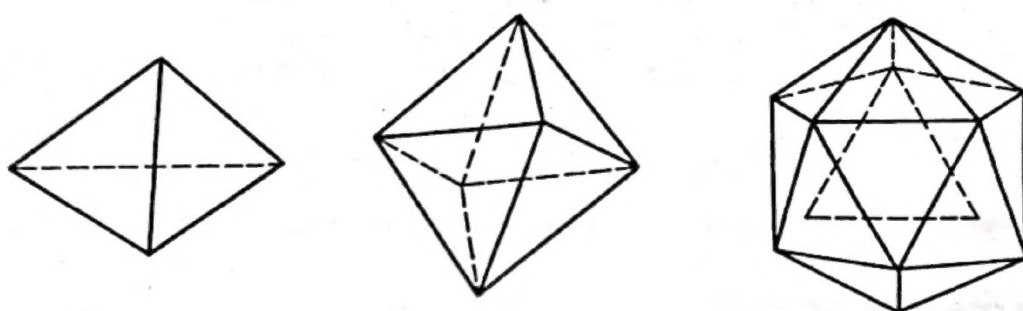


Fig. 4

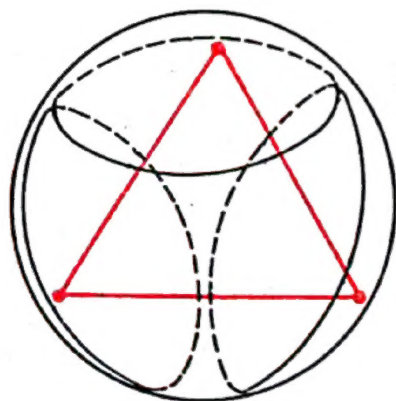


Fig. 5

**M 3.** a) În figura 6 a, planul este acoperit cu pătrate de cinci culori: Centrele pătratelor de aceeași culoare sînt situate în vîrfurile unei rețele pătrate. Pentru ce număr de culori este posibilă o acoperire analoagă a planului?

b) În figura 6 b, planul este acoperit cu hexagoane regulate de șapte culori, astfel încît centrele hexagoanelor de aceeași culoare sînt situate în vîrfurile unei rețele formate din triunghiuri echilaterale congruente. Pentru ce număr de culori este posibilă o acoperire analoagă a planului?

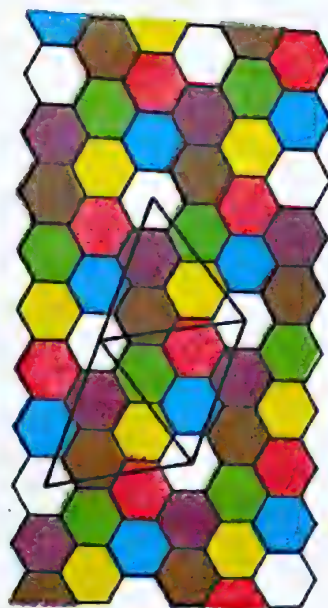
**Observație.** La punctul a) al problemei se găsește ușor că numărul culorilor poate să fie egal cu 1 (toate pătratele colorate la fel) sau 2 (ca la tabla de șah). La punctul b) al problemei se găsește ușor că poate fi o culoare sau trei culori. Este de dorit să se dea răspunsul general. Sînt interesante însă și unele răspunsuri parțiale. Stabiliți, de exemplu, dacă la punctul b) este o soluție cu 13 culori.

A. N. Kolmogorov





a



b

Fig. 6

În figura 7 dăm desenul trimis de elevul Serghei Eliseev (cl. a VI-a) care a colorat planul acoperit de hexagoane cu 13 culori.

Înainte de a da rezolvarea generală trebuie să facem o precizare relativ la textul problemei (pe care ne-a sesizat-o primul V. Gutenmaher din Moscova).

Începem cu punctul a). În text se cere ca centrele pătratelor de aceeași culoare să fie situate în virfurile unei rețele făcute din pătrate. În text nu s-a specificat că pătratele acestei rețele trebuie să fie congruente pentru culori diferite. În figura 8 centrele pătratelor de cele trei culori formează rețele de pătrate dar pentru pătratele roșii „pasul” (latura pătratului) rețelei este de lungime  $\sqrt{2}$ , iar pentru culorile alb și galben este 2 și, mai mult, ultimele două rețele sînt rotite față de prima. Dacă textul problemei se înțelege ad literam — și la un examen scris sau la olimpiadă așa și trebuie făcut — atunci desenul din figura 8 satisface condițiilor problemei. Dacă înțelegem astfel textul, atunci răspunsul la punctul a) este: pentru orice număr. Într-adevăr, din orice colorare cu  $n$  culori, dintre care una să zicem că este albă, se poate

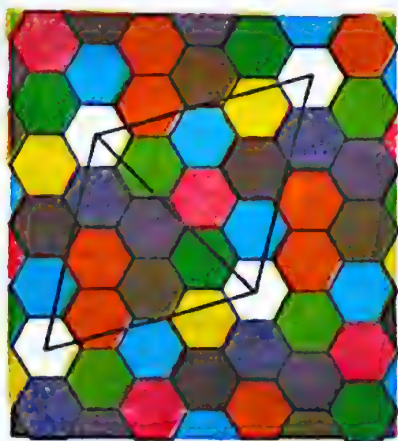


Fig. 7

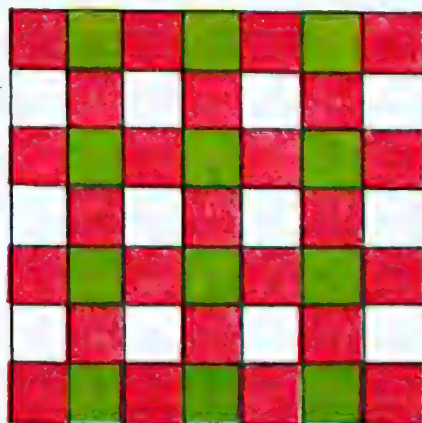


Fig. 8



obține o colorare cu  $n + 1$  culori, dacă pătrățelele albe le colorăm „în ordinea de la șah” (adică una o lăsam albă, alta vecină o colorăm cu a  $(n + 1) - a$  culoare ș.a.m.d.)

Înțelegând astfel textul și punctul b) devine foarte simplu.

**Răspuns.** Pentru orice număr de culori mai mare decât 2. Într-adevăr, o colorare cu două culori este imposibilă, întrucât dacă dintre cele trei hexagoane care se întâlnesc într-un punct, două au aceeași culoare, atunci toate hexagoanele trebuie să aibă aceeași culoare. Colorări cu 3 și 4 culori se găsesc ușor și mai departe nu e greu ca prin colorarea hexagoanelor albe în trei culori să mărim numărul total al culorilor cu 2, apoi iar cu 2 ș.a.m.d.

Desigur că în acest mod se pot obține multe colorări diferite. Dacă avem o colorare a planului, pe care să o notăm cu  $\mathcal{A}$ , cu  $k$  culori și punem în evidență o anumită culoare  $x$  și dacă avem o altă colorare a planului, fie aceasta  $\mathcal{B}$  cu  $h$  culori, atunci se poate face „extinderea colorării  $\mathcal{A}$  cu ajutorul lui  $\mathcal{B}$ ” în felul următor. În colorarea  $\mathcal{A}$  se păstrează toate culorile în afară de  $x$  și pătrățelele sau hexagoanele de culoare  $x$  (procedeul se referă la ambele cazuri) se recolorează în cele  $h$  culori și anume rețeaua pe care o formează ele se colorează după modelul lui  $\mathcal{B}$  (considerând pătrățelele izolate din rețeaua  $\mathcal{A}$  de culoarea  $x$  ca pătrățele vecine din rețeaua  $\mathcal{B}$ ). Se obține astfel o nouă colorare cu  $k + h - 1$  culori. (În figura 8, în această terminologie este dată „extinderea colorării de tip șah cu o colorare de tip șah“.)

Astfel că în această interpretare a textului rezolvarea este foarte simplă. Totuși autorul problemei a avut în vedere că rețelele formate din centrele respectivelor poligoane de aceeași culoare sînt la fel și se obțin unele din altele prin translații (așa cum se indică în figurile atașate textului problemei). Colorările respective, care respectă această cerință, le vom numi regulate. Întrucît rezolvarea ambelor puncte este asemănătoare vom considera deodată ambele cazuri.

**Rezolvare. I.** Vom demonstra la început că dacă avem o astfel de colorare a planului, atunci numărul culorilor este egal cu  $k^2 + h^2$  în cazul pătratelor și  $k^2 + kh + h^2$  în cazul hexagoanelor, unde  $k, h$  sînt numere naturale nu ambele nule deodată (mai sînt și alte formule care reprezintă aceleași mulțimi de numere ca, de exemplu,  $k^2 - kh + h^2$  pentru hexagoane).

Vom lua ca unitate de lungime distanța dintre centrele a două pătrate sau hexagoane vecine.

Vom trasa cu linii groase negre rețeaua care trece prin centrele pătratelor sau hexagoanelor de aceeași culoare, să zicem roșie (fig. 9,10). În cazul hexagoanelor vom duce linii numai în două direcții (nu în trei), astfel încît rețeaua va fi formată nu din triunghiuri echilaterale, ci din romburi. Fie  $ABCD$  un pătrat sau un romb din rețea. Vom deduce formula pentru aria sa.

În cazul pătratului vom duce prin punctele  $A$  și  $B$  drepte paralele cu laturile pătratelor colorate și vom nota punctul lor de intersecție prin  $M$ . Lungimile  $AM = k$  și  $BM = h$  sînt numere naturale (unul dintre ele poate fi zero). De exemplu în figura 6, a,  $k = 3$ ,  $h = 2$ . Atunci  $AB = \sqrt{k^2 + h^2}$ , iar aria lui  $ABCD$  este egală cu  $k^2 + h^2$ .

În cazul rombului vom duce prin punctele  $A$  și  $B$  paralele la apotemele hexagoanelor, iar punctul lor de intersecție îl notăm cu  $M$ . Unghiul  $AMB$  poate fi egal cu  $120^\circ$  sau cu  $60^\circ$ . Vom duce drepte astfel încît el să fie de  $120^\circ$ . Lungimile  $AM = k$  și  $BM = h$  sînt numere naturale (unul dintre ele



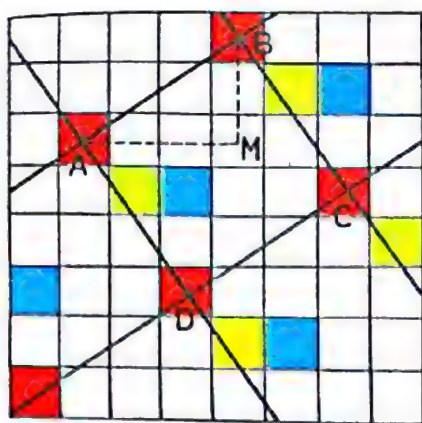


Fig. 9

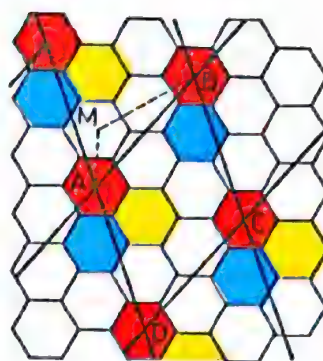


Fig. 10

poate fi și zero). În figura 10,  $k = 1$ ,  $h = 2$ . Atunci  $AB = \sqrt{k^2 + kh + h^2}$  și aria rombului este egală cu  $\frac{\sqrt{3}}{2}(k^2 + kh + h^2)$ .

Vom demonstra că numărul culorilor care participă la colorare este egal cu raportul dintre aria lui  $ABCD$  și aria unui pătrățel (colorat) (cazul a)) sau a unui hexagon (cazul b)) și deci egal cu:

$k^2 + h^2$  în cazul pătratelor;

$k^2 + kh + h^2$  în cazul hexagoanelor (fiindcă aria unui hexagon este  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ).

Acest lucru rezultă direct din următoarea leamnă.

**Le m ă f u n d a m e n t a l ă.** Partea din  $ABCD$  colorată în fiecare dintre culorile care participă la colorare este sau un pătrat (în cazul a), respectiv un hexagon (în cazul b) sau este formată din bucăți (pentru culoarea roșie, patru; pentru celelalte culori două) din care se poate compune un pătrat, respectiv un hexagon.

Demonstrația lemei nu este dificilă și propunem cititorilor să o facă singuri. Facem numai remarca următoare: colorarea tuturor pătratelor (romburilor) din rețea este aceeași, adică dacă s-ar decupa un pătrat (romb)  $ABCD$  și s-ar așeza peste pătratul vecin (romb), atunci partea din  $ABCD$  colorată într-o anumită culoare s-ar suprapune exact peste partea respectivului pătrat (romb) de aceeași culoare.

Există un alt mod de a da această demonstrație mai frumos, dar care necesită o solicitare mai mare a imaginației. Ne limităm la început la cazul rețelei formate din pătrate. Decupăm din plan pătratul  $ABCD$  și formăm din el un tub, un cilindru colorat pe partea exterioară, lipind împreună laturile  $AB$  și  $CD$ . Acest tub este limitat de două circumferințe obținute din laturile  $AD$  și  $BC$ . Lipim aceste două circumferințe una de cealaltă (făcând să coincidă punctul  $A = D$  cu punctul  $B = C$ ). Aria corpului format este egală cu  $k^2 + h^2$  și fiecare parte a sa colorată cu o anumită culoare este un pătrat  $1 \times 1$ .

În cazul hexagoanelor, ajungem la același rezultat dacă lipim în același mod un dreptunghi care are o latură comună cu rombul  $ABCD$  și alta este înălțimea rombului.



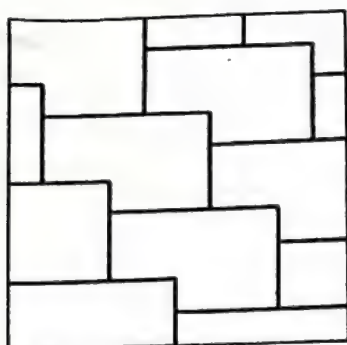


Fig. 11 Planul este acoperit de figuri congruente fiecare formată din 13 pătrățele. Pentru ca să formăm un tor prin lipire trebuie luat un poligon format din 13 figuri

Menționăm că planul poate fi acoperit și cu alte figuri congruente astfel încât părțile din ele colorate cu aceleași culori să fie congruente. De exemplu, în figura 11 se indică acoperirea planului cu figuri formate din alăturarea a două pătrate de laturi  $k$  și  $h$ . Aici  $k = 3$ ,  $h = 2$  (13 culori).

II. Fie date numerele  $m = k^2 + h^2$  sau  $n = k^2 + kh + h^2$ . Vom arăta că planul poate fi acoperit așa cum cere problema cu pătrate colorate în  $m$  culori sau hexagoane colorate în  $n$  culori. Acoperim planul cu pătrate sau hexagoane regulate și începem să le colorăm în felul următor:

Colorăm unul dintre ele în roșu. Numărăm de la el  $k$  pătrate (hexagoane) într-o parte, apoi rotim cu  $90^\circ$  pentru pătrate și cu  $60^\circ$  pentru hexagoane și numărăm  $h$  pătrate (hexagoane) în noua direcție, iar pătratul (hexagonul) la care ajunge îl colorăm din nou în roșu. Pe segmentul care unește centrele celor două pătrate (hexagoane) colorate în roșu construim un pătrat (în cazul a) sau un triunghi echilateral (în cazul b). Construind alături de el pătrate (triunghiuri echilaterale) congruente, vom obține centrele tuturor pătratelor (hexagoanelor) care trebuie colorate cu roșu. Efectuând o translație a mulțimii tuturor pătratelor (hexagoanelor) colorate în roșu, vom obține o mulțime de pătrate necolorate pe care le colorăm cu altă culoare ș.a.m.d. până se acoperă tot planul cu pătrate (hexagoane) colorate. După cele demonstrate mai sus numărul culorilor va fi egal cu  $k^2 + h^2$  în cazul a) și  $k^2 + kh + h^2$  în cazul b).

III. Ce numere naturale pot fi reprezentate sub forma  $k^2 + h^2$  sau  $k^2 + kh + h^2$ ? Pentru ca să scriem primele astfel de numere este convenabil să facem două tabele: tabela 1, pentru  $k^2 + h^2$ , tabela 2, pentru  $k^2 + kh + h^2$ .

Tabela 1

$k/h$		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
1		2	5	10	17	26	37	50	65	82	101
2			8	13	20	29	40	53	68	85	104
3				18	25	34	45	58	73	90	109
4					32	41	52	65	80	97	116
5						50	61	74	89	106	125
6							72	85	100	117	136
7								98	113	130	149
8									128	145	164
9										162	181
10											200



Tabela 2

$k/h$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
1	3	7	13	21	31	43	57	73	91	111
2		12	19	28	39	52	67	84	103	124
3			27	37	49	63	79	97	117	139
4				48	61	76	93	112	133	156
5					75	91	109	129	151	175
6						108	127	148	171	196
7							147	169	193	219
8								192	217	244
9									243	271
10										300

Numerele de sub diagonală repetă pe cele de deasupra și nu s-au mai scris. Unele numere apar de două ori. Acest lucru înseamnă că pentru numărul respectiv există două colorări diferite ale planului. Este ușor de scris aceste numere în ordine crescătoare. Din prima tabelă obținem: 1, 2, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 16, 17, 18, 20, 25, 26, ... la a doua tabelă: 1, 3, 4, 7, 12, 13, 16, 19, 21, 25, 27, 28, .... Să presupunem că am scris aceste numere pînă la unul anumit și căutăm următorul număr. Liniile curbe duse în prima tabelă ne ajută să facem acest lucru. Pentru ca să ne dăm seama cum s-au dus, să observăm că în tabela 1 fiecare număr este egal cu pătratul distanței de la centrul acelei căsuțe în care este scris pînă la punctul  $O$  (ca unitate de lungime s-a luat latura căsuței). De aceea, dacă vom duce cîteva cercuri cu centrele în punctul  $O$ , ele împart numerele noastre în grupe în ordine crescătoare. Dacă vom încerca să ducem cu mîna linii analoage în tabelul al doilea, ele par a fi linii drepte dar nu sînt. Graficele unor ecuații de forma  $k^2 + kh + h^2 = c = \text{const.}$  într-un sistem de axe de coordonate cu originea în  $O$  și cu axa  $Ok$  spre dreapta și axa  $Oh$  în jos sînt niște elipse, ceea ce se vede mai bine dacă facem schimbarea de variabile  $x = k + h$ ,  $y = k - h$ .

Am obținut răspunsul la problemă. Ne putem pune întrebarea dacă el nu mai poate fi îmbunătățit în sensul următor. Dacă la o altă problemă am obține răspunsul: toate numerele de forma  $k^2 + h^2 + m^2 + n^2$  unde  $k, h, m, n$  sînt numere naturale, de fapt am obține răspunsul: orice număr natural, întrucît orice număr natural poate fi scris în forma de mai sus. Ne întrebăm dacă și în șirurile de numere găsite la problema dată de la un moment dat nu intră toate numerele naturale. Ca să arătăm că nu este așa, ne vom folosi din nou de liniile duse în tabele.

Vom duce, în tabela 1, un cerc cu centrul în punctul  $O$  de rază  $n$ . Centrele tuturor căsuțelor în care sînt scrise numere mai mici sau egale cu  $n^2$  sînt situate în interiorul sau pe frontiera sectorului de cerc cu unghiul la centru de  $45^\circ$ . De aceea, toate aceste căsuțe se găsesc în interiorul unei figuri obținute dacă adăugăm la acest sector o bandă la lățime 1. Aria acestei figuri este mai



mică decât  $\frac{\pi n^2}{8} + 3n + 4$ . De aici rezultă că printre primele  $n^2$  numere naturale sînt mai puține decât  $\frac{\pi n^2}{8} + 3n + 4$ , care se pot reprezenta sub forma  $k^2 + h^2$ . Pentru  $n$  mare, al doilea număr este mai mic decât  $n^2$  și raportul lor este aproximativ egal cu  $\frac{\pi}{8}$ . În realitate, întrucît unele numere din tablou se repetă, numerele de forma  $k^2 + h^2$  sînt chiar mai puține. Se vede ușor că numerele care se reprezintă sub forma  $k^2 + kh + h^2$  reprezintă o fracție și mai mică.

**M 4.** Se dă segmentul  $AB$ . Să se găsească în plan mulțimea punctelor  $C$  astfel încît în triunghiul  $ABC$  mediana dusă din vîrfurile  $A$  să fie congruentă cu înălțimea dusă din vîrfurile  $B$ .

A XXXII-a olimpiadă matematică din Moscova

**Prima rezolvare.** Se știe că pentru a rezolva o problemă de loc geometric trebuie să se realizeze două etape: 1) toate punctele mulțimii găsite satisfac cerința problemei 2) toate punctele care satisfac la cerința problemei aparțin mulțimii găsite. Vom începe cu a doua. Să presupunem că s-a dat segmentul  $AB$  și fie punctul  $C$  care satisface cerința problemei. Notăm cu  $AD$  mediana triunghiului  $ABC$ . Completăm triunghiul pînă la un paralelogram prelungind mediana  $AD$  pînă în punctul  $E$ , astfel ca  $AD = DE$ . Aici sînt posibile două cazuri după cum unghiul  $AEB$  este ascuțit sau obtuz.

a) Fie unghiul  $AEB$  ascuțit (fig. 12, a). Vom duce  $BF \perp AC$ ,  $AK \parallel BF$ , atunci în triunghiul dreptunghic  $AEK$ , cateta  $AK$  este congruentă cu jumătatea ipotenuzei  $AE$ , deci  $\angle AEB = 30^\circ$ .

b) Fie unghiul  $AEB$  obtuz (fig. 12, b). Ducem  $BF \perp AC$ ,  $AK \parallel BF$  și obținem, ca în cazul a), că  $\angle AEK = 30^\circ$ , de aceea  $\angle AEB = 150^\circ$  (deoareba față de cazul a), constă în faptul că acum punctele  $K$  și  $B$  sînt situate de părți diferite față de  $E$ ).

Astfel, dacă  $C$  este punctul căutat, atunci segmentul  $AB$  se vede din punctul  $E$  sub un unghi de  $30^\circ$  sau de  $150^\circ$ . Cum se știe toate aceste puncte  $E$  se găsesc pe două cercuri  $O_1$  și  $O_2$  care sînt tăiate de coarda  $AB$  în arce de  $300^\circ$  și  $60^\circ$  (fig. 13, a) și prin urmare toate punctele  $C$  sînt situate pe cercurile  $O'_1$  și  $O'_2$  obținute din  $O_1$  și  $O_2$  printr-o translație de segment  $l = AB$  în direcția de la  $B$  la  $A$  (fig. 13, b).

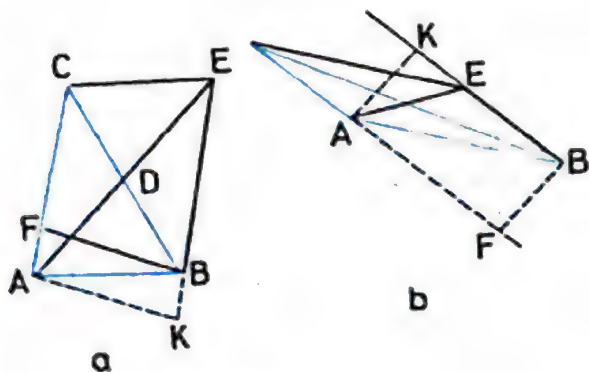


Fig. 12

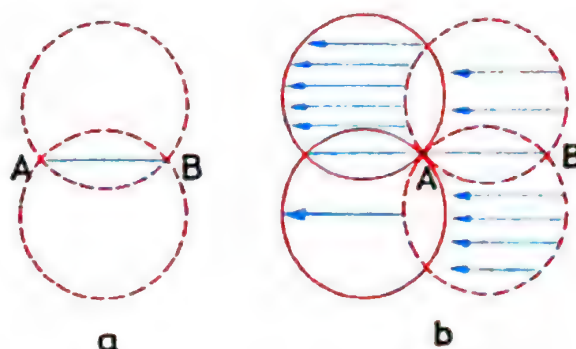


Fig. 13



Acum vom demonstra că orice punct  $M$  al cercurilor  $O'_1$  și  $O'_2$  aparține mulțimii căutate de puncte. Fie  $M$  un punct arbitrar al unuia dintre aceste cercuri; atunci, ducând  $MK = AB$ ,  $MK \parallel AB$  vom obține punctul  $K$  pe unul dintre cercurile  $O_1$  sau  $O_2$  (fig. 14, a, b). În figura 14, a,  $BF \perp MA$ ,  $AL \parallel BF$ ,  $AL = BF$ , atunci (din  $\triangle AKL$ ),  $AL = \frac{1}{2} AK$ , adică punctul  $M$  satisface condiției. În mod analog, în figura 14, b,  $BF \perp MA$ ,  $AL = BF$ ,  $AL \parallel BF$ ,  $\angle AKB = 150^\circ$ ,  $\angle AKL = 180^\circ - \angle AKB = 30^\circ$ , adică  $AL = \frac{1}{2} AK$  și punctul  $M$  satisface de asemenea condiției. Astfel toate punctele lui  $O'_1$  și  $O'_2$  în afară de punctele  $N$  și  $A$  satisfac condiției.

**A doua rezolvare.** Introducem un sistem de coordonate cu originea în  $A$  și fie ca punctul  $B$  să aibă coordonatele  $(2; 0)$ , iar punctul căutat  $C$ , coordonatele  $(x; y)$ . Fie  $AF$  mediana în triunghiul  $ABC$ ,  $BK \perp AC$  (fig. 15). Se demonstrează ușor că punctul  $F$  are coordonatele  $(\frac{x+2}{2}; \frac{y}{2})$ . Atunci  $AF^2 = (\frac{x+2}{2})^2 + \frac{y^2}{4}$ . Prin ipoteză  $BK^2 = AF^2$ , de aceea, din asemănarea triunghiurilor  $AK$  și  $ACD$  rezultă că  $\frac{BK^2}{AK^2} = \frac{CD^2}{AD^2}$  sau

$$\frac{\left(\frac{x+2}{2}\right)^2 + \frac{y^2}{4}}{4 - \left(\frac{x+2}{2}\right)^2 + \frac{y^2}{4}} = \frac{y^2}{x^2}. \quad (1)$$

Din (1) prin calcule obținem

$$y^4 + (2x^2 + 4x - 12)y^2 + (2x + x^2)^2 = 0. \quad (2)$$

Aceasta este ecuația care leagă coordonatele punctelor căutate. Membrul stâng al ecuației (2) se descompune în factori:

$$[(x+1)^2 + (y+\sqrt{3})^2 - 4][(x+1)^2 + (y-\sqrt{3})^2 - 4] = 0. \quad (3)$$

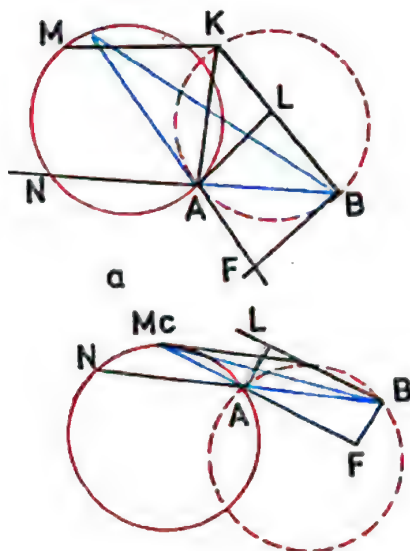


Fig. 14

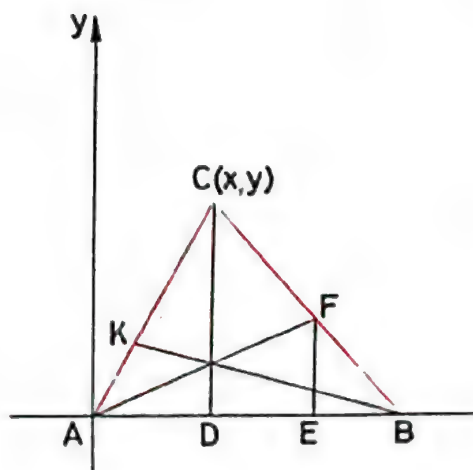


Fig. 15



Acest lucru s-ar putea face în felul următor. Notăm  $y^2 = z$ . Atunci (2) este o ecuație de gradul al doilea în raport cu  $z$ . Pentru ca să-i găsim rădăcinile, aplicăm formula cunoscută și obținem

$$z_{1,2} = \frac{12 - 2x^2 - 4x \pm \sqrt{(12 - 2x^2 - 4x)^2 - 4(2x + x^3)^2}}{2} = 6 - x^2 - 2x \pm \pm 2\sqrt{3(3 - x^2 - 2x)} = (\sqrt{3 - x^2 - 2x} \pm \sqrt{3})^2$$

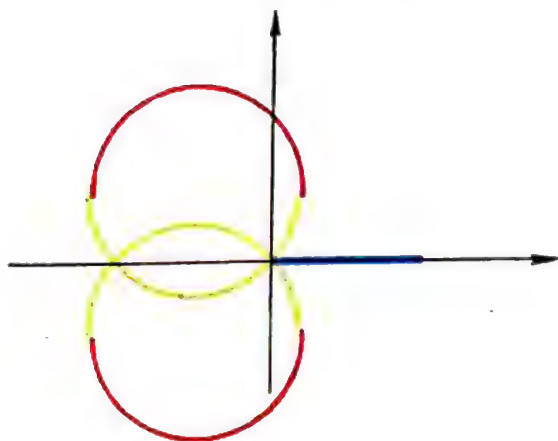


Fig. 16

Ecuația (2) se poate atunci scrie astfel:

$$[y^2 - (\sqrt{4 - (x+1)^2} + \sqrt{3})^2][y^2 - (\sqrt{4 - (x+1)^2} - \sqrt{3})^2] = 0 \quad (4)$$

(În figura 16 sînt puse în evidență mulțimile de puncte care corespund celor doi factori, una cu roșu, alta cu galben.) Dacă se continuă descompunerea în factori în (4) (ca diferențe de pătrate) și regruparea lor, se obține (3). La fel s-ar rezolva problema în care  $AD/BF = k$ .

**M 5.** În mulțimea  $E$  formată din  $n$  elemente, se pun în evidență  $m$  submulțimi diferite (diferite și de  $E$ ), astfel încît pentru oricare două elemente din  $E$  se găsește exact una dintre submulțimile date în care intră ambele aceste elemente. Să se demonstreze că  $m \geq n$ . În ce caz este posibilă egalitatea?

N. Bourbaki

Se pot da și alte formulări ale acestei probleme. Iată două dintre ele.

a) Elevii unei școli pleacă adesea în grupuri să mănînce înghețată. După o astfel de ieșire, se ceartă astfel încît ulterior oricare doi elevi din grup nu mai mănîncă înghețată împreună. La sfîrșitul anului au văzut că nu pot să mai meargă la cofetărie decît numai cîte unul. Să se demonstreze că dacă numărul acestor vizite este mai mare decît 1, atunci el nu e mai mic decît numărul elevilor școlii.

b) Se dau  $n$  puncte. Prin fiecare două puncte se duce exact o dreaptă și pe fiecare dreaptă sînt cel mult  $n - 1$  puncte. Trebuie să se demonstreze că numărul dreptelor nu e mai mic decît  $n$ .

Este util să ne gîndim dacă aceste formulări trimise de cititori sînt într-adevăr echivalente cu textul inițial. Dacă ne închipuim elementele mulțimii  $E$  ca puncte și submulțimile ca drepte care trec prin aceste puncte și facem pentru acestea figuri de genul celor de mai jos (fig. 17,18), vom vedea că nu pot fi drepte cele care trec prin puncte. Vezi și textul problemei M 36. Deci problema b) nu este echivalentă cu cea inițială.

Vom expune în continuare rezolvarea problemei urmînd indicațiile autorului. Vom retranscrie ipoteza în felul următor.



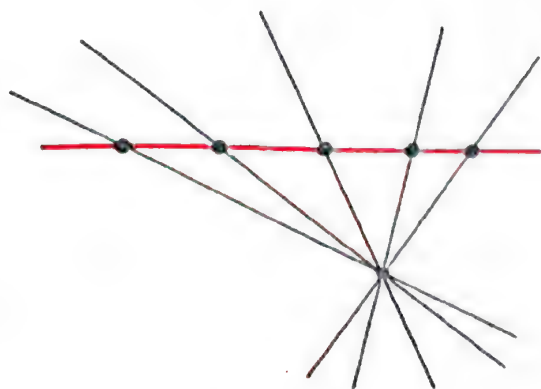


Fig. 17

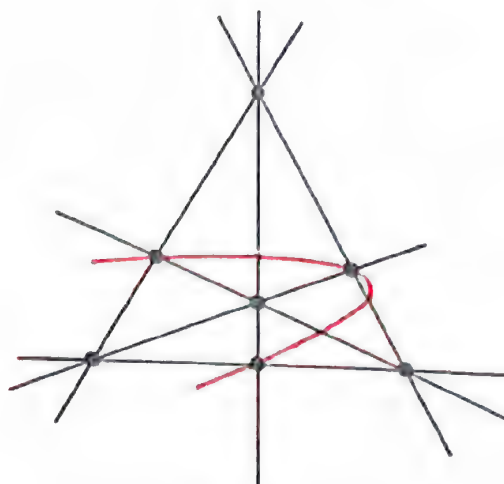


Fig. 18

Se dau  $n$  elemente diferite și un sistem format din  $m$  mulțimi formate din aceste elemente, astfel încât:

- 1) nici o mulțime din sistem nu conține toate elementele;
- 2) oricare două dintre cele  $n$  elemente se găsesc împreună în una dintre mulțimile sistemului;
- 3) dacă două elemente se găsesc împreună în una dintre mulțimile sistemului, atunci ele nu se întâlnesc împreună în nici una dintre celelalte mulțimi ale sistemului.

Să demonstrăm că  $m \geq n$ .

Vom da un exemplu de o astfel de aranjare a elementelor. Fie  $n = 5$  și elementele  $a, b, c, d, e$ . Formăm următorul sistem de mulțimi din aceste elemente:

$(a, b), (a, c, e), (b, e), (b, c), (b, d), (a, d), (d, e), (c, d)$ .

Evident că sînt satisfăcute condițiile 1, 2, 3. Aici  $m = 8$  și deci  $m \geq n$ . Pentru ca demonstrația să fie mai intuitivă ne vom referi la acest exemplu.

**Demonstrație.** Remarcăm că  $n > 2$  și că este suficient să se demonstreze inegalitatea  $m \geq n$  pentru sistemele de mulțimi care conțin cel puțin două elemente.

1. Sistemul este format din cel puțin două elemente. Dacă sistemul este format dintr-o singură mulțime, atunci datorită condiției 2), această mulțime ar conține deodată toate elementele, ceea ce contrazice condiția 1).

2. Fiecare element intră cel puțin în două dintre mulțimile sistemului. Dacă un element ar intra numai într-o mulțime a sistemului, atunci aceasta trebuie — datorită lui 2) — să conțină toate cele  $n$  elemente, ceea ce contrazice pe 1).

3. Un același element nu poate intra deodată în toate mulțimile sistemului. Să presupunem că un element  $x$  intră în toate mulțimile sistemului. Atunci, datorită condiției 3), oricare două mulțimi ale sistemului nu conțin alte elemente comune afară de  $x$ . Prin urmare, oricare două elemente diferite de  $x$  nu se întâlnesc în nici una dintre mulțimi, ceea ce contrazice pe 2).

4. Punem în corespondență fiecărui element numărul mulțimilor sistemului în care intră, adică socotim de câte ori se repetă el în acest sistem. În exemplul de mai sus, lui  $a$  îi corespunde 3, lui  $b$  îi corespunde 4 ș.a.m.d.



Fiecărei mulțimi din sistem îi punem în corespondență numărul de elemente pe care le conține.

Suma numerelor corespunzătoare elementelor este egală cu suma numerelor corespunzătoare mulțimilor. În exemplul de mai sus:  $3 + 4 + 3 + 4 + 3 = 2 + 3 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 17$ .

Într-adevăr, dacă se consideră două elemente diferite atunci cînd ele intră în mulțimi diferite, atunci ambele sume reprezintă numărul elementelor tuturor mulțimilor sistemului.

5. *Notății.* Vom lua unul dintre elementele căruia îi corespunde cel mai mic număr, adică cel care intră în cel mai mic număr de mulțimi ale sistemului. În exemplul ales putem să luăm sau pe  $a$ , sau pe  $c$ , sau pe  $e$ ; îl vom lua pe  $a$ . Vom nota acest element prin  $a_n$ , iar numărul mulțimilor în care intră el, prin  $k_n$ . În exemplu,  $a_5 = a$ ,  $k_5 = 3$ . Datorită propozițiilor 2 și 3, avem  $2 \leq k_n < m$ .

Mulțimile în care intră  $a_n$ , vor fi notate într-o anumită ordine prin  $A_1, A_2, \dots, A_{k_n}$ , iar celelalte prin  $A_{k_n+1}, \dots, A_m$ . În exemplu,  $A_1 = (a, b)$ ,  $A_2 = (a, c, e)$ ,  $A_3 = (a, d)$ ,  $A_4 = (b, e)$ ,  $\dots$ ,  $A_8 = (c, d)$ .

Să considerăm primele  $k_n$  mulțimi  $A_1, A_2, \dots, A_{k_n}$ . Raționînd la fel ca la propoziția 3, vedem că oricare două nu conțin aceleași elemente în afară de  $a_n$ . Prin urmare, putem să luăm cîte un element din fiecare dintre aceste mulțimi și să le notăm respectiv prin  $a_1, a_2, \dots, a_{k_n}$ . Celelalte elemente le vom nota într-o anumită ordine prin  $a_{k_n+1}, a_{k_n+2}, \dots, a_n$ . În exemplu, avem  $a_1 = b$ ,  $a_2 = c$ ,  $a_3 = d$ ,  $a_4 = e$ . Atunci  $A_1 = (a_1, a_5)$ ,  $A_2 = (a_2, a_4, a_5)$ ,  $A_3 = (a_3, a_5)$ ,  $A_4 = (a_1, a_4)$ ,  $A_5 = (a_1, a_2)$ ,  $A_6 = (a_1, a_3)$ ,  $A_7 = (a_3, a_4)$ ,  $A_8 = (a_2, a_3)$ .

Vom nota acum numerele corespunzătoare elementelor  $a_1, a_2, \dots, a_{k_n}, \dots, a_{n-1}$  în aceeași ordine prin  $k_1, k_2, \dots, k_{n-1}$ . Reamintim că elementului  $a_n$  îi corespunde numărul  $k_n$  și că el este cel mai mic dintre numerele  $k_1, k_2, \dots, k_{n-1}, k_n$ .

În sfîrșit vom nota numerele corespunzătoare mulțimilor  $A_1, A_2, \dots, A_m$  în aceeași ordine prin  $s_1, s_2, \dots, s_m$ .

Atragem încă o dată atenția asupra modului în care am numerotat elementele și mulțimile.

În primul rînd,  $k_n$  este mai mic decît numerele  $k_1, k_2, \dots, k_{n-1}$ .

În al doilea rînd,  $k_n$  este numărul ultimei dintre mulțimile în care intră elementul  $a_n$  și astfel elementul  $a_n$  nu intră în mulțimile  $A_{k_n+1}, \dots, A_m$ .

Mulțimea  $A_i$  conține elementul  $a_i$  dar nu conține elementele  $a_j$  dacă  $1 \leq i \leq k_n$ ,  $1 \leq j \leq k_n$  și  $i \neq j$ . În afară de aceasta conform propoziției de la punctul  $k_1 + \dots + k_n = s_1 + \dots + s_m$ .

6. Dacă elementul  $a_i$  nu aparține nici unei mulțimi  $A_j$  atunci  $k_i \geq s_j$ . Într-adevăr, să presupunem că mulțimea  $A_j$  nu conține elementul  $a_i$  și este formată din  $s_j$  elemente diferite. Atunci elementul  $a_i$  trebuie să se întîlnească cu fiecare dintre aceste elemente într-una oarecare dintre celelalte mulțimi ale sistemului. Pe de altă parte, oricare două dintre aceste elemente nu se pot întîlni deodată în aceste mulțimi pentru că ele s-au întîlnit deja în  $A_j$ . Prin urmare numărul mulțimilor în care intră elementul  $a_i$  nu este mai mic decît numărul  $s_j$ .

7. Să considerăm primele  $k_n$  mulțimi  $A_1, A_2, \dots, A_{k_n}$  și primele  $k_n$  elemente  $a_1, a_2, \dots, a_{k_n}$ . Ele au fost alese astfel încît fiecare mulțime  $A_i$  conține



elementul  $a_i$  cu același indice dar nu conține alte elemente dintre acestea cu alți indici, atunci conform propoziției 6:  $s_1 \leq k_2, s_2 \leq k_1$  dacă  $k_n = 2$  și

$$\left. \begin{array}{l} s_1 \leq k_2, s_2 \leq k_1, \dots, s_{k_n} \leq k_1 \\ \dots\dots\dots \\ s_1 \leq k_{k_n}, s_2 \leq k_{k_n}, \dots, s_{k_n} \leq k_{k_n-1} \end{array} \right\} \text{dacă } k_n > 2$$

În exemplu,  $k_n = 3$  și

$$2 = s_1 \leq k_2 = 3, \quad 3 = s_2 \leq k_1 = 4, \quad 3 = s_3 \leq k_1 = 4, \quad 2 = s_1 \leq k_3 = 4, \\ 3 = s_2 \leq k_3 = 4, \quad 3 = s_3 \leq k_2 = 3.$$

8. Adunînd toate inegalitățile vom obține

$$(k_n - 1)(s_1 + s_2 + \dots + s_{k_n}) \leq (k_n - 1)(k_1 + \dots + k_{k_n})$$

sau

$$s_1 + s_2 + \dots + s_n \leq k_1 + \dots + k_n$$

9. Acum putem demonstra inegalitatea cerută  $m \geq n$ .

Să admitem că  $m < n$ . Vom compara cele două sume

$$S = (s_1 + s_2 + \dots + s_{k_n}) + s_{k_n+1} + \dots + s_m$$

și

$$K = (k_1 + k_2 + \dots + k_{k_n}) + k_{k_n+1} + \dots + k_n.$$

Să remarcăm că am notat astfel mulțimile încît elementul  $a_n$  nu aparține mulțimilor  $A_{k_n+1}, \dots, A_m$ ; deci  $s_{k_n+1} \leq k_n, \dots, s_m \leq k_n$  și cu atît mai mult  $s_{k_n+1} \leq k_{k_n+1}, \dots, s_m \leq k_m$  fiindcă  $k_n$  este cel mai mic dintre toate numerele  $k_i$ . În cazul în care  $m < n$ , obținem:  $k_{k_n+1} + \dots + k_n > s_{k_n+1} + \dots + s_m$ , dar atunci  $s < K$  ceea ce contrazice propoziția de la punctul 4.

Demonstrația faptului că  $m \geq n$  este terminată.

10. Să încercăm să vedem în ce caz are loc egalitatea.

Dacă  $m = n$  atunci, după propozițiile de la punctele 8, 9 și 4 rezultă că:

$$k_1 + \dots + k_{k_n} + \dots + k_n = s_1 + \dots + s_{k_n}$$

și toate inegalitățile din 8 se transformă în egalități.

Intrucît  $k_n$  este cel mai mic număr dintre  $k_i$ , vom avea

$$s_{k_n+1} = \dots = s_n = k_{k_n+1} + \dots + k_n$$

În continuare vom considera două cazuri:

a)  $k_n = 2$ . În acest caz, se vede ușor că este posibil un astfel de sistem, de mulțimi  $(a_n, a_1), (a_n, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}), (a_1, a_2), (a_1, a_3) \dots (a_1, a_{n-1})$  (fig. 17). Pentru orice  $n$  sînt satisfăcute cerințele problemei.

b)  $k_n > 2$ . În acest caz vom obține că toate inegalitățile din 7, trebuie să se transforme în egalități. Comparînd aceste egalități, vom obține că  $s_1 = s_2 = \dots = s_{k_n} = k_1 = k_2 = \dots = k_{k_n}$ .

Și la fel ca și la punctul a):  $s_{k_n+1} = \dots = s_n = k_{k_n+1} = \dots = k_{n-1} = k_n$ . Evident că unul dintre numerele  $s_1, s_2, \dots, s_{k_n}$  nu e mai mare decît unul dintre numerele  $k_{k_n+1}, \dots, k_{n-1}$  și prin urmare  $s_1 = s_2 = \dots = s_n = k_1 = k_2 = \dots = k_n = l > 2$ .



Ca rezultat obținem că în acest caz este îndeplinită următoarea condiție:

4) Fiecare mulțime conține exact  $l$  elemente și fiecare element intră exact în  $l$  mulțimi diferite.

Pentru aceasta este necesar ca  $n = l(l - 1) + 1$ . Într-adevăr, să considerăm un element oarecare  $x$ . El trebuie să intre exact în  $l$  mulțimi, prin urmare toate aceste mulțimi conțin toate cele  $n$  elemente, astfel că  $x$  trebuie să se întâlnească cu toate elementele. În afară de aceasta, ele nu pot să conțină elemente comune fiindcă ele conțin elementul  $x$ . De aici obținem egalitatea necesară.

Pentru  $l = 3$ , adică  $n = 7$ , se construiește ușor sistemul necesar de mulțimi (fig. 18). Dar întrebarea privind valorile lui  $n$  de forma  $l^2 - l + 1$  pentru care mulțimile formate din  $n$  elemente admit un sistem de submulțimi care să satisfacă la cerințele 1), 2), 3) și 4) se dovedește foarte grea.

Un astfel de sistem are o denumire specială: un plan proiectiv finit de ordin  $l - 1$  (În figura 18 este reprezentat un plan proiectiv de ordin 2, format din 7 puncte și 7 drepte). Se demonstrează ușor că pentru orice plan proiectiv finit este îndeplinită și următoarea proprietate „duală” proprietății 2):

5) Orice două mulțimi din sistemul nostru au un element comun (evident că numai unul); cu alte cuvinte, orice două drepte se intersectează într-un punct.

Vom arăta cum se construiește un plan proiectiv finit de ordin  $p$  (cu  $n = p^2 - p + 1$ ) unde  $p$  este număr prim. Pentru aceasta trebuie să folosim „numere” dintr-o,  $p$ -aritmetică, adică din aritmetica resturilor după modulul  $p$ . Într-o astfel de aritmetică (a claselor de resturi modulo  $p$ ) se poate împărți orice „număr” la oricare altul diferit de zero. Vom numi „punct” tripletul de „numere”  $(x_1, x_2, x_3)$  abstracție făcând de un factor de proporționalitate (adică tripletele  $(x_1, x_2, x_3)$  și  $(kx_1, kx_2, kx_3)$  determină același punct). Vom conveni ca tripletul  $(0, 0, 0)$  să nu fie considerat punct.

Vom numi „dreaptă” un triplet de numere  $(a_1, a_2, a_3)$  nu toate nule (abstracție făcând de un factor de proporționalitate). Vom spune că punctul  $(x_1, x_2, x_3)$  aparține dreptei  $(a_1, a_2, a_3)$  dacă și numai dacă  $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$ .

Verificați că pentru aceste puncte și drepte sînt îndeplinite condițiile 1) – 5). Convingeți-vă că pentru  $p = 2$  se obține exemplul de plan proiectiv de ordinul 2, reprezentat în figura 18.

În mod analog se poate demonstra că există un plan proiectiv de ordinul  $p^k$ , unde  $p$  este prim și  $k$  orice număr natural. Se demonstrează că pentru o infinitate de valori ale lui  $N$  nu există plane proiective de ordinul  $N$  (în particular pentru  $N = 6$ ,  $N = 14$ ). Dar nici măcar pentru  $N = 10$  nu se știe dacă există sau nu un plan proiectiv; ca să se ia în considerare toate posibilitățile nu e în stare nici o mașină electronică de calcul.

A. Toom, J. Rabbot, V. Gutenmaher

**M 6.** Cîte poziții ale acelor unui ceas există în care nu se poate determina timpul dacă nu se știe care este acul care indică ora și care este cel care indică minutele. (Se consideră că pozițiile acelor se pot determina exact dar nu se poate urmări mișcarea lor.)

**Răspuns.** Există 132 de astfel de poziții. Cu alte cuvinte există 66 de perechi de poziții ale acelor, astfel încît în fiecare dintre aceste perechi o poziție se obține din cealaltă prin înlocuirea acului care indică orele prin acul care indică minutele (fig. 19); desigur că nu se iau în considerare pozițiile în



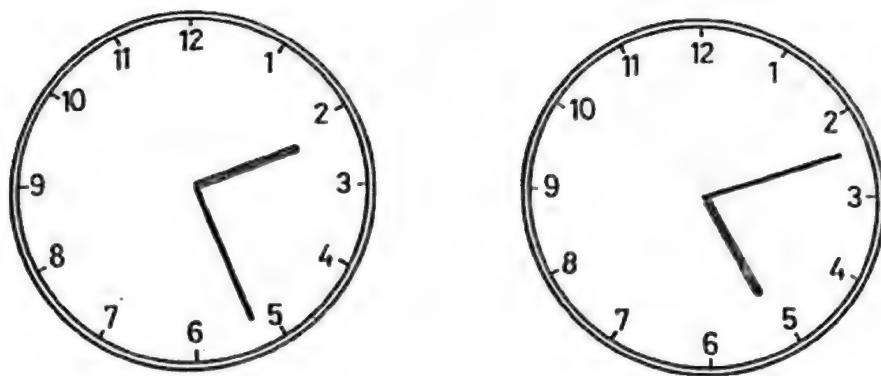


Fig. 19

care direcțiile celor două ace coincid (și sensurile); în aceste cazuri timpul este perfect determinat.

**Prima rezolvare.** Vom considera cadranul împărțit în 12 părți. Să considerăm una dintre pozițiile de care este vorba în problemă. Să presupunem că unul dintre ace ocupă poziția  $x$ , iar celălalt poziția  $y$ ; aici  $0 \leq x < 12$ ,  $0 \leq y < 12$ . Dacă primul ac indică orele și al doilea minutele, atunci trebuie să fie satisfăcută egalitatea

$$x = a + \frac{5y}{60} \quad (1)$$

unde  $a$  este un număr natural  $0 \leq a < 11$ .

În mod analog, dacă primul ac indică minutele și al doilea orele, atunci

$$y = b + \frac{5x}{60}. \quad (2)$$

Sistemul format din cele două egalități (1) și (2), poate fi înlocuit printr-altul echivalent:

$$\begin{cases} 12x = 12a + y \\ 12y = 12b + x \end{cases} \quad \begin{cases} 12x - 12a = y \\ 143x = 12(b + 12a) \end{cases} \quad \begin{cases} x = 12 \cdot \frac{b + 12a}{143} \\ y = 12 \cdot \frac{a + 12b}{143} \end{cases}$$

Aici  $0 \leq a \leq 11$ ,  $0 \leq b \leq 11$  sînt numere naturale. Fiecare pereche  $(x, y)$  care satisface acest sistem reprezintă o soluție. În total sînt  $12^2 = 144$ . E clar că în cazurile  $x = y$ , adică  $a = b$  nu avem soluție a problemei propuse deci le eliminăm. Rămîn 132. (Două dintre ele, corespunzătoare valorilor  $a = 2$ ,  $b = 5$  și  $a = 5$ ,  $b = 2$  sînt reprezentate în figura 19.)

Iată altă soluție mai intuitivă. Ne dăm poziția acului care indică minutele în funcție de poziția acului care indică orele,  $y$  funcție de  $x$ . Graficul acestei funcții  $x \rightarrow y$  este dat în figura 20. Acest grafic este format din mulțimea pozițiilor  $(x, y)$  ale acelor, care se pot vedea pe cadran. Ne interesează acele perechi  $(x, y)$  pentru care și perechile  $(y, x)$  aparțin acestei mulțimi. Dar punctul  $(y, x)$  este simetric cu punctul  $(x, y)$  față de bisectoarea unghiului  $xOy$ . În figura 20 mulțimea acestor puncte este desenată cu roșu. Rămîne de găsit numărul punctelor de intersecție dintre liniile albastre și cele roșii (fără a considera punctele situate pe bisectoarea  $x = y$ ). Se vede ușor că sînt 132, adică 66 de perechi de puncte simetrice față de bisectoare.



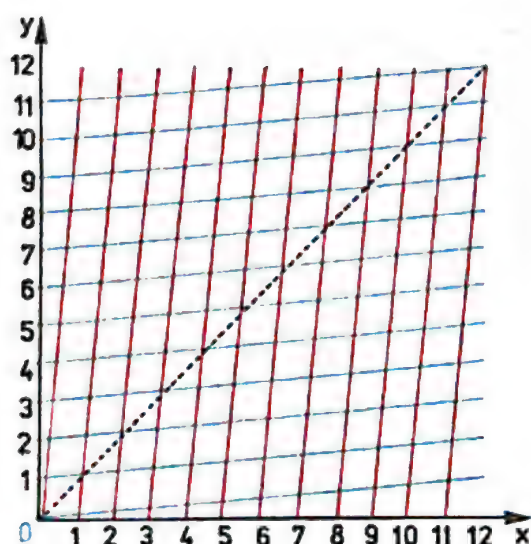


Fig. 20

A treia rezolvare. Să considerăm alături de ceasul nostru (la dreapta) unul imaginar care merge exact de 12 ori mai repede. Pornim ambele ceasuri deodată atunci când ele arată ora 12; atunci, tot timpul acul care arată orele pe ceasul din dreapta va coincide ca poziție cu acul care arată minutele pe ceasul din stânga. Pozițiile care ne interesează pe noi sînt acelea în care acul care indică orele pe ceasul din stînga are aceeași poziție cu acul care indică minutele pe ceasul din dreapta (gîndiți-vă de ce?). Dintre cele 144 de rotații pe care le face acul care indică minutele ceasului din dreapta în timp ce acul care indică orele ceasului „normal” face o rotație, și la fiecare

dintre rotații apare o coincidență, trebuie excluse cele 12 cazuri în care pozițiile celor patru ace coincid și deci rămîn 132.

M 7.  $a, b, c$  sînt lungimile laturilor unui triunghi. Să se demonstreze că

$$\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} + \frac{c}{a+b-c} \geq 3.$$

S. Berkolaiko

Vom da una dintre cele mai scurte rezolvări dintre multele posibile. Vom folosi numai inegalitatea cunoscută

$$\frac{m}{n} + \frac{n}{m} \geq 2 \quad (1)$$

unde  $m, n > 0$ .

Vom introduce notațiile

$$b+c-a=x, \quad c+a-b=y, \quad a+b-c=z. \quad (2)$$

$$\text{Observăm că} \quad x > 0, \quad y > 0, \quad z > 0 \quad (3)$$

ceea ce rezultă din faptul că o latură a unui triunghi este mai mică decît suma celorlalte două. Din (2) rezultă că

$$a = \frac{y+z}{2}, \quad b = \frac{x+z}{2}, \quad c = \frac{x+y}{2}$$

deci inegalitatea inițială poate fi scrisă astfel:

$$\frac{y+z}{2x} + \frac{x+z}{2y} + \frac{x+y}{2z} \geq 3 \quad (4)$$

Transformînd expresia din (4) și folosind (1) și (3), obținem:

$$\begin{aligned} \frac{y+z}{2x} + \frac{x+z}{2y} + \frac{x+y}{2z} &= \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{y}{x} + \frac{x}{y} \right) + \left( \frac{z}{x} + \frac{x}{z} \right) + \left( \frac{z}{y} + \frac{y}{z} \right) \right] \geq \\ &\geq \frac{1}{2} (2 + 2 + 2) = 3 \end{aligned}$$

ceea ce și trebuia demonstrat.



Menționăm că în mod analog se poate demonstra inegalitatea mai generală:

$$\frac{x_1}{x_2 + x_3 + \dots + x_n - x_1} + \frac{x_2}{x_3 + x_4 + \dots + x_n + x_1 - x_2} + \dots + \frac{x_{n-1}}{x_n + x_1 + x_2 + \dots + x_{n-2} - x_{n-1}} + \frac{x_n}{x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} - x_n} \geq \frac{n}{n-2}$$

unde toți numitorii sînt pozitivi.

În încheiere menționăm că din inegalitatea demonstrată rezultă direct un fapt geometric. Fie  $R$  raza cercului circumscris triunghiului,  $r$  raza cercului înscris. Se știe că

$$R = \frac{abc}{4S}, \quad r = \frac{S}{p}, \quad S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad (5)$$

unde  $S$  este aria triunghiului, iar  $p$  semiperimetrul său. Din (2) rezultă că:

$$p - a = \frac{x}{2}, \quad p - b = \frac{y}{2}, \quad p - c = \frac{z}{2}. \quad (6)$$

Folosind pe (5) și pe (6), obținem

$$\begin{aligned} \frac{R}{2r} &= \frac{abcp}{8S^2} = \frac{abcp}{8p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{abc}{(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)} = \\ &= \frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{8xyz} = \frac{1}{4} \left[ 1 + \left( \frac{y+z}{2x} + \frac{x+z}{2y} + \frac{x+y}{2z} \right) \right]. \end{aligned}$$

Observăm că în paranteza rotundă din membrul drept al ultimei egalități este chiar membrul stîng al inegalității (4). Folosind-o pe aceasta, obținem că

$$\frac{R}{2r} \geq 1, \text{ adică } R \geq 2r.$$

Încercați să demonstrați acest lucru geometric (ceea ce este mult mai greu).

**M 8.** Două persoane joacă următorul joc. Dintr-o cutie de chibrituri care conține 25 de bețe, fiecare ia pe rînd cîte unul, două sau trei bețe. Cîștigă acela care la sfîrșitul jocului (după ce toate bețele au fost luate) are un număr par de bețe. Cine cîștigă la un joc corect, cel care începe sau adversarul? Cum trebuie să joace cel care începe ca să cîștige? Cum se modifică răspunsul dacă se consideră cîștigător cel care are un număr impar de bețe?

Studiați acest joc în cazul general cînd sînt  $2n + 1$  bețe și se pot lua deodată orice număr de bețe de la 1 la  $m$ .

**R e z o l v a r e.** Pentru ca să putem vorbi de joc trebuie să dăm o denumire participanților. Vom conveni ca unul dintre ei să fie numit Eu, iar celălalt El.

Mai înainte să generalizăm puțin ipoteza problemei. Numărul  $N$  de chibrituri poate fi oricare, nu numai impar. În cazul în care  $N$  este par se consideră că va cîștiga unul dintre jucători dacă ambii au la sfîrșit un număr par de bețe și va cîștiga celălalt dacă vor avea ambii jucători un număr impar de bețe.

Vom considera, strict vorbind, un număr infinit de jocuri fiindcă  $N$  și  $m$  pot să fie orice numere naturale. Chiar dacă  $m$  și  $N$  sînt dați, de asemenea sînt posibile două variante: Eu cîștig dacă la sfîrșitul jocului am un număr de bețe 1) par, 2) impar.

Vom vorbi la început despre toate variantele acestui joc împreună.

Să stabilim ce trebuie să țină minte jucătorul în cursul jocului. Trebuie să țină minte toate mișcările sale și ale adversarului de la începutul jocului? Nu, în orice variantă este de ajuns să știe lucrurile următoare:

- 1) cite bețe au mai rămas în cutie;
- 2) dacă numărul bețelor pe care le are el este par;
- 3) cine este de rind să joace.

Dacă se dau acești trei parametri, vom zice că s-a dat starea jocului. În fiecare astfel de stare, jucătorul poate să facă  $m$  mișcări diferite (sau mai puține, dacă au mai rămas de luat mai puțin de  $m$  bețe). Fiecare mișcare a lui trimite jocul într-o nouă stare, în care va juca partenerul său.

Vom reprezenta stările jocului sub forma unor căsuțe sau cerculețe, iar mișcările posibile sub forma unor săgeți.

În figurile 21—24, în tabelele respective:

În coloana I, numărul rindului  $m$  arată cite bețe au mai rămas de luat de pe masă (din cutie).

Coloana a II-a arată faptul că Eu am un număr par de bețe și Eu joc. Coloana a III-a arată faptul că Eu am un număr par de bețe și El joacă. Coloana a IV-a arată faptul că Eu am un număr impar de bețe și Eu joc. Coloana a V-a arată faptul că Eu am un număr impar de bețe și El joacă.

Tabela din figura 21 este făcută pentru cazul  $m = 2$  (se pot lua unul sau două bețe la o mișcare) și Eu câștig dacă la sfârșitul jocului Eu am un număr par de bețe. Sînt desenate numai situațiile în care pe masă au rămas cel mult șapte bețe. Săgețile însemnate diferit arată cum se poate juca: Jucătorul care e la mișcare în această căsuță poate merge după oricare săgeată care iese din ea. De exemplu, prima căsuță din stînga din rîndul cu numărul 5 (punctat) corespunde stării jocului în care, pe masă au rămas 5 bețe, Eu am un număr par de bețe și Eu urmează să joc, iar cele două săgeți care pleacă din această căsuță, arată stările în care Eu pot să duc jocul prin mutarea pe care o voi face.

Tabela se poate continua în jos oricît de mult. Săgețile care ies din fiecare căsuță se obțin printr-o translație din săgețile care ies din oricare altă căsuță

din aceeași coloană (în ultimele două căsuțe de sus, unele săgeți „au dispărut”).

Vom numi o stare cîștigătoare și vom pune în căsuța respectivă litera  $C$ , dacă atunci cînd jocul începe din această căsuță Eu pot să câștig, oricum ar încerca El să mă împiedece.

Vom numi o stare necîștigătoare și vom nota căsuța corespunzătoare cu  $N$ , dacă atunci cînd jocul începe din această stare, El poate câștiga și dacă El nu greșește, Eu nu pot să-l împiedic să câștige.

Trecem acum la partea principală a rezolvării. Vom pune în toate căsuțele tabelului literele  $C$  și  $N$ . Vom face acest lucru la început pentru jocul descris în figura 21. În rîndul  $O$ , evident că literele trebuie puse astfel  $C C N N$  întrucît con-

I	II	III	IV	V
0				
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				

Fig. 21 Tabela stărilor posibile și mișcările jocului dacă  $m = 2$ .



siderăm că eu am câștigat dacă la sfârșitul jocului am un număr par de bețe. Mai departe, vom pune literele de sus în jos după următoarea regulă:

I. Dacă este rîndul meu (adică este o căsuță în coloana a II-a sau a IV-a, atunci în ea se pune:

litera *C* dacă cel puțin una dintre săgeți duce la o căsuță cu litera *C*;  
litera *N*, dacă oricare săgeată care pleacă din ea duce la o căsuță cu litera *N*.

II. Dacă este rîndul lui (adică este o căsuță în coloana a III-a sau a V-a), în ea se pune:

litera *N* dacă cel puțin o săgeată din ea duce la o căsuță cu litera *N*,  
litera *C*, dacă fiecare săgeată care pleacă din ea duce la o căsuță cu litera *C*.

Intrucît toate săgețile din tabelă merg de jos în sus, această regulă dă posibilitatea să se completeze toată tabela oricît am prelungi-o în jos.

În cazul nostru ( $m = 2$ ) pentru ca să se completeze căsuțele liniei a  $n$ -a este suficient să se știe cum sînt completate căsuțele din liniile a  $(n - 1) - a$  și  $(n - 2) - a$ . În realitate nici nu trebuie trasate toate săgețile, așa cum sînt în figura 21. Este suficient ca pe o bucată separată de calc să se deseneze șablonul, adică totalitatea săgeților care ies din căsuțele unei linii și plimbînd acest șablon pe toate liniile tablei, să se completeze acestea cu litere *C* și *N* după regula de mai sus. În figura 22 se arată momentul în care s-a completat tabela pînă la linia a 5-a și urmează să se completeze a 6-a. Astfel s-ar putea completa tabela pînă la orice linie, de exemplu pînă la a 25-a, și să se vadă ce literă este în prima căsuță de pe linia a 25-a. Dacă este *C*, atunci la jocul cu 25 de bețe, cel care începe va câștiga și dacă este *N*, va pierde.

Intr-adevăr, mai departe de a 5-a linie, nu este nevoie să se completeze tabela. Aceasta pentru că linia a 4-a coincide cu linia 0, iar linia a 5-a cu linia 1. De aceea, în mod obligator linia a 6-a va coincide cu linia a 2-a (pentru că fiecare linie este determinată de cele două anterioare). Atunci linia a 7-a va coincide cu a 3-a, a 8-a cu a 4-a, a 9-a cu a 5-a ș.a.m.d. Liniile se repetă cu perioada 4 deci liniile cu număr  $4k$  vor fi de forma *C C N N*;

liniile cu numărul  $4k + 1$  vor fi de formă *N C C N*;

liniile cu numărul  $4k + 2$  vor fi de forma *C N C N*;

liniile cu numărul  $4k + 3$  vor fi de forma *C N C N*. În particular linia a 25-a ( $25 = 6 \cdot 4 + 1$ ) va fi de forma *N C C N*.

După ce s-au pus în tabelă literele *C* și *N*, devine clar ce strategie trebuie să aleg Eu pentru ca să câștig: de fiecare dată trebuie făcută acea mișcare care duce la o căsuță cu litera *C*. Regula de așezare a literelor *C* și *N* indicată mai sus este făcută chiar așa încît dacă Eu am ajuns o dată într-o căsuță *C*, atunci în continuare Eu pot să ajung numai în căsuțe *C* și adversarul nu are cum să mă împiedice.

Cazul în care Eu câștig, dacă Eu am un număr impar de bețe la sfârșit, se studiază în mod analoگ. Se poate pune în linia 0, *N N C C* și apoi să se com-

I	II	III	IV	V	
0	C	C	N	N	Perioada
1	N	C	C	N	
2	C	N	C	N	
3	C	N	C	N	
4	C	C	N	N	
5	N	C	C	N	Șablon
6					

Fig. 22. Tabela cu stările câștigătoare și necâștigătoare pentru jocul cu  $m = 2$

I	II	III	IV	V	
0	C	C	N	N	Perioadă
1	N	C	C	N	
2	C	N	C	N	
3	C	N	C	N	
4	N	N	C	C	
5	C	N	N	C	
6	C	N	C	N	
7	C	N	C	N	
8	C	C	N	N	Șablon
9	N	C	C	N	
10	C	N	C	N	
11					

Fig. 23. Tabela pentru jocul cu  $m = 3$

par de bețe, atunci cel care începe pierde, iar dacă se consideră câștigător cel care va avea un număr impar de bețe atunci cel care începe va câștiga.

Cazul general se studiază în mod analog. Lungimea perioadei se dovedește egală cu  $m + 2$  dacă  $m$  este par și cu  $2m + 2$  dacă  $m$  este impar. Aceste perioade sunt reprezentate în figurile 24 a și b. Șabloanele care sunt date pentru  $m = 8$  și  $m = 9$  permit să se înțeleagă cum vor fi șabloanele pentru cazul general. Căsuțele colorate în anumită culoare reprezintă stările în care poate ajunge jucătorul din căsuța în care este un punct de aceeași culoare. Regula de așezare a literelor  $C$  și  $N$  este aceeași de mai sus. Propunem cititorilor să verifice că perioadele sunt într-adevăr cele date mai sus. Facem numai remarcă următoare că pentru a fi siguri că perioada se va repeta trebuie să se verifice așezarea literelor în toate liniile primei perioade și în primele  $m$  linii ale celei de a doua perioade.

Cum se vede, pentru  $m$  mare cel mai adesea cel care începe acela și câștigă. Toate literele care strică această regulă în figurile 24 a, b sunt încercuite. Astfel că cel care începe va pierde numai în următoarele cazuri

	Câștigă cel care are un număr par	Câștigă cel care are un număr impar
$m$ par	$N$ dă restul 1 la împărțirea cu $m + 2$	$N$ dă restul $m + 1$ sau 0 la împărțirea cu $m + 2$
$m$ impar	$N$ dă restul 1 sau $m + 1$ la împărțirea cu $2m + 2$	$N$ dă restul 0 sau $m + 2$ la împărțirea cu $2m + 2$

pleteze tabela după aceeași regulă. Perioada va fi din nou 4. Dar se poate folosi același desen din figura 22.

Să facem remarcă următoare: este echivalent ca unui jucător să nu-i dăm nici un băț înainte de începerea jocului și să-i cerem ca la sfârșit să aibă un număr impar de bețe sau să-i dăm înainte de începerea jocului un băț și să-i cerem ca la sfârșit să aibă un număr par de bețe. Astfel în cazul nou pe care-l cercetăm, Eu câștig dacă în tabela din figura 22 în căsuța de la intersecția liniei a  $N$ -a cu coloana a IV-a este  $C$ , dacă Eu încep; coloana a V-a este  $C$  dacă El începe.

Fie acum  $m = 3$ . Tabela respectivă, ca și mai înainte va fi formată din aceleași coloane. Șablonul se va schimba (fig. 23). Acum fiecare linie este determinată de cele trei linii anterioare. Pentru scrierea literelor  $C$  și  $N$  aplicăm aceeași regulă de mai sus. Așezind literele ne convingem că perioada este formată din 8 linii. În particular, a 25-a linie, va coincide cu prima:  $N C C N$ .

Astfel în cazul  $m = 3$  și  $N = 25$  se obține următorul rezultat: dacă se consideră câștigător cel care va avea un număr



I	II	III	IV	V	
0	C	(C)	(N)	N	Perioada
1	(N)	(C)	C	N	
2	C	N	C	N	
...	C	N	C	N	
m	C	N	C	N	
m+1	C	N	(N)	(C)	
					Șablon

a

Fig. 24. a. Tabela cu jocul cu m par și șablonul pentru m = 8

I	II	III	IV	V	
0	C	(C)	(N)	N	Perioada
1	(N)	(C)	N	C	
2	C	N	C	N	
...	C	N	C	N	
m	C	N	C	N	
m+	(N)	N	C	C	
m+2	C	N	(N)	(C)	Șablon
m+3	C	N	C	N	
...	C	N	C	N	
2m+1	C	N	C	N	

b

Fig. 24. b. Tabela cu jocul pentru m impar și șablonul pentru m = 9

**M 9.** Considerăm următoarele proprietăți ale unui tetraedru (tetraedrul este o piramidă triunghiulară oarecare):

- toate fețele sînt echivalente;
- fiecare muchie este congruentă cu cea opusă;
- toate fețele sînt congruente;
- centrele sferelor înscrisă, respectiv circumscrisă, coincid;
- sume unghiurilor plane de la fiecare vîrf al tetraedrului sînt aceleași.

Să se demonstreze că toate aceste proprietăți sînt echivalente. Încercați să găsiți și alte proprietăți echivalente cu ele.

**Rezolvare.** În această problemă este foarte important să se găsească o cale rațională de demonstrație, să se analizeze care proprietate din care rezultă ușor (vom folosi în loc de cuvintele „din ... rezultă...” săgeata  $\Rightarrow$ ).

- Este util să mai adăugăm câteva proprietăți ale tetraedrului:
- f) suma unghiurilor plane de la oricare vîrf este egală cu  $180^\circ$ ;
  - g) desfășurarea tetraedrului este un triunghi ascuțitunghic în care sînt duse liniile mijlocii (fig. 25);
  - h) toate fețele sînt triunghiuri ascuțitunghice cu cercuri circumscrise de aceeași rază;
  - i) proiecțiile tetraedrului pe fiecare dintre cele trei plane paralele cu două muchii opuse sînt dreptunghiuri. Aceste proprietăți și cele din text, — pe care le vom numerota de la 1 la 9 — sînt echivalente, iar demonstrația o vom face în următoarea ordine:

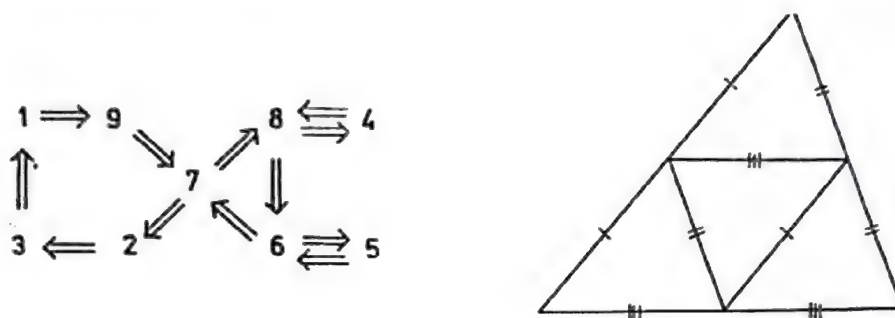


Fig. 25

Majoritatea dintre cele 12 teoreme indicate de săgeți sînt evidente. Le demonstrăm pe rînd.

(5)  $\Rightarrow$  (6). Suma măsurilor tuturor unghiurilor plane ale tuturor fețelor tetraedrului este egală cu suma măsurilor unghiurilor a patru triunghiuri, adică  $4 \cdot 180^\circ = 720^\circ$ , de aceea, dacă sumele măsurilor unghiurilor la fiecare vîrf sînt egale, rezultă că fiecare dintre ele este egală cu  $180^\circ$ . Invers, (6)  $\Rightarrow$  (5) este evident.

(4)  $\Rightarrow$  (8) Dacă  $R$  este raza sferei circumscrise tetraedrului și  $r$  raza sferei înscrise în tetraedru și centrele acestor sfere coincid, atunci punctul de tangență al sferei înscrise cu fiecare față va fi situat în interiorul feței și va fi depărtat de fiecare vîrf al triunghiului cu  $\sqrt{R^2 - r^2}$ , adică va fi centrul cercului circumscris acestui triunghi, de rază  $\sqrt{R^2 - r^2}$ .

(8)  $\Rightarrow$  (4). Este clar că în orice tetraedru, perpendicularele duse din centrul  $O$  al sferei circumscrise pe fețe cad în centrele cercurilor circumscrise și dacă razele tuturor acestor cercuri sînt  $R_1$ , atunci punctul  $O$  este egal depărtat de toate fețele (cu distanța  $r = \sqrt{R^2 - R_1^2}$ ). Dacă picioarele perpendicularelor sînt situate în interiorul fețelor, atunci  $O$  este centrul sferei înscrise de rază  $r$ .

(8)  $\Rightarrow$  (6). Dacă razele cercurilor circumscrise fețelor  $ABC$  și  $DBC$  sînt congruente, atunci  $\angle BAC = \angle BDC$ , întrucît aceste unghiuri cuprind arce congruente în cercuri congruente (aici este esențial faptul că  $\triangle BAC$  și  $\triangle BDC$  sînt ascuțitunghice!). Acest lucru se referă și la celelalte perechi de fețe vecine.

Astfel,  $\angle BDC + \angle CDA + \angle ADB = \angle BAC + \angle CBA + \angle ACB = 180^\circ$  și analog pentru celelalte vîrfuri.

(6)  $\Rightarrow$  (7). Dacă desfășurăm un tetraedru oarecare  $ABCD$ , obținem un hexagon  $D_1AD_2BD_3C$  (fig. 26), care este descompus în patru triunghiuri. Evident că din (6) rezultă că segmentele  $D_1A$  și  $AD_2$ ,  $D_2B$  și  $BD_3$ ,  $D_3C$  și  $CD_1$  sînt situate pe o dreaptă, adică punctele  $A$ ,  $B$  și  $C$  sînt mijloacele laturilor triunghiului  $D_1D_2D_3$  (ca în figura 25). Acest triunghi este ascuțitunghic, fiindcă



Într-un unghi triedru al tetraedrului (la vârful  $D$ ) fiecare dintre unghiurile plane este mai mic decât suma celorlalte două.

(9)  $\Rightarrow$  (7), (7)  $\Rightarrow$  (8) și (7)  $\Rightarrow$  (2) sînt evidente. (2)  $\Rightarrow$  (3) de asemenea este evidentă (cazul de congruență după cele trei laturi); (3)  $\Rightarrow$  (1) este evident.

A rămas de demonstrat că (1)  $\Rightarrow$  (9). Acest lucru este mai dificil.

(1)  $\Rightarrow$  (9). Să observăm că dacă  $p_1$  și  $p_2$  sînt plane paralele,  $AK$  și  $BH$  două segmente ale căror capete  $A$  și  $B$  sînt situate în planul  $p_1$ , iar capetele  $K$  și  $H$  în planul  $p_2$ , atunci segmentele  $AK$  și  $BH$  sînt congruente atunci și numai atunci cînd sînt congruente proiecțiile lor pe planul  $p_1$  (sau  $p_2$ ). Acest lucru se demonstrează ușor cu ajutorul teoremei lui Pitagora (fig. 27).

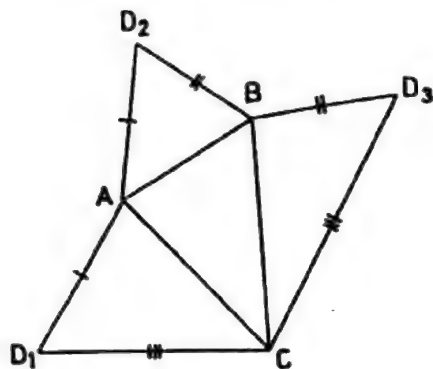


Fig. 26

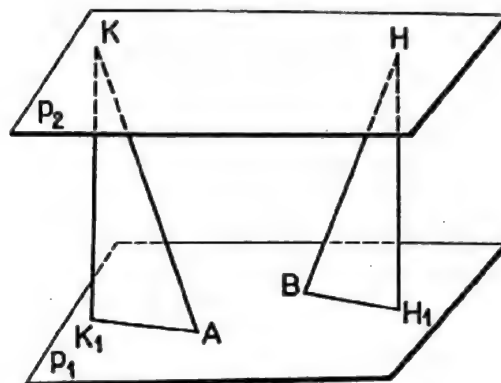
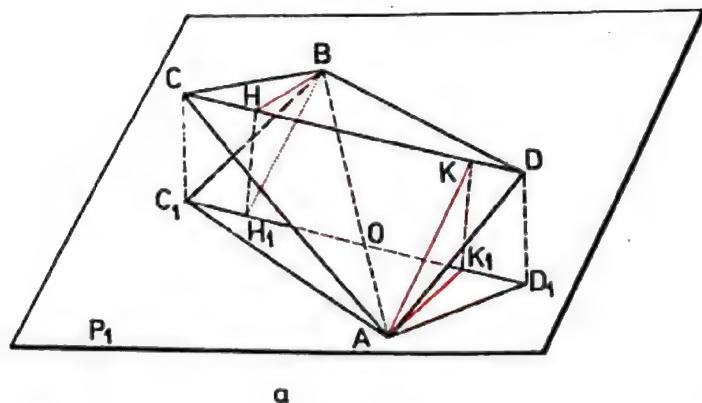
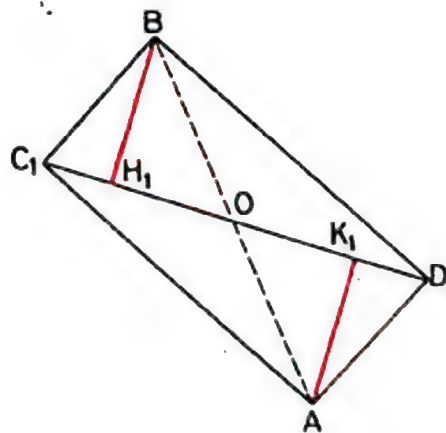


Fig. 27

Vom duce planele paralele  $p_1$  și  $p_2$  prin muchiile  $AB$  și  $CD$  ale tetraedrului. Fie  $C_1$  și  $D_1$  proiecțiile punctelor  $C$  și  $D$  pe planul  $p_1$  (fig. 28, a),  $O$  punctul de intersecție dintre  $C_1D_1$  și  $AB$ . Dacă ariile  $\triangle CAD$  și  $\triangle CBD$  sînt egale, atunci sînt congruente înălțimile  $AK$  și  $BH$  ale acestor triunghiuri, prin urmare sînt congruente proiecțiile acestor înălțimi pe planul  $p_1$ ;  $AK_1 = BH_1$  și de aceea  $AO = OB$  (fig. 28, b) de unde rezultă în particular că punctele  $A$  și  $B$  sînt situate de părți diferite ale dreptei  $C_1D_1$ . Analog, întrucît ariile  $\triangle ACB$  și  $\triangle ADB$  sînt egale, rezultă că  $C_1O = D_1O$ . Prin urmare  $AC_1BD_1$  este paralelogram, adică  $AC_1 = BD_1$  și  $C_1B = D_1A$ , de unde  $AC = BD$  și  $BC = AD$ . La fel se demonstrează că  $AB = CD$  deci  $AC_1BD_1$  este paralelogram.



a



b

Fig. 28, a. Tetraedrul în spațiu

Fig. 28, b. Proiecția tetraedrului pe plan

**M 10.** Patru cercuri care au centrele în vîrfurile unui patrulater convex acoperă în întregime acest patrulater. Să se demonstreze că dintre ele se pot alege trei cercuri care să acopere triunghiul cu vîrfurile în centrele acestor cercuri.

G. Galperin

**Rezolvare.** Principala dificultate în această problemă este să se găsească acel raționament care să cuprindă toate cazurile posibile de așezare a cercurilor și să țină cont de toate formele posibile ale patrulaterului.

Ideea rezolvării aparține lui N. Vasiliev. Vom nota cercurile cu centrele  $A, B, C, D$  în vîrfurile patrulaterului dat  $ABCD$  prin  $C_A, C_B, C_C, C_D$  de raze, respectiv  $r_A, r_B, r_C, r_D$ . Să presupunem că afirmația problemei nu este adevărată. Atunci fiecare cerc are un punct comun cu o parte din triunghiul opus lui neacoperit de celelalte trei cercuri; de exemplu,  $C_A$  trebuie să conțină punctele triunghiului  $BCD$  neacoperite de nici unul dintre cercurile  $C_B, C_C, C_D$ . Fie  $O$  punctul de intersecție a diagonalelor. Vom demonstra în presupunerea noastră că  $r_A \geq OA$ , adică cercul  $C_A$  conține punctul  $O$ . Restul este clar: la fel se poate demonstra că punctul  $O$  aparține lui  $C_B$  și  $C_C$  și de aici rezultă în mod evident că aceste cercuri acoperă triunghiul  $ABC$ . Să privim la figurile 29 și 30: dacă  $OL$  și  $ON$  sînt perpendicularele duse pe dreptele  $AB$  și  $BC$ , atunci  $C_A$  acoperă triunghiul  $AOL$ ,  $C_C$  acoperă triunghiul  $OCN$ ,  $C_B$  triunghiul  $OBL$  și  $OBN$ , iar aceste patru triunghiuri dreptunghice acoperă triunghiul  $ABC$  chiar dacă unul dintre triunghiurile  $AOB$  sau  $OBC$  (fig. 30) este obtuzunghic.

Ajungem la o contradicție, prin urmare afirmația problemei este adevărată. Astfel a rămas de demonstrat că  $r_A \geq OA$ . Ne este utilă următoarea lemă aproape evidentă.

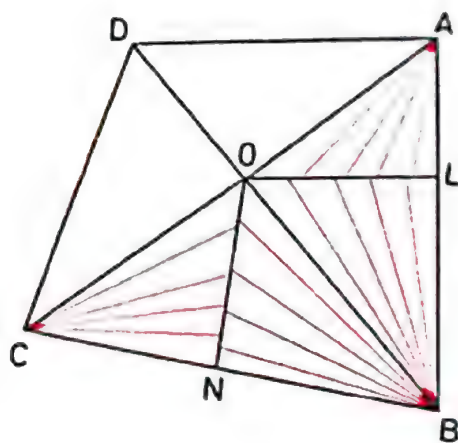


Fig. 29

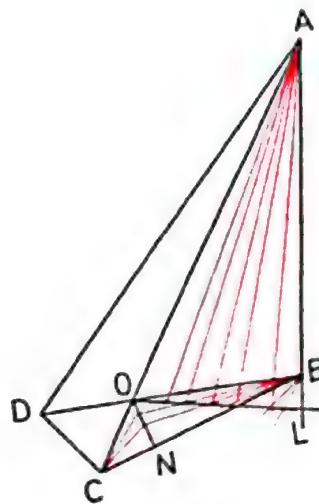


Fig. 30

**L e m ă.** Se dă patrulaterul convex  $PQRS$  și cercul  $C_R$  (care nu conține triunghiul  $PQR$  în întregime). Atunci dintre toate punctele situate în interiorul triunghiului  $PQR$  și în exteriorul lui  $C_R$  mai aproape de punctul  $S$  va fi:

- a) piciorul  $F$  al perpendicularei  $SF$  coborâtă din punctul  $S$  pe dreapta  $PR$ , dacă acest punct  $F$  este situat în exteriorul cercului  $C_R$  (fig. 31, a);
- b) punctul  $E$  de intersecție a cercului  $C_R$  cu segmentul  $PR$ , dacă punctul  $F$  este situat în interiorul lui  $C_R$  (fig. 31, b). (Aici este important că unghiul  $QRS$  al patrulaterului este mai mic decât  $180^\circ$ ; demonstrația lemei este lăsată cititorului.)



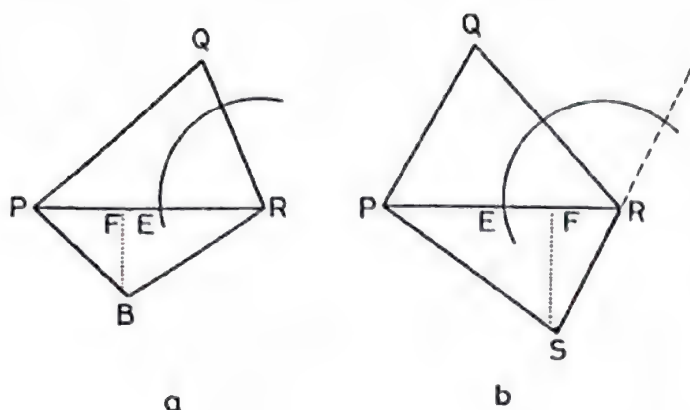


Fig. 31

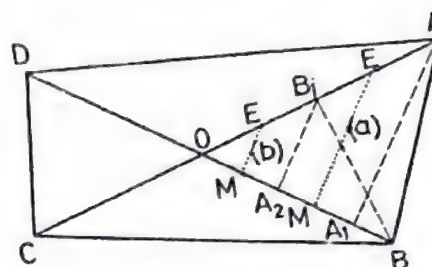


Fig. 32

Se poate considera că  $\angle AOB \leq 90^\circ$  (altfel am lua pe  $D$  nu pe  $B$ ). Fie  $BB_1 \perp AC$ ;  $AA_1 \perp BD$ ;  $B_1A_2 \perp BD$  (fig. 32). Să presupunem că  $r_A < OA$  și  $E$  este cel mai apropiat punct al lui  $C_A$  de  $O$  (el este situat pe segmentul  $OA$ ) și  $AE = r_A$ .  $EM$  este perpendiculara coborâtă din  $E$  pe  $BD$ . Este evident că  $AM > AE$ . Vom demonstra că  $r_A > AM$  de unde va rezulta că presupunerea noastră ( $r_A < OA$ ) nu este adevărată.

Vom demonstra la început că  $r_B > BM$ . Aplicăm lema triunghiului  $ACD$  și cercului  $C_A$  și punctului  $B$ . Vom considera două cazuri:

- $E$  este situat între  $A$  și  $B_1$ . Atunci  $r_B > BB_1 > BA_2 \geq BM$ ;
- $E$  este situat între  $O$  și  $B_1$ . Atunci (conform lemei)  $r_B > BE > BM$ .

Astfel, știm că punctul  $M$  aparține lui  $C_B$ . Aplicînd lema triunghiului  $BCD$ , cercului  $C_B$  și punctului  $A$  (observăm că  $M$  este situat între  $O$  și  $A_1$ , așa că are loc totdeauna cazul b)) obținem că  $r_A > AM$ . Cercul raționalmentelor s-a închis, s-a obținut contradicția necesară.

**M 11.** Pe 44 de copaci așezați în cerc sînt 44 de scatii zglobii (pe fiecare copac cîte unul). Din timp în timp doi scatii zboară deodată pe copacii alăturați, în sensuri contrare (unul în sensul acelor ceasului, celălalt în sens contrar, vezi fig. 33). Să se demonstreze că scatii nu se strîng într-un singur copac niciodată.

Dar dacă sînt  $n$  copaci și  $n$  scatii?

Problemă dată la Școala serală de matematică de pe lîngă Universitatea de Stat din Moscova.

**Rezolvare.** Vom rezolva problema direct pentru  $n$  scatii și  $n$  copaci. Vom numera copacii în ordine (să zicem în sensul acelor ceasului (fig. 33) de la 1 la 44. Vom nota numărul de scatii aflați la un moment dat pe al  $k$ -lea copac prin  $a_k$  (pe primul copac  $a_1$ , pe al doilea  $a_2$  ș.a.m.d.). Să considerăm expresia

$$S = 1 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2 + \dots + k \cdot a_k + \dots + n \cdot a_n.$$

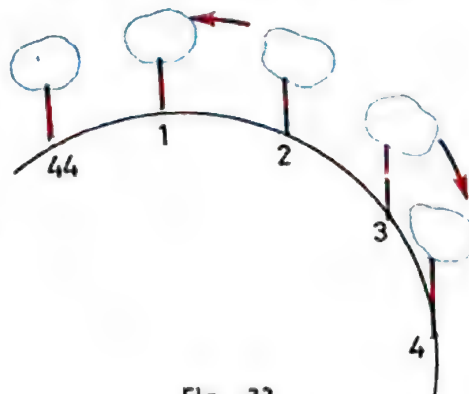


Fig. 33

Vom arăta că dacă doi scatii zboară pe copacii vecini, în sensuri opuse, atunci  $S$  sau rămâne neschimbată sau se modifică cu  $n$ .

Într-adevăr, să presupunem că un scatiu zboară de pe copacul al  $k$ -lea pe copacul vecin (în sensul acelor ceasului). Atunci în suma  $S$  se schimbă doi termeni. Dacă  $k < n$ , atunci se modifică termenul al  $k$ -lea și al  $k + 1$ -lea și suma lor devine

$$k \cdot (a_k - 1) + (k + 1) (a_{k+1} + 1) = ka_k + (k + 1)a_{k+1} + 1$$

adică s-a mărit cu 1. Dacă  $k = n$ , atunci se modifică termenul al  $n$ -lea și primul și suma lor

$$n(a_n - 1) + 1 \cdot (a_1 + 1) = na_n + 1 \cdot a_1 - (n - 1)$$

s-a micșorat cu  $n - 1$ .

Invers, dacă scatiul zboară în sens contrar acelor ceasului, atunci suma  $S$  se micșorează cu 1 sau se mărește cu  $n - 1$ . De aceea, cînd amîndoi scatii zboară pe copacii vecini (unul într-un sens, celălalt în alt sens) suma  $S$  sau nu se modifică, sau se modifică cu  $n$ .

În momentul inițial, pe fiecare copac stătea cîte un singur scatiu, deci:

$$S = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + \dots + n \cdot 1 = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Astfel că după un număr oarecare de zboruri suma va fi egală cu  $\frac{n(n+1)}{2} + pn$ , unde  $p$  este un număr întreg. Dacă scatii s-ar putea strînge pe un singur copac, să zicem al  $q$ -lea, atunci suma  $S$  ar trebui să fie egală cu  $nq$  deci ar trebui să fie satisfăcută egalitatea

$$\frac{n(n+1)}{2} + np = nq, \text{ de unde } n + 1 + 2p = 2q, \text{ adică } n = 2(q - p) - 1.$$

Astfel că, dacă  $n$  este par, de exemplu 44, scatii nu se pot strînge pe un singur copac. Vom demonstra că pentru  $n$  impar acest lucru se poate. (Necesitatea acestei etape a demonstrației poate nu este clară pentru toți. Să facem o analiză mai amănunțită. Ce am demonstrat pînă acum? Numai faptul că dacă scatii reușesc să se strîngă pe un singur copac, numărul lor este în mod obligatoriu impar (aceasta este o condiție necesară). Acum trebuie demonstrat că această condiție este și suficientă, adică dacă numărul lor este impar, atunci ei se pot aduna pe un singur copac.)

Să considerăm situația inițială cînd pe fiecare copac este cîte un scatiu, vom „ordona” unui scatiu să stea pe loc și-l vom numi „nemișcat”. Împărțim ceilalți scatii în perechi, astfel încît într-o pereche să fie doi scatii situați la distanțe egale de cel nemîșcat, de o parte și de alta a lui. Dacă notăm această distanță prin  $r$ ,  $r = 1, 2, \dots, \frac{n-1}{2}$  (adică  $r$  distanțe dintre copaci), atunci după  $r$  zboruri această pereche poate ajunge pe copacul în care este scatiul nemîșcat.

Rezolvarea dată este tipică pentru problemele în care se cere să se stabilească dacă în urma anumitor transformări se poate obține un anumit rezultat. În cazul nostru, transformarea este zborul celor doi scatii, în sensuri contrare și vrem să stabilim dacă în final ei se pot strînge pe un copac. Pentru ca să se demonstreze că se poate, este suficient să se dea un exemplu de cum se realizează acest lucru. Pentru ca să se demonstreze că nu se poate obține rezultatul cerut, adesea este util să se procedeze astfel: se găsește o



anumită mărime care rămâne neschimbată la toate transformările și pentru care valoarea inițială se deosebește de valoarea cerută în situația finală (o astfel de mărime se numește *invariantul transformărilor respective*). În problema noastră această mărime este restul împărțirii sumei  $S$  prin  $n$ .

Este interesant să ne ocupăm și de unele chestiuni mai generale în legătură cu problema. Fie date două așezări a unui număr de  $a$  scatii pe  $n$  copaci. Le vom numi echivalente dacă dintr-una se poate obține cealaltă (prin zborurile indicate în textul problemei). Cum se poate afla dacă aceste așezări sînt sau nu echivalente? (fără a face toate transformările). Încă o chestiune. Este evident că mulțimea tuturor așezărilor posibile a unui număr de  $a$  scatii pe  $n$  copaci se împart în câteva clase de echivalență. Cite clase vor fi?

Să stabilim cîte așezări neechivalente sînt posibile. Vom renumera copacii distincți prin  $0, 1, 2, \dots, n-1$  (este neesențial că am ales această numerotare și nu cea folosită pînă acum  $1, 2, \dots$ ) și vom nota prin  $a_k$  numărul scatiilor pe copacul al  $k$ -lea. Am demonstrat mai sus faptul că restul împărțirii prin  $n$  a sumei  $a_1 + 2a_2 + \dots + (n-1)a_{n-1}$  (notăm acest rest prin  $r$ ) nu se schimbă la zborul scatiilor și de asemenea nu se schimbă numărul total al scatiilor  $a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1} = a$ . Deci, dacă două așezări sînt echivalente, atunci au aceleași valori pentru  $a$  și  $r$ . Să demonstrăm că, reciproc, dacă la două așezări a unui număr de  $a$  scatii pe  $n$  copaci, valoarea lui  $r$  este aceeași, ele sînt echivalente. Anume, vom demonstra că fiecare așezare cu un anumit  $r$  dat poate fi adusă prin zborurile scatiilor la următoarea așezare: toți scatii s-au așezat pe copacul cu numărul  $0$ , afară de unul care s-a așezat pe copacul cu numărul  $r$ .

Aceasta se face ușor. Vom alege pe un scatiu pe care-l vom numi „zburător” și vom aduce pe fiecare dintre ceilalți scatii pe copacul cu numărul  $0$ , punîndu-l în pereche cu „zburătorul” pe care-l deplasăm mereu în sensul necesar. Ultima poziție a „zburătorului” va determina numărul  $r$ .

Astfel, mulțimea tuturor așezărilor posibile ale unui număr de  $a$  scatii pe  $n$  copaci este formată din  $n$  clase de echivalență ( $r = 0, 1, \dots, n-1$ ).

**M 12.** Ce patrulatere pot să fie tăiate de o dreaptă în două patrulatere asemenea între ele?

**Rezolvare.** Vom demonstra că de această proprietate se bucură numai trapezul și paralelogramul.

Să presupunem că patrulaterul  $ABCD$  este tăiat de o dreaptă în două patrulatere asemenea. Este evident că această dreaptă va tăia două laturi opuse ale patrulaterului. Să presupunem că taie laturile  $AD$  în  $K$  și  $BC$  în  $L$  (fig. 34). În continuare vom folosi de mai multe ori această afirmație evidentă: dacă două patrulatere  $EFGH$  și  $PQRS$  sînt asemenea și vîrfurile  $E$  se corespund cu vîrfurile  $P$ , atunci  $\sphericalangle E = \sphericalangle P$ ,  $\sphericalangle G = \sphericalangle R$  și, sau  $\sphericalangle F = \sphericalangle Q$  și  $\sphericalangle H = \sphericalangle S$  sau  $\sphericalangle F = \sphericalangle S$  și  $\sphericalangle Q = \sphericalangle H$ .

Astfel, să presupunem că patrulaterele  $ABLK$  și  $CDKL$  sînt asemenea (ne este util doar faptul că unghiurile corespunzătoare sînt congruente) și să demonstrăm că în patrulaterul  $ABCD$  anumite două laturi vor fi paralele. Unghiul  $\alpha$  al patrulaterului  $ABLK$  ( $\sphericalangle \alpha = \sphericalangle AKL$ ) poate să corespundă la unul dintre unghiurile patrulaterului  $KLCD$ .

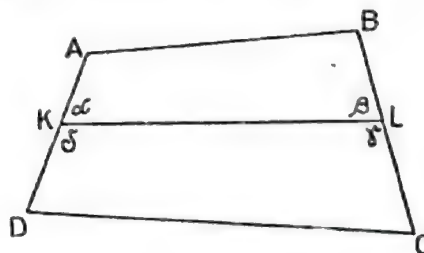


Fig. 34

1)  $\angle \alpha$  corespunde la  $\angle D$ . Atunci  $\angle \alpha = \angle D$ ,  $\angle \gamma = \angle B$ ,  $AB \parallel KL \parallel CD$ .

2)  $\angle \alpha$  corespunde la  $\angle C$ . Atunci  $\angle \alpha = \angle C$ ,  $\angle \delta = \angle B$ ;  $\angle B + \angle C = \angle \alpha + \angle \delta = 180^\circ$ ,  $AB \parallel CD$ ; atunci  $\angle A = \angle \gamma$ ,  $\angle D = \angle \beta$  (cazul  $\angle \beta = \angle \gamma$ ,  $\angle A = \angle D$  nu trebuie considerat separat intrucit rezultă  $\angle \beta + \angle \gamma = 180^\circ$  și  $\angle A = \angle D = \angle \beta = \angle \gamma = 90^\circ$ ).

3)  $\angle \alpha$  corespunde la  $\angle \gamma$ . Atunci  $\angle B = \angle D$ ,  $AD \parallel BC$  și  $AB \parallel DC$  adică  $ABCD$  este paralelogram.

4)  $\angle \alpha$  corespunde la  $\angle \delta$ . Atunci  $\angle \alpha = \angle \delta = 90^\circ$ ,  $\angle B = \angle C$  și fie că  $\angle \beta = \angle \gamma = 90^\circ$ ,  $AD \parallel BC$  (trapez isoscel sau dreptunghi), fie  $\angle \beta = \angle D$ ,  $\angle \gamma = \angle A$ ,  $\angle A + \angle D = 180^\circ$ ,  $AB \parallel CD$  și, abstracție făcând de notații, acest caz coincide cu cazul 2).

Am demonstrat că  $ABCD$  este paralelogram sau trapez. Se vede ușor că, reciproc, orice paralelogram sau trapez se poate împărți în două patrulatere asemenea. Paralelogramul este împărțit de orice dreaptă care trece prin centrul său în două paralelograme congruente (dacă dreapta nu este o diagonală). Trapezul cu bazele  $a < b$ , este împărțit în două trapeze asemenea de o dreaptă paralelă cu bazele și care împarte înălțimea în raportul  $\sqrt{b}/\sqrt{a}$ ; desigur că trebuie să se verifice că laturile corespunzătoare sînt proporționale (fig. 35):  $AK/KD = BL/LC = AB/KL = KL/DC = \sqrt{b}/\sqrt{a}$ . Încercați să vedeți cum se poate împărți un trapez în două patrulatere asemenea, într-un mod mai deosebit, corespunzător cazului 2), așa cum se vede în figura 36, (răspuns: acest lucru se poate face atunci și numai atunci cînd  $\sqrt{a}/\sqrt{b} < \sin \alpha / \sin \beta$ , unde  $\alpha, \beta$  sînt unghiurile de la baza mare  $b$ ).

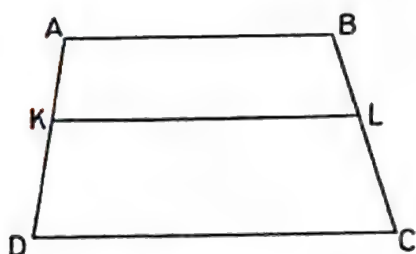


Fig. 35

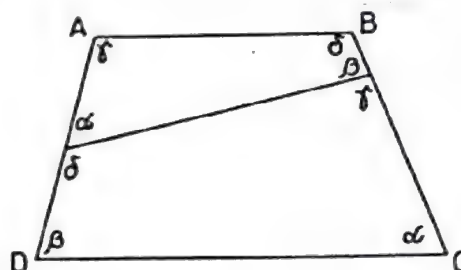


Fig. 36

**M 13.** Să se demonstreze că dacă diferența dintre cel mai mare și cel mai mic dintre cele  $n$  numere reale  $a_1, a_2, \dots, a_n$  este egală cu  $d$ , iar suma modulelor celor  $\frac{n(n-1)}{2}$  diferențe reciproce dintre aceste numere

$$\sum_{i < j} |a_i - a_j|$$

este egală cu  $s$ , atunci

$$(n-1)d \leq s \leq \frac{n^2}{4}d.$$

**Rezolvare.** Să punem punctele  $a_1, a_2, \dots, a_n$  pe axa reală. Atunci  $d$  este distanța dintre punctele extreme, cel mai din stînga și cel mai din dreapta, iar  $s = \sum_{i < j} |a_i - a_j|$  este suma tuturor distanțelor reciproce dintre puncte.



Evident că se poate considera că punctele au fost notate în ordinea crescătoare a absciselor respective  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$  (fig. 37).

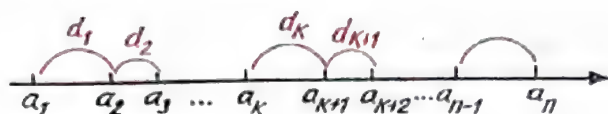


Fig. 37

Vom nota distanța dintre punctele vecine  $a_k$  și  $a_{k+1}$  prin  $d_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n-1$ ). Evident că  $d = d_1 + d_2 + \dots + d_{n-1}$ .

Vom exprima acum pe  $s$  prin mărimile  $d_k$ . Pentru aceasta, vom înlocui în suma  $s$  lungimea fiecărui segment  $[a_i - a_j]$  prin suma acelor distanțe  $d_k$  din care este format. Este evident că  $d_k$  intră în acele segmente în care capătul din stînga este în unul dintre punctele  $a_1, \dots, a_k$ , iar capătul din dreapta în unul dintre punctele  $a_{k+1}, \dots, a_n$ , adică în total  $d_k$  intră în sumă de  $k(n-k)$  ori. De aceea

$$s = \sum_{k=1}^{n-1} k(n-k)d_k.$$

Acum, inegalitatea care trebuie demonstrată rezultă din două inegalități cu totul elementare: pentru orice  $k = 1, 2, \dots, n-1$

$$1) \quad k(n-k) \geq n-1 \Leftrightarrow kn - k^2 - n + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (k-1)(n-k-1) \geq 0;$$

$$2) \quad k(n-k) \leq \frac{n^2}{4} \Leftrightarrow n^2 - 4nk + 4k^2 \geq 0 \Leftrightarrow (n-2k)^2 \geq 0.$$

Folosind aceste evaluări, obținem

$$\sum_{k=1}^{n-1} k(n-k)d_k \geq \sum_{k=1}^{n-1} (n-1)d_k = (n-1)d,$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} k(n-k)d_k \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n^2}{4} d_k = \frac{n^2}{4} d.$$

Este interesant de văzut dacă evaluarea este suficient de bună, adică dacă, de exemplu, nu s-ar putea înlocui, să zicem,  $n-1$  din membrul string cu un număr mai mare? Pentru ca să ne convingem de contrariu este suficient să se dea un exemplu în care inegalitatea se transformă în egalitate (în ambii termeni sînt numere pozitive). Acest exemplu se găsește ușor, dacă ne gândim la demonstrația făcută. Trebuie să așezăm punctele  $a_1, \dots, a_n$  astfel încît toți  $d_k$ , în afară de primul  $d_1$ , să fie nuli, adică să se ia  $a_1 < a_2 = a_3 = \dots = a_n$ . Atunci  $s = (n-1)d_1 = (n-1)d$ .

În ceea ce privește a doua inegalitate  $s \leq \frac{n^2}{4}d$ , atunci cînd  $n$  este par,  $n = 2m$  se poate realiza egalitatea (se iau  $a_1 = a_2 = \dots = a_m < a_{m+1} = \dots = a_{2m}$ ), iar pentru  $n$  impar,  $n = 2m+1$ , se poate întrucitva îmbunătăți: se vede ușor că pentru  $n$  impar, cel mai mare dintre numerele  $k(n-k)$  este egal cu  $\frac{n-1}{2} \cdot \frac{n+1}{2} = \frac{n^2-1}{4}$  (demonstrați acest lucru riguros!) și atunci

se poate demonstra inegalitatea mai tare  $s < \frac{n^2 - 1}{4} d$ . Egalitatea se atinge dacă  $a_1 = \dots = a_m < a_{m+1} = \dots = a_{2m+1}$ .

**M 14.** Un poliedru convex alb este vopsit cu negru pe unele fețe astfel încât două fețe negre nu au o muchie comună (fig. 38). Să se demonstreze că dacă este îndeplinită cel puțin una dintre următoarele condiții:

- a) fețele negre sînt mai multe decît jumătate din numărul fețelor;
  - b) aria fețelor negre este mai mare decît jumătate din aria poliedrului.
- Atunci în acest poliedru nu se poate înscrie o sferă.

**Rezolvare.** Începem cu b). Să presupunem că în poliedru s-a putut înscrie o sferă. Marcăm pe fiecare față punctul de tangență cu sfera și ducem din el segmente la toate virfurile acestei fețe. Atunci fața se împarte în triunghiuri. La fiecare muchie a poliedrului apar două astfel de triunghiuri situate în fețe vecine. Ele sînt triunghiuri congruente (după laturi, folosindu-ne de faptul că două tangente duse din același punct la o sferă sînt congruente). După ipoteză fiecare muchie aparține numai unei fețe negre. Astfel că fiecărui triunghi negru îi corespunde un triunghi alb (dar unui triunghi alb îi poate corespunde tot un triunghi alb, este important doar că la triunghiuri negre diferite corespund triunghiuri albe diferite). Prin urmare, suma ariilor fețelor negre nu este mai mare decît suma ariilor fețelor albe. Punctul b) este rezolvat.

La fel se rezolvă și punctul a). Presupunem că am putut înscrie o sferă într-un poliedru care are unele fețe negre nevecine și numărul acestora — să-l notăm prin  $f_n$  — este mai mare decît numărul fețelor albe, să-l notăm prin  $f_a$ . Considerăm pe fiecare față punctul de tangență cu sfera și-l unim cu virfurile feței (fig. 39). Triunghiurile  $B_1O'B_2$  și  $B_1O''B_2$  sînt congruente (după laturi) ca atare  $\angle B_1O'B_2 = \angle B_1O''B_2$ . Suma unghiurilor din jurul lui  $O'$  este  $2\pi$ . Rezultă că, pe de o parte, suma unghiurilor „la centru” din toate fețele negre, egală cu  $2\pi f_n$ , este mai mare decît suma unghiurilor analoage din fețele albe  $2\pi f_a$  căci  $f_n > f_a$ , iar pe de altă parte, cum unui unghi negru îi corespunde sigur un unghi alb, dar mai există și unghiuri albe care se corespund între ele (căci fețele albe pot să fie vecine), rezultă că  $2\pi f_n < 2\pi f_a$ . Contradicția obținută demonstrează afirmația.

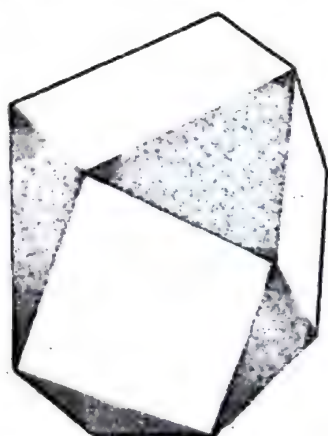


Fig. 38.

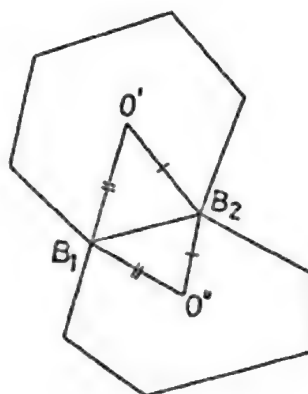


Fig. 39

Deși în problemă este vorba de poliedre care admit sau nu o sferă înscrisă, putem să reformulăm textul pentru poliedre înscrise într-o sferă. Legătura dintre aceste două tipuri de poliedre convexe este un exemplu de ceea ce matematicienii numesc „dualitate”. Dacă avem un poliedru convex înscris într-o sferă, ducem plane tangente la sferă în virfurile acestuia. Planele tangente



în vîrfurile unei aceeași fețe se întîlnesc într-un punct (demonstrații) care este un vîrf al poliedrului circumscris. În acest limbaj „dual” o parte din textul problemei se transformă în Teorema lui Steinitz (1927). Să presupunem că vîrfurile unui poliedru convex sînt albe și negre astfel încît:

I. Două vîrfuri negre nu sînt pe aceeași muchie.

II. Numărul vîrfurilor negre este mai mare decît al vîrfurilor albe.

Atunci poliedrul nu se poate înscrie într-o sferă.

Propunem cititorilor să stabilească poliedrele duale pentru un cub, o prismă regulată cu  $n$  laturi, o piramidă regulată cu  $n$  laturi, un trunchi de piramidă regulată, un dodecaedru înscris într-o sferă.

**M 15.** Un tablou pătrat  $n \times n$  este completat cu numere întregi nenegative astfel încît suma numerelor pe fiecare linie și pe fiecare coloană este egală cu 1. Să se demonstreze că din tablou se pot alege  $n$  numere pozitive, astfel încît oricare două dintre ele nu sînt nici pe aceeași linie nici pe aceeași coloană.

**Rezolvare.** Să observăm la început că, dacă permutăm între ele liniile (sau coloanele) tabloului, acest lucru nu influențează nici asupra ipotezei nici asupra concluziei. Să presupunem că prin permutarea liniilor și coloanelor am format în colțul din dreapta sus de dimensiuni  $m + k$  numai elemente nule (fig. 40). Vom demonstra că  $m + k$  este totdeauna mai mic decît  $n$ . Să calculăm suma numerelor din partea notată în tablou cu  $C$ . E evident că suma numerelor din partea notată cu  $B$  este egală cu  $m$  ( $m$  coloane în fiecare dintre ele suma este egală cu 1). În mod analog suma numerelor din partea notată cu  $A$  este egală cu  $k$  ( $k$  linii). Fiindcă suma totală a tuturor numerelor din tablou este egală cu  $n$ , rezultă că în porțiunea  $C$  suma numerelor valorează  $n - m - k$ . Acest număr este nenegativ, fiindcă din ipoteză toate numerele din tablou sînt nenegative. Astfel  $n - m - k \geq 0$ , adică  $m + k \leq n$  ceea ce trebuia demonstrat.

Acum putem să reformulăm problema astfel: se dă un tablou  $n \times n$  cu numere și se știe că nici o permutare a liniilor sau coloanelor nu poate pune în evidență un colț format numai din zerouri, de dimensiuni  $m \times k$  astfel încît  $m + k > n$ ; să se demonstreze că se pot alege  $n$  numere nenule astfel încît oricare două dintre ele nu sînt situate pe aceeași linie sau pe aceeași coloană (Nu este acum important că numerele sînt pozitive și că suma

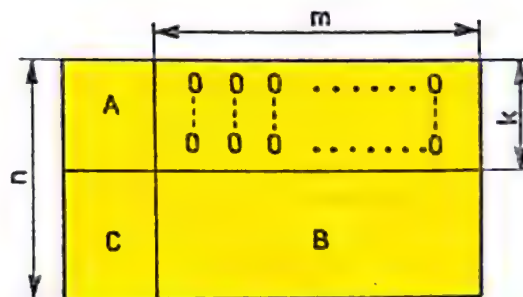


Fig. 40

pe linii sau pe coloane este egală cu 1. Aceste condiții le-am folosit deja.) În continuare vom distinge numai între „nul” și „nenul”. Această reformulare arată că problema se poate reduce în limbajul „tabelelor” la „teorema peților”: Presupunem că  $n$  băieți sînt prieteni cu niște fete. Să presupunem că pentru fiecare grupă formată din  $k$  băieți ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) există cel puțin  $k$  fete care au prieteni printre acești băieți. Atunci fiecare băiat se poate căsători cu o fată pe care o cunoaște. (Acest text glumeț se găsește la sfîrșitul unei serioase cărți de analiză funcțională: K. Morey-Metode în spațiul Hilbert.)

Intr-adevăr, să scriem pe liniile tabloului  $n \times n$ , băieții iar pe coloane fetele (eventual și altele dacă cele de la început nu sînt în număr de  $n$ ). La



intersecția dintre linia  $s$  și coloana  $t$ , vom pune „nenul” (o steluță) dacă băiatul  $s$  se cunoaște cu fata  $t$  și „nul” dacă nu se cunosc. Obținem un tablou (matrice) de cunoștințe.

	Ana	Bela	Coca	Dana	Eva	Fifi
Ghiță	0	*	*	0	*	0
Horia	*	0	0	*	0	0
Ion	0	0	*	0	*	0
Jan	0	0	0	0	*	0
Luca	0	0	0	0	*	0
Mihai	0	0	0	0	*	0

Tabloul cunoștințelor, pentru  $n = 6$

Vom lua o grupă arbitrară formată din  $k$  băieți. Îi vom așeza pe primele linii. Dacă cu o anumită fată nici unul dintre acești băieți nu se cunoaște, în respectiva coloană și în primele  $k$  linii va fi pus 0. Dacă toate coloanele corespunzătoare acestor fete le așezăm pe ultimele locuri (fie numărul lor  $m$ ) atunci vom obține un colț format din 0 de dimensiuni  $m \times k$  (fig. 41). În fiecare dintre primele  $m - n$  coloane este cel puțin cite un „nenul” în primele linii fiindcă respectiva fată are prieteni printre cei  $k$  băieți aleși. Fiindcă  $m + k \leq n$ , atunci  $n - m \geq k$ , adică numărul acestor fete nu e mai mic decât  $k$ . Vedem astfel că problema noastră coincide cu „teorema pețitorilor”. Alegerea celor  $n$  soții pentru cei  $n$  tineri este chiar alegerea celor  $n$  numere nenule situate în linii și coloane diferite.

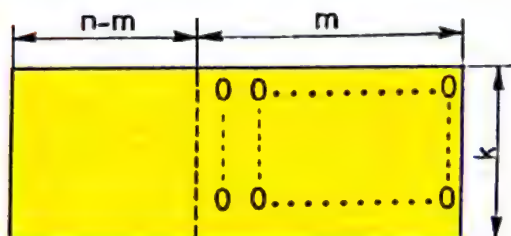


Fig. 41

Demonstrația se poate face prin inducție. Pentru  $n = 1$  teorema este evidentă. Să presupunem că ea este adevărată pentru orice număr de băieți mai mic decât  $n$ . Vom demonstra că este adevărată și pentru  $n$ . Pot să fie doar două cazuri:

**Cazul 1.** Pentru un anumit  $k$  ( $1 \leq k < n$ ) se găsește o grupă formată din  $k$  băieți care se cunosc (toți împreună) exact cu  $k$  fete.

Vom nota mulțimea acestor băieți prin  $B_k$  și mulțimea prietenelor lor prin  $F_k$ . Pentru grupa  $B_k$  este îndeplinită presupunerea de inducție. Ei își vor lua soții din mulțimea  $F_k$  (în care sînt exact  $k$  fete). Vom elimina din raționament pe acești băieți și pe aceste fete și vom demonstra prin reducere la absurd că pentru ceilalți  $n - k$  băieți este îndeplinită cerința teoremei. Vom alege din acești  $n - k$  băieți o grupă formată din  $r$  tineri. Să presupunem că numărul prietenelor lor este  $s$ , mai mic decât  $r$ . Ne reîntoarcem înapoi și reunim această grupă de  $r$  băieți cu grupa  $B_k$ . În noua grupă vor fi  $r + k$  băieți. Fiindcă în mulțimea  $F_k$  sînt toate prietenele celor din  $B_k$  (și poate că sînt și unele prietene ale celor  $r$  băieți din grupa aleasă) rezultă că acești  $k + r$  băieți la început au  $k + s$  prietene. Din condiție rezultă  $k + r \leq k + s$  deci  $r \leq s$ . Obținem o contradicție cu presupunerea  $s < r$ . Deci în acest caz teorema este adevărată.



**Cazul 2.** Orice grupă formată din  $k$  băieți ( $1 \leq k < n$ ) are cel puțin  $k + 1$  prietene.

În acest caz este mai simplu. Luăm orice băiat și îl însurăm cu o prietenă a sa. Excludem această pereche din raționamente. Vom demonstra că pentru ceilalți  $n - 1$  băieți este îndeplinită cerința teoremei. Vom lua orice grupă formată din  $k$  băieți ( $k \leq n - 1$ ). La început ei aveau cel puțin  $k + 1$  prietene. Chiar dacă soția celui pe care l-am însurat este dintre acestea tot mai rămân  $k$  fete. Astfel teorema este complet demonstrată.  
(Reluați cu atenție raționamentul acestei demonstrații.)

**M 16.** Să se demonstreze că un polinom  $p(x)$  cu coeficienți întregi care pentru trei valori întregi diferite ale lui  $x$  ia valoarea 1, nu poate să aibă nici o rădăcină întreagă.

**Rezolvare.** Observăm că pentru orice polinom  $p(x)$  cu coeficienți întregi și pentru orice două numere întregi  $a$  și  $b$ , diferența  $p(b) - p(a)$  se divide prin  $b - a$ , întrucât pentru orice număr natural  $m$ , diferența  $b^m - a^m$  se divide prin  $b - a$ :

$$b^m - a^m = (b - a)(b^{m-1} + b^{m-2}a + b^{m-3}a^2 + \dots + ba^{m-2} + a^{m-1}).$$

Dacă există patru numere întregi  $c_1, c_2, c_3$  și  $a$  astfel încît  $p(c_1) = p(c_2) = p(c_3) = 1$  și  $p(a) = 0$ , atunci

$$p(c_1) - p(a) = p(c_2) - p(a) = p(c_3) - p(a) = 1$$

și de aceea fiecare dintre numerele  $c_1 - a, c_2 - a, c_3 - a$  poate fi doar 1 sau  $-1$ , deci toate aceste numere nu pot fi diferite.

Începutul rezolvării poate fi prezentat și altfel. Fie  $a$  o rădăcină întreagă a polinomului  $p(x)$ . Atunci putem scrie  $p(x) = (x - a)q(x)$ . Înlocuim în această egalitate numerele  $c_1, c_2, c_3$  care dau valoarea 1 pentru polinom și obținem  $1 = (c_1 - a)q(c_1) = (c_2 - a)q(c_2) = (c_3 - a)q(c_3)$  și în continuare la fel ca mai sus.

**M 17.** Un țăran, ajungînd la bifurcația a două drumuri cu un unghi de  $60^\circ$ , a întrebant: „Cum pot să ajung în satul NN?” I s-a răspuns: „Te duci pe drumul din stînga pînă în satul N care se găsește la 8 km de aici, acolo vezi că se face un drum la dreapta în unghi drept care duce la satul NN. Dar poți să iei și o altă cale: mergi acum pe drumul din dreapta; cum ajungi la calea ferată ai parcurs jumătate din drum; acolo te întorci spre stînga și mergi pe traverse pînă ajungi la NN” — „Dar care drum este mai scurt? — „Tot una e, nu-i nici o diferență” și țăranul a plecat pe drumul din dreapta.

Cîți kilometri are de parcurs pînă în NN? Mai mult de 10 sau mai puțin? Dar dacă se duce la NN direct peste cîmp? (Drumurile se consideră în linie dreaptă.)

**Rezolvare.** Fie  $A$  bifurcația drumurilor,  $B$  satul N,  $C$  satul NN,  $D$  punctul în care drumul din dreapta iese la calea ferată. Din ipoteze (distanțele sînt măsurate în km)  $AB = 8$ ,  $\angle A = 60^\circ$ ,  $AD = DC$ ,  $\angle B = 90^\circ$ ,  $AB + BC = 2AD$ . Fie  $AD = 2x$ ,  $DH \perp AB$  și  $DK \perp BC$  (fig. 42). Atunci  $AH = x$ .  $KD = BH = 8 - x$ ,  $AB + BC = 2AD = 4x$ ,  $BC = 4x - 8$ ,  $BK = DH = x\sqrt{3}$ ,  $KC = |BC - BK| = |4x - 8 - x\sqrt{3}|$  și pentru îndeplinirea tuturor condițiilor problemei este necesar și suficient să fie îndeplinită egalitatea  $CK^2 + KD^2 = AD^2$  sau  $(4x - 8 - x\sqrt{3})^2 + (8 - x)^2 = 4x^2$ , unde  $8 - x > 0$  și  $4x - 8 > 0$  adică  $2 < x < 8$ . După transformări vom obține

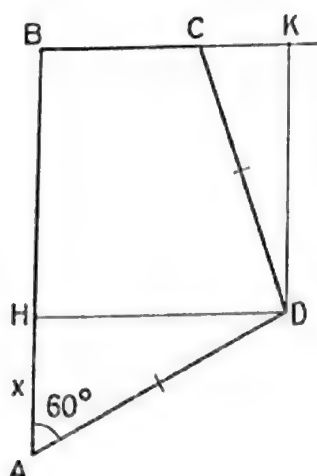


Fig. 42

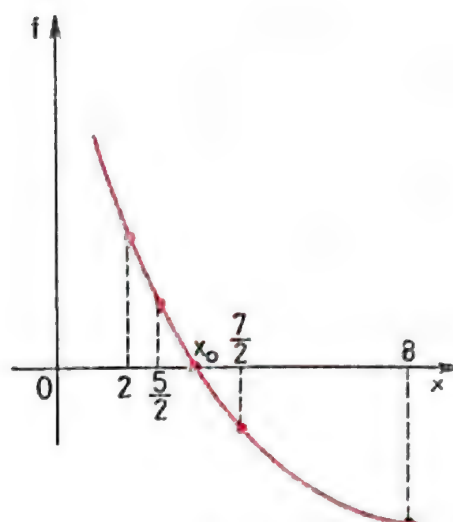


Fig. 43

$(2 - \sqrt{3})x^2 - 2(5 - \sqrt{3})x + 16 = 0$ . Vom nota trinomul din membrul stâng prin  $f(x)$ . Se verifică ușor că condiția  $0 < x < 8$  este satisfăcută numai de rădăcina cea mai mică  $x_0$  a ecuației  $f(x) = 0$  (fig. 43). Ea poate fi scrisă astfel:

$$x_0 = \frac{5 - \sqrt{3} - \sqrt{6\sqrt{3} - 4}}{2 - \sqrt{3}} = 7 + 3\sqrt{3} - \sqrt{44 + 26\sqrt{3}}.$$

Țăranul trebuie să parcurgă un drum de  $4x_0$ . Ca să vedem dacă acesta este mai mare sau mai mic decât 10 folosim direct ecuația. Întrucît  $f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{4}(14 - 5\sqrt{3}) > 0$ , e clar că  $x_0 > \frac{5}{2}$ , adică  $4x_0 > 10$ .

Vom arăta că distanța  $AC$  peste cîmp este mai mică decît 10. Într-adevăr, inegalitatea  $\sqrt{8^2 + (4x_0 - 8)^2} < 10$ , pentru  $2 < x_0 < 8$  este echivalentă cu următoarea:  $(4x_0 - 8)^2 < 36$ ,  $4x_0 - 8 < 6$ ,  $x_0 < \frac{7}{2}$ . Ca și mai înainte  $f\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{1}{4}(22 - 21\sqrt{3}) < 0$ , de unde  $x_0 < \frac{7}{2}$  și prin urmare  $AC < 10$ . (Rezolvare asemănătoare ne-au trimis M. Pregher, M. Mihailov ș.a.)

S. Berkolaiko a găsit o demonstrație scurtă pentru faptul că  $AB + BC > 10$ . Din teorema cosinusului aplicată triunghiului  $ABD$  rezultă

$$BD^2 = 4x_0^2 + 64 - 16x_0;$$

pe de altă parte, inegalitatea triunghiului dă

$$BD < BC + CD = 6x_0 - 8$$

de unde

$$4x^2 + 64 - 16x < (6x - 8)^2, \quad 2x^2 - 5x > 0$$

și dacă ținem cont de  $2 < x_0 < 8$ , obținem  $x_0 > \frac{5}{2}$ . Un calcul exact al distanței  $AB + BC$  dă 11,044 ... km.



M 18. a) Să se demonstreze că pentru orice punct  $M$  de pe un cerc circumscris unui triunghi echilateral  $ABC$  unul dintre cele trei segmente  $MA$ ,  $MB$ ,  $MC$  este egal cu suma celorlalte două.

b) Se dau trei cercuri congruente  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  două câte două tangente între ele și în jurul lor un cerc  $\gamma$  tangent la toate cele trei. Să se demonstreze că pentru orice punct  $M$  al cercului  $\gamma$  una dintre tangentele duse din acest punct la unul dintre cercurile  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  este congruentă cu suma celorlalte două tangente duse din acest punct la celelalte două cercuri.

**Rezolvare.** a). Fie punctul  $M$  pe arcul  $AB$  al cercului circumscris. Rotim triunghiul  $AMB$  în jurul punctului  $A$  cu  $60^\circ$ , astfel încât să ocupe poziția  $AKC$  (fig. 44). Întrucât unghiurile  $MBA$  și  $MCA$  sînt congruente (subîntînd același arc) punctul  $K$  va fi situat pe segmentul  $MC$ . Întrucît  $AM = AK$  și  $\angle MAK = 60^\circ$  (din construcție), triunghiul  $AMK$  este echilateral, de aceea  $MK = AM$ . Astfel

$$MA + MB = MK + KC = MC.$$

O altă rezolvare se obține direct din teorema lui Ptolomeu conform căreia în orice patrulater inscriptibil produsul diagonalelor este egal cu suma produselor laturilor opuse; dacă în egalitatea  $MC \cdot AB = MA \cdot BC + MB \cdot AC$  înlocuim pe  $BC$  și  $AC$  prin  $AB$ , vom obține  $MC \cdot AB = (MA + MB) \cdot AB$ , de unde  $MC = MA + MB$ .

b) Vom demonstra un lucru mai general. Să presupunem că centrele celor trei cercuri de rază  $r$  sînt vîrfurile triunghiului echilateral  $C_1C_2C_3$  și  $O$  este centrul cercului circumscris acestuia, de rază  $a$ . Atunci pentru orice punct  $M$  al cercului de rază  $R = a + r$  cu centrul în  $O$ , tangenta dusă din punctul  $M$  la unul dintre cele trei cercuri de rază  $r$  este egală cu suma tangențelor duse din punctul  $M$  la celelalte două cercuri. Pentru  $r = 0$  obținem cerința punctului a).

Să presupunem că raza  $OM$  face cu razele  $OC_k$  ( $k = 0, 1, 2$ ) unghiurile  $\alpha_k = \alpha_0 + k \cdot 120^\circ$  (fig. 45). Atunci  $MC_k^2 = R^2 + a^2 - 2Ra \cdot \cos \alpha_k$ , iar pătratul tangentei duse din punctul  $M$  la cercul respectiv este egal cu  $MC_k^2 - r^2 = R^2 + a^2 - 2Ra \cos \alpha_k - (R - a)^2 = 2Ra(1 - \cos \alpha_k)$ . De aceea tangentele sînt egale cu  $2 \sqrt{Ra} \sin \frac{\alpha_k}{2}$ ,  $\left( \sin \frac{\alpha_k}{2} \geq 0 \text{ întrucît } 0 \leq \alpha_k < 2\pi \right)$ .

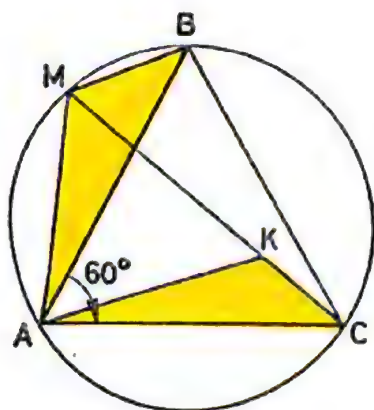


Fig. 44

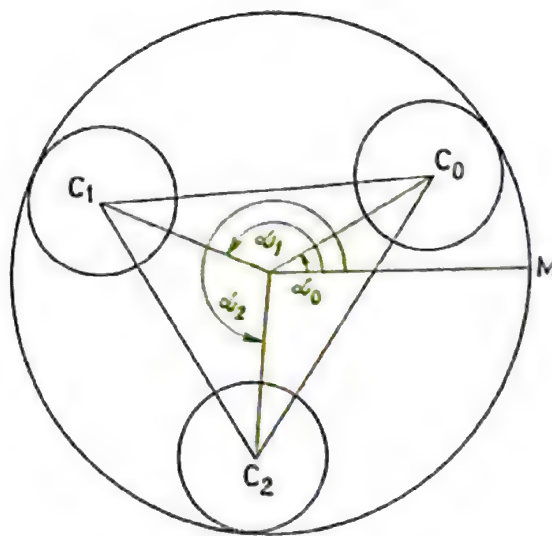


Fig. 45

A rămas de verificat egalitatea  $\sin \frac{\alpha_0}{2} + \sin \frac{\alpha_2}{2} = \sin \frac{\alpha_1}{2}$ . Acest lucru este simplu:  $\sin \frac{\alpha_0}{2} + \sin \frac{\alpha_2}{2} = 2 \cos 60^\circ \cdot \sin \frac{\alpha_0 + \alpha_2}{4} = \sin \frac{\alpha_1}{2}$ . Se poate da o generalizare a punctului a): fie  $M$  un punct pe arcul  $A_1 A_{2n+1}$  al unui cerc circumscris unui poligon regulat cu  $2n+1$  laturi,  $A_1 A_2 A_3 \dots A_{2n} A_{2n+1}$ ; atunci

$$MA_1 + MA_2 + \dots + MA_{2n+1} = MA_2 + MA_3 + \dots + MA_{2n}$$

(rezolvarea constă în aplicarea teoremei lui Ptolomeu la patrulaterale

$$MA_1 A_2 A_3, MA_2 A_3 A_4, \dots, MA_{2n-1} A_{2n} A_{2n+1}, MA_{2n+1} A_{2n} A_1, MA_{2n+1} A_2 A_1$$

și toți termenii care conțin pe  $MA_{2k}$  se strâng în membrul stâng iar, termenii  $MA_{2k+1}$  în membrul drept). Gândiți-vă cum se demonstrează această afirmație și generalizarea analoagă a punctului b), cu ajutorul funcțiilor trigonometrice.

**M 19.** Într-un lanț infinit de celule sensibile fiecare celulă se poate găsi în două stări „liniștită” și „excitată”. Dacă la un anumit moment o celulă a fost excitată, atunci ea emite un semnal care după un timp scurt (să zicem după o milisecundă) ajunge la fiecare dintre cele două celule vecine cu ea. Fiecare celulă este excitată atunci și numai atunci când la ea ajunge un semnal de la una dintre celulele vecine; dacă semnalele ajung deodată din amândouă părțile, atunci ele se anulează și celula nu se excită. De exemplu, dacă în momentul inițial  $t = 0$  se excită trei celule vecine, atunci excitația se transmite așa cum este arătat în figura 46.

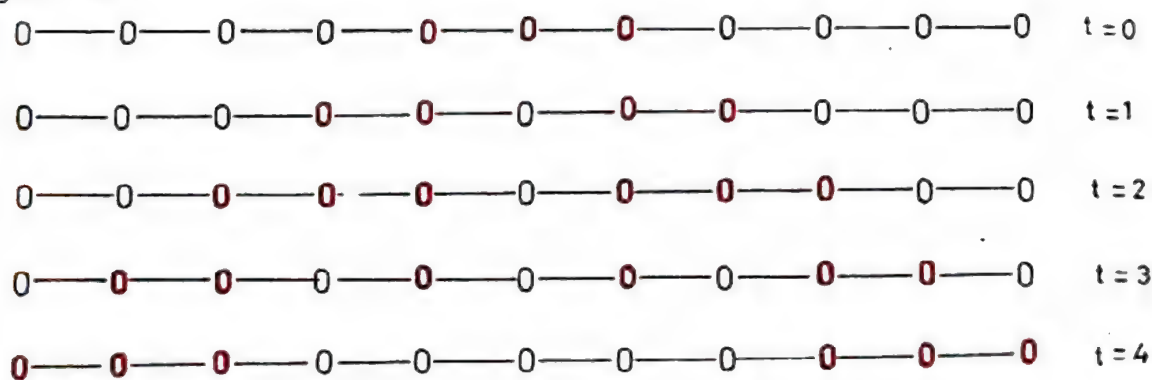


Fig. 46

Să presupunem că în momentul inițial este excitată numai una dintre celule. Câte celule se vor găsi în stare excitată după 15 msec? după 65 msec? după 1000 msec? în general după  $t$  msec?

Ce se întâmplă în cazul în care lanțul nu este infinit ci conține în total  $N$  celule unite în cerc (fig. 47) — se va menține excitația oricât de mult sau se va liniști?

N. Vasiliev

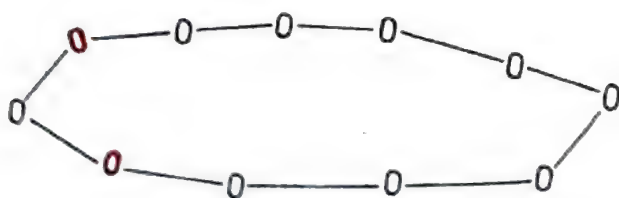


Fig. 47



A rămas de verificat egalitatea  $\sin \frac{\alpha_0}{2} + \sin \frac{\alpha_2}{2} = \sin \frac{\alpha_1}{2}$ . Acest lucru este simplu:  $\sin \frac{\alpha_0}{2} + \sin \frac{\alpha_2}{2} = 2 \cos 60^\circ \cdot \sin \frac{\alpha_0 + \alpha_2}{4} = \sin \frac{\alpha_1}{2}$ . Se poate da o generalizare a punctului a): fie  $M$  un punct pe arcul  $A_1 A_{2n+1}$  al unui cerc circumscris unui poligon regulat cu  $2n + 1$  laturi,  $A_1 A_2 A_3 \dots A_{2n} A_{2n+1}$ ; atunci

$$MA_1 + MA_2 + \dots + MA_{2n+1} = MA_2 + MA_3 + \dots + MA_{2n}$$

(rezolvarea constă în aplicarea teoremei lui Ptolomeu la patrulaterele

$$MA_1 A_2 A_3, MA_2 A_3 A_4, \dots, MA_{2n-1} A_{2n} A_{2n+1}, MA_{2n+1} A_{2n} A_1, MA_{2n+1} A_2 A_1$$

și toți termenii care conțin pe  $MA_{2k}$  se string în membrul stâng iar, termenii  $MA_{2k+1}$  în membrul drept). Gîndiți-vă cum se demonstrează această afirmație și generalizarea analoagă a punctului b), cu ajutorul funcțiilor trigonometrice.

**M 19.** Într-un lanț infinit de celule sensibile fiecare celulă se poate găsi în două stări „liniștită” și „excitată”. Dacă la un anumit moment o celulă a fost excitată, atunci ea emite un semnal care după un timp scurt (să zicem după o milisecundă) ajunge la fiecare dintre cele două celule vecine cu ea. Fiecare celulă este excitată atunci și numai atunci cînd la ea ajunge un semnal de la una dintre celulele vecine; dacă semnalele ajung deodată din amîndouă părțile, atunci ele se anulează și celula nu se excită. De exemplu, dacă în momentul inițial  $t = 0$  se excită trei celule vecine, atunci excitația se transmite așa cum este arătat în figura 46.

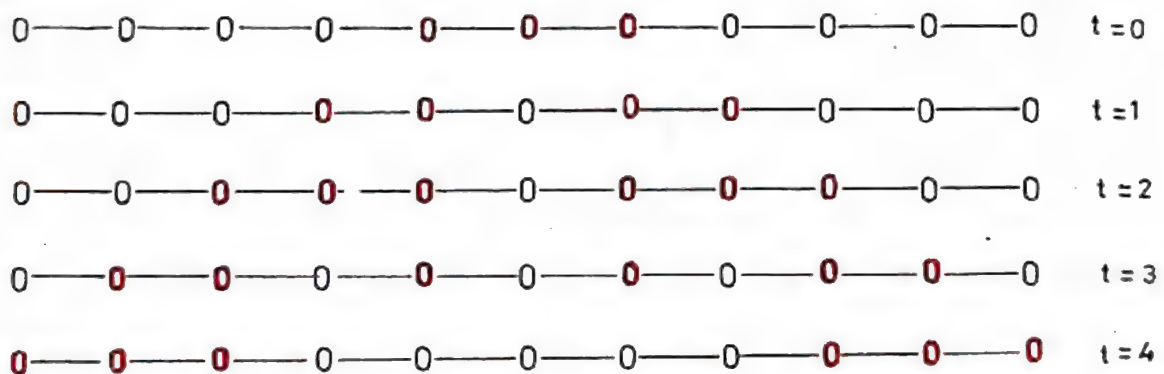


Fig. 46

Să presupunem că în momentul inițial este excitată numai una dintre celule. Cîte celule se vor găsi în stare excitată după 15 msec? după 65 msec? după 1000 msec? în general după  $t$  msec?

Ce se întîmplă în cazul în care lanțul nu este infinit ci conține în total  $N$  celule unite în cerc (fig. 47) — se va menține excitația oricît de mult sau se va liniști?

N. Vasiliev

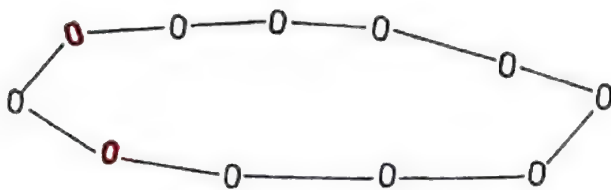


Fig. 47

**Rezolvare.** Este suficient să urmărim cum se propagă excitația de la o singură celulă în primii 10–15 timpi (fig. 48) pentru ca să observăm următoarele reguli:

1. La momentul  $t = 2^k$  unde  $k = 0, 1, 2, \dots$  sunt excitate numai două celule:  $x = -2^k$  și  $x = 2^k$ .

2. La momentul  $t = 2^k - 1$  sunt excitate  $2^k$  celule de la  $x = -2^k + 1$  până la  $x = 2^k - 1$  cu  $x$  impar.

3. Fie  $0 \leq t < 2^k$ . Atunci la momentul  $2^k + t$  sunt excitate exact de două ori mai multe celule decât în momentul  $t$ .

Pentru demonstrația acestor reguli (prin inducție după  $k$ ) se poate folosi faptul că „unde de excitație“, generate de fiecare dintre cele două celule active în momentul  $2^k$ , nu se acoperă pînă în momentul  $t = 2^{k+1} - 1$  și de aceea fiecare dintre ele este construită la fel ca și unda de excitație de la o singură celulă pentru  $t < 2^k$ .

Acum se răspunde ușor la întrebările puse în problemă. După 15 msec așa cum se vede din figură, vor fi 16 celule excitate. După  $64 = 2^6$  vor fi două, deci după 65 msec vor fi patru. Pentru un  $t$  oarecare se poate calcula  $f(t)$  — numărul celulelor excitate la momentul  $t$  — aplicînd de mai multe ori proprietatea 3. De fiecare dată din  $t$  se scade cea mai mare putere posibilă a lui 2 apoi  $f(t)$  se micșorează de două ori. De exemplu

$$\begin{aligned}
 1000 - 2^9 &= 1000 - 512 = 488 & f(1000) &= \\
 488 - 2^8 &= 488 - 256 = 232 & &= 2f(488) = \\
 232 - 2^7 &= 232 - 128 = 104 & &= 4f(232) = \\
 104 - 2^6 &= 104 - 64 = 40 & &= 8f(104) = \\
 40 - 2^5 &= 40 - 32 = 8 & &= 16f(40) = \\
 8 - 2^3 &= 8 - 8 = 0 & &= 32f(8) = 64
 \end{aligned}$$

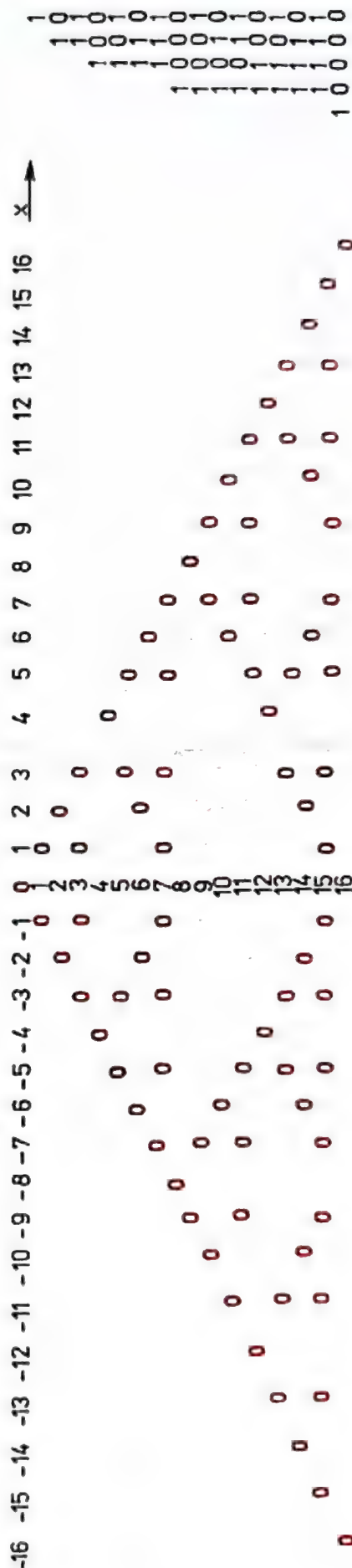


Fig. 48



Se poate formula răspunsul ușor în cazul general dacă se folosește sistemul binar de numerație. Într-adevăr, a scădea dintr-un număr puterea cea mai mare a lui 2, înseamnă că în sistemul binar se elimină prima cifră a numărului. Astfel pentru orice  $t$ ,  $f(t)$  este egal cu  $2^m$  unde  $m$  este numărul cifrelor 1 în scrierea lui  $t$  în sistemul binar. Această regulă se demonstrează prin inducție, iar pentru primele valori ale lui  $t$  se poate verifica în tabelul din figura 48.

Răspunsul la a doua întrebare a problemei, ce se întâmplă dacă celulele sînt aranjate în cerc? — depinde evident nu numai de  $N$  dar în general și de „situația inițială” — care celule sînt excitate la momentul inițial. În această problemă există o regulă generală simplă care permite ca pentru fiecare poziție inițială să se spună dacă ajung vreodată toate celulele în stare liniștită. Încercați să o găsiți singuri.

**M 20.** Se poate împărți un triunghi echilateral într-un milion de poligoane convexe astfel încît orice dreaptă să nu intersecteze mai mult de 40 dintre aceste poligoane? (dreapta intersectează poligonul dacă are cu el cel puțin un punct comun).

A XXXI-a Olimpiadă de matematică din Moscova

**Răspuns.** Se poate.

**Rezolvare.** În figura 49 este reprezentat un dodecagon convex care este tăiat de diagonale în 5 părți: un octogon și patru triunghiuri. Orice dreaptă intersectează cel mult două din aceste triunghiuri. Într-adevăr, o dreaptă care intersectează un triunghi trebuie să intersecteze cel puțin una dintre laturile sale comune cu a dodecagonului; pe de altă parte, o dreaptă nu poate intersecta mai mult de două laturi nevecine ale unui poligon convex. Analog, dacă  $A_1A_2 \dots A_{3n}$  este un poligon convex cu  $3n$  laturi, atunci orice dreaptă intersectează nu mai mult de două dintre triunghiurile  $A_1A_2A_3$ ,  $A_4A_5A_6$ ,  $A_7A_8A_9$ , ...,  $A_{3n-2}A_{3n-1}A_{3n}$ .

Acum vom arăta cum se poate împărți în modul cerut triunghiul (fig. 50). Vom duce drepte care vor decupa trei triunghiuri de rangul întâi, astfel încît să rămînă un hexagon regulat. La fiecare vîrf al acestuia decupăm un triunghi de rangul al doilea, astfel încît să rămînă un dodecagon regulat. La fiecare vîrf al acestuia decupăm cîte un triunghi de rangul al treilea astfel încît să rămînă un poligon regulat cu 24 laturi și așa mai departe de 19 ori. După tăierea la vîrfurile poligonului cu  $3 \cdot 2^{k-1}$  laturi a  $3 \cdot 2^{k-1}$  triunghiuri de rangul  $k$  rămîne un poligon regulat cu  $3 \cdot 2^k$  laturi ( $k = 1, 2, \dots, 19$ ).

Orice dreaptă intersectează nu mai mult de două triunghiuri de fiecare rang și eventual încă poligonul cu  $3 \cdot 2^{19}$  laturi adică în total nu mai mult

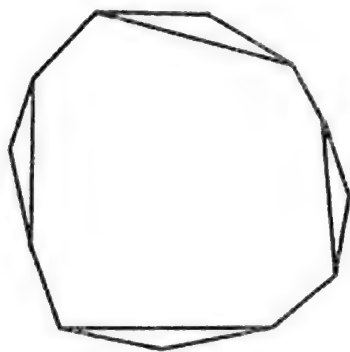


Fig. 49

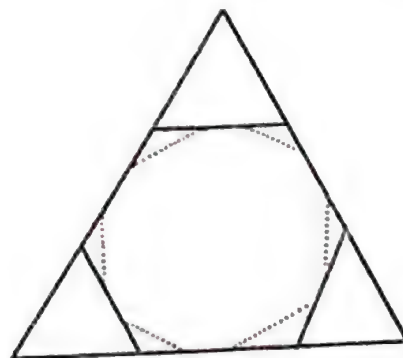


Fig. 50

de  $1 + 2 \cdot 19 = 39$  poligoane. Numărul total de poligoane în care este împărțit triunghiul este egal cu  $1 + 3 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + \dots + 3 \cdot 2^{19} = 1 + 3(2^{19} - 1) \cdot 2^{20} = (2^{10})^2 1000^2$ .

**M 21.** În interiorul unui pătrat de latură 1 sînt situate cîteva cercuri, suma lungimilor lor este egală cu 10. Să se demonstreze că se poate găsi o dreaptă care să intersecteze cel puțin patru dintre aceste cercuri.

Din problemele date la Școala serală de matematică de pe lingă Universitatea din Moscova

Alegem o latură oarecare a pătratului, fie  $AB$ , și proiectăm pe ea toate cercurile. Să presupunem că nu se poate duce dreapta cerută. Atunci fiecare punct de pe latura  $AB$  este acoperit de cel mult trei proiecții de cercuri (vezi figura 51) altfel dreapta care ar trece prin acest punct perpendiculară pe  $AB$  ar intersecta mai mult de trei cercuri. Prin urmare, suma tuturor proiecțiilor, adică suma lungimilor diametrelor cercurilor nu depășește pe 3; de aceea suma lungimilor cercurilor nu depășește  $3\pi$ , dar după ipoteză ea este egală cu  $10 > 3\pi$ . Contradicția obținută demonstrează afirmația problemei.

În mod analog se poate demonstra următoarea afirmație mai generală. Vom numi diametrul unei figuri convexe, lățimea celei mai înguste benzi în care această figură poate fi situată. (Se poate arăta că această definiție este bună pentru orice figură mărginită.) Atunci, dacă în interiorul unei figuri cu diametru  $h$  se află  $n$  figuri suma diametrelor cărora este mai mare decît  $kh$ , atunci se găsește o dreaptă care va intersecta cel puțin  $k + 1$  dintre aceste figuri.

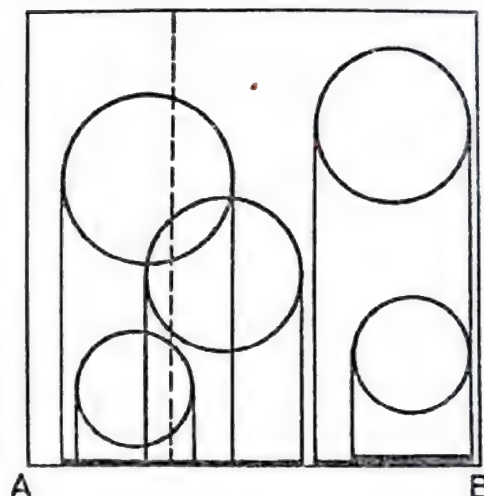


Fig. 51

**M 22. a)** Într-un unghi sînt înscrise două cercuri; ele au tangenta comună interioară  $T_1T_2$  ( $T_1$  și  $T_2$  sînt punctele de tangență) care intersectează laturile unghiului în punctele  $A_1$  și  $A_2$ . Să se demonstreze că  $A_1T_1 = A_2T_2$  (sau, echivalent  $A_1T_2 = A_2T_1$ ).

**b)** Într-un unghi sînt înscrise două cercuri, unul dintre ele este tangent la laturile unghiului în punctele  $K_1$  și  $K_2$ , iar celălalt în punctele  $L_1$  și  $L_2$ . Să se arate că dreapta  $K_1L_2$  determină în aceste cercuri coarde egale.

a) Se poate considera că punctele  $T_1$  și  $T_2$  sînt situate pe dreapta  $A_1A_2$  în ordinea următoare:  $A_1, T_1, T_2, A_2$  (vezi figura 52). Atunci, întrucît cele două tangente duse din același punct la cerc sînt egale, avem

$$A_1T_1 = A_1K_1, A_1T_2 = A_1L_1, A_2T_2 = A_2L_2, A_2T_1 = A_2K_2, K_2L_2 = K_1L_1$$

de unde

$$A_1T_1 + A_1T_2 = A_2T_1 + A_2T_2, 2A_1T_1 + T_1T_2 = 2A_2T_2 + T_1T_2, A_1T_1 = A_2T_2.$$

b) Fie  $P$  punctul de intersecție a lui  $K_1L_2$  cu cercul tangent la laturile unghiului în punctele  $K_1$  și  $K_2$ ,  $Q$  punctul de intersecție a lui  $K_1L_2$  cu al doilea cerc (figura 53). Ne folosim de puterea punctului față de cerc:

$$L_1K_1^2 = K_1Q \cdot K_1L_2, \quad L_2K_2^2 = L_2P \cdot L_2K_1.$$



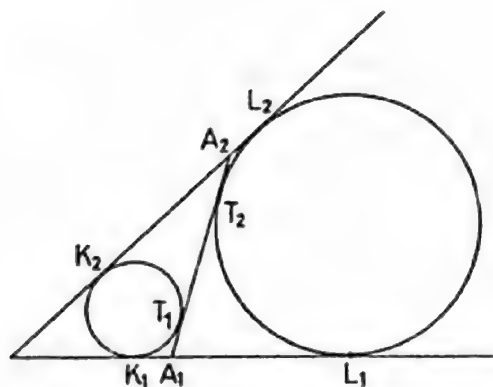


Fig. 52

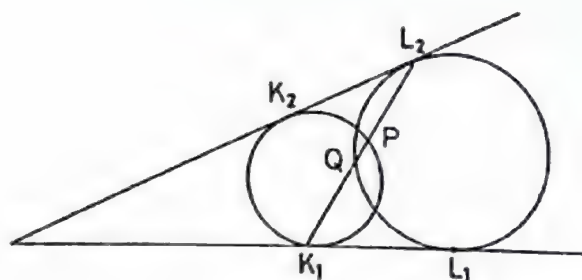


Fig. 53

Întrucit  $L_1K_1 = L_2K_2$ , vom obține  $K_1Q \cdot K_1L_2 = L_2P \cdot L_2K_1$ , de unde  $K_1Q = L_2P$ .

Adăugind la ambele părți ale acestei egalități  $PQ$  (sau, în funcție de ordinea punctelor  $P$  și  $Q$  pe segmentul  $K_1L_2$  scăzând  $PQ$  din ambele părți ale egalității) vom obține ceea ce s-a cerut  $K_1P = L_2Q$ .

Apropiat de această rezolvare au trimis A. Virovlianski din Gorki și D. Grigoriev.

M 23. Să se demonstreze că pentru orice număr natural  $n > 1$ .

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n}} < \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots 2n} < \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n}}.$$

A.O. Ghelfond

La început vom expune cea mai scurtă rezolvare propusă de remarcabilul matematician sovietic, specialistul în teoria numerelor A.O. Ghelfond.

Vom transcrie pătratul expresiei date astfel

$$P_n^2 = \frac{1^2}{2^2} \cdot \frac{3^2}{4^2} \cdot \frac{5^2}{6^2} \dots \frac{(2n-1)^2}{(2n)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3^2}{2 \cdot 4} \cdot \frac{5^2}{4 \cdot 6} \dots \frac{(2n-1)^2}{(2n-2) \cdot 2n} \cdot \frac{1}{2n}.$$

Întrucit pentru orice întreg  $k > 1$  avem

$$\frac{(2k-1)^2}{(2k-2) \cdot 2k} = \frac{(2k-1)^2}{(2k-1)^2 - 1} > 1,$$

atunci

$$P_n^2 > \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2n} \text{ și } P_n > \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n}}.$$

Pe de altă parte fiindcă totdeauna

$$\frac{(2k-1)(2k+1)}{(2k)^2} = \frac{(2k)^2 - 1}{(2k)^2} < 1,$$

atunci

$$P_n^2 = \frac{3}{2^2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4^2} \cdot \frac{5 \cdot 7}{6^2} \dots \frac{(2n-1)(2n-3)}{(2n-2)^2} \cdot \frac{2n-1}{(2n)^2} < \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2n}$$

și

$$P_n < \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n}}$$

O rezolvare instructivă diferită aparține lui D. Grigoriev (această rezolvare au trimis-o și alți cititori ai revistei). Să considerăm împreună cu expresia dată

$$P_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \dots \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \frac{2n-1}{2n}$$

și următoarea

$$Q_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \dots \frac{2n-4}{2n-3} \cdot \frac{2n-2}{2n-1}$$

Intrucât fiecare dintre factorii produsului  $Q_n$  nu este mai mare decât factorul corespunzător al produsului  $P_n$ , rezultă  $P_n > Q_n$  și prin urmare  $P_n^2 > P_n Q_n = 1/4n$  adică  $P_n > \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n}}$ .

Pe de altă parte

$$R_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \dots \frac{2n-2}{2n-1} \cdot 1 > P_n$$

de aceea  $P_n^2 < P_n R_n = 3/8n$  și  $P_n < \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n}}$ .

S-ar părea că pentru  $R_n$  este mai natural să nu se înceapă cu  $1/2$  ci cu  $2/3$ . Atunci se obține pentru  $P_n$  o evaluare mai grosolană decât cea cerută de problemă. Invers, dacă se păstrează în  $R_n$  nu un singur factor ci mai mulți factori egali cu primul factor din  $P_n$  atunci pentru  $P_n$  se obține o evaluare mai bună de forma  $P_n < c/\sqrt{n}$  unde  $c$  este un număr mai mic decât  $\sqrt{3/8}$ . Aceeași observație, relativ și la cealaltă evaluare.

Există de asemenea o soluție bazată pe metoda inducției matematice. Chiar pe exemplul acestui exercițiu în nota lui E.G. Nicolaev „Un caz cu metoda inducției matematice” (vezi Kvant nr. 7, 1970, pag. 37 și Kvant nr. 12, 1970, pag. 58) s-a arătat că uneori este mai simplu să se demonstreze prin inducție o inegalitate mai strictă decât una mai slabă.

Din inegalitățile demonstrate rezultă că mărimea  $P_n$ , odată cu creșterea lui  $n$ , tinde către zero iar mărimea  $P_n \sqrt{n}$  este cuprinsă între  $1/2$  și  $(1/2) \cdot \sqrt{3/2}$ . Se poate demonstra (vezi de exemplu problemele 145, 160, 161 din cartea lui A.M. Iaglom și I.M. Iaglom „Probleme neelementare rezolvate elementar”) că pentru  $n \rightarrow \infty$ ,  $P_n$  tinde către limita  $\sqrt{1/\pi}$ .

**M. 24.** Să se arate că orice fracție  $\frac{m}{n}$  unde  $0 < \frac{m}{n} < 1$  poate fi scrisă sub formă

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3} + \dots + \frac{1}{q_r}$$

unde  $0 < q_1 < q_2 < \dots < q_r$  sînt numere întregi și fiecare  $q_k$  ( $k = 2, 3 \dots r$ ) se divide la  $q_{k-1}$ .

**Rezolvare.** Fiecare fracție  $\frac{m}{n}$  poate fi înlocuită printr-o fracție echivalentă ireductibilă simplificînd-o prin c.m.m.d.c. al numărătorului și al



numitorului. De exemplu  $\frac{288}{504} = \frac{4 \cdot 72}{7 \cdot 72} = \frac{4}{7}$ . În continuare vom considera numai astfel de fracții ireductibile.

Vom demonstra afirmația problemei prin inducție după  $m$ . Pentru  $m = 1$  ea este evidentă: însăși fracția  $m/n$  are aspectul cerut. A cum vom demonstra că dacă afirmația problemei este adevărată pentru toate fracțiile cu numărători mai mici decât  $m$ , ea va fi adevărată și pentru fracțiile cu numărători egali cu  $m$ . Fie  $m/n$  o astfel de fracție ( $1 < m < n$ ). Efectuând împărțirea cu rest  $n$  la  $m$  vom, obține citul ( $d_0 - 1$ ) și restul ( $m - k$ ), adică

$$n = m(d_0 - 1) + (m - k) = md_0 - 1 \quad (1)$$

unde  $d_0 > 1$  și  $0 < k < m$ . Vom retranscrie pe (1) astfel:  $md_0 = n + k$  sau

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{d_0} \left( 1 + \frac{k}{n} \right). \quad (2)$$

Intrucât  $0 < k < m$ , fracția  $k/n$  poate fi scrisă în forma cerută:

$$\frac{k}{n} = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_1 d_2} + \dots + \frac{1}{d_1 d_2 \dots d_r}. \quad (3)$$

unde  $d_1, d_2, \dots, d_r$  sînt unele numere naturale mai mari decît 1. Din (2) și (3) obținem

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{d_0} + \frac{1}{d_0 d_1} + \frac{1}{d_0 d_1 d_2} + \dots + \frac{1}{d_0 d_1 d_2 \dots d_r}$$

și fracția  $m/n$  a fost adusă la forma cerută.

Remarcăm că din rezolvarea problemei rezultă un algoritm simplu, regula după care o fracție dată se pune sub forma sumei (3). Să îl prezentăm pe un exemplu. Fie dată fracția  $5/7$ :

$$\begin{aligned} 7 &= 2 \cdot 5 - 3 & \frac{5}{7} &= \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{3}{7} \right) \\ 7 &= 3 \cdot 3 - 2 & \frac{3}{7} &= \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{2}{7} \right) \\ 7 &= 4 \cdot 2 - 1 & \frac{2}{7} &= \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{1}{7} \right). \end{aligned}$$

Astfel

$$\frac{5}{7} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 7} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{168}.$$

Desigur se pot găsi mai multe reprezentări ale unei fracții sub forma (3), de exemplu

$$\frac{3}{8} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{1}{3} + \frac{1}{24}.$$

**M. 25.** Într-o mulțime formată din  $n$  elemente s-au ales  $2^{n-1}$  submulțimi astfel încît oricare trei dintre ele au un element comun. Să se arate că toate aceste submulțimi au un element comun.

A XXX-a Olimpiadă de matematică din Moscova

În total mulțimea  $A$  formată din  $n$  elemente admite  $2^n$  submulțimi diferite considerând și mulțimea vidă și însăși mulțimea  $A$ . Vom nota submulțimile diferite ale lui  $A$  prin literele  $B, C \dots$  intersecția mulțimilor  $B$  și  $C$  prin  $B \cap C$  și complementara mulțimii  $B$  față de  $A$  prin  $\bar{B}$ .

Prin ipoteză s-au ales  $2^{n-1}$  submulțimi adică jumătate din toate cele posibile și fiecare dintre submulțimile alese este astfel încât intersecția oricăror două (și chiar trei) nu este vidă. Prin urmare, din fiecare pereche de submulțimi  $(B, \bar{B})$  complementare, a fost aleasă exact una. Mai departe, dacă  $B$  și  $C$  au fost alese atunci  $D = B \cap C$  a fost de asemenea aleasă, întrucât  $\bar{D}$  nu poate să fie aleasă (toate trei submulțimile  $\bar{D}, B$  și  $C$  nu pot să aibă elemente comune căci elementele comune ale lui  $B$  și  $C$  sînt cuprinse în  $D$ ). Folosind aceasta, printr-o inducție evidentă se poate demonstra că, dacă  $B_1, B_2 \dots B_k$  sînt alese, atunci intersecția tuturor submulțimilor  $B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_k$  este de asemenea aleasă. Prin urmare intersecția tuturor  $2^{n-1}$  submulțimilor alese este de asemenea aleasă, deci ea nu este vidă.

Astfel am demonstrat că ipoteza problemei este satisfăcută numai de următorul sistem de submulțimi: se fixează un element oarecare al mulțimii  $A$  și se aleg toate submulțimile care conțin acest element.

N.B. Vasiliev

**M. 26.** *Să presupunem că în fiecare număr al revistei noastre la rubrica probleme se vor publica cîte cinci probleme de matematică. Vom nota prin  $f(x, y)$  numărul primei probleme a numărului  $x$  al revistei din anul  $y$ , (de exemplu,  $f(6, 1970) = 26$ ). Să se scrie o formulă generală pentru  $f(x, y)$  pentru toți  $x, y$  ( $1 \leq x \leq 12, y \geq 1970$ ). Să se rezolve ecuația  $f(x, y) = y$ .*

Funcția  $f$  satisface următoarele condiții:

- 1)  $f(1, 1970) = 1$ ,
- 2)  $f(x + 1, y) = f(x, y) + 5, (1 \leq x \leq 12)$ ,  
— pentru fiecare lună  $f(x, y)$  se mărește cu 5;
- 3)  $f(1, y + 1) = f(1, y) + 60$ ,  
— pentru fiecare an  $f(x, y)$  se mărește cu 60.

Este clar că cu aceste condiții funcția este unic determinată; ea poate fi dată de exemplu de formula următoare

$$f(x, y) = 5x + 60(y - 1970) - 4.$$

Este ușor de verificat că  $f(5, 2003) = 2001$ ;  $f(6, 2003) = 2006$ . De aceea ecuația  $f(x, y) = y$  nu are soluție.

Din cele spuse mai sus reiese că dacă am fi introdus și funcția  $f(k, x, y)$  — numărul  $k$  al problemei din al  $x$ -lea număr al revistei din anul  $y$  ( $1 \leq k \leq 5, 1 \leq x \leq 12, y \geq 1970$ ), atunci ecuația  $f(k, x, y) = y$  ar avea soluția unică  $k = 3, x = 5, y = 2003$ , cu alte cuvinte dacă sistemul nostru ar rămîne pînă atunci neschimbat (pînă acum în fiecare număr au fost cinci probleme de matematică) a treia problemă a revistei Kvant nr. 5 din anul 2003 va avea numărul M 2003. Formula generală pentru  $f(k, x, y)$  este:

$$f(k, x, y) = k + 5x + 60(y - 1970) - 5.$$

Pentru cititori este desigur mai utilă formula dată de o funcție inversă care ar permite ca după numărul  $n$  al problemei să se găsească anul  $y$  și numărul  $x$  al revistei în care s-a propus această problemă.



Pentru aceasta este util să folosim notația  $[a]$  — partea întreagă a numărului  $a$  (cel mai mare număr întreg care nu-l depășește pe  $a$ ) și  $\{a\} = a - [a]$  — partea fracționară a lui  $a$ . Verificați că

$$x = \left[ 12 \left\{ \frac{n-1}{60} \right\} \right] + 1, \quad y = \left[ \frac{n-1}{60} \right] + 1970.$$

M. 27. Să se arate că dacă  $\frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} = 0$ , atunci

$$\frac{a}{(b-c)^2} + \frac{b}{(c-a)^2} + \frac{c}{(a-b)^2} = 0.$$

Această afirmație rezultă din următoarea identitate:

$$\left( \frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} \right) \left( \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} + \frac{1}{a-b} \right) = \frac{a}{(b-c)^2} + \frac{b}{(c-a)^2} + \frac{c}{(a-b)^2}.$$

Pentru justificarea ei este suficient să înmulțim termen cu termen cele două sume din partea stângă și să ținem cont că suma următoarelor trei fracții:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b-c} \left( \frac{1}{c-a} + \frac{1}{a-b} \right) &= \frac{ca - ab}{(a-b)(b-c)(c-a)} \cdot \frac{b}{c-a} \left( \frac{1}{b-c} + \frac{1}{a-b} \right) = \\ &= \frac{ab - bc}{(a-b)(b-c)(c-a)} \cdot \frac{c}{a-b} \left( \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} \right) = \frac{bc - ca}{(a-b)(b-c)(c-a)} \end{aligned}$$

este nulă.

După citirea unei astfel de rezolvări artificiale poate să apară pe deplin îndreptățită întrebarea: cum se ghicește că expresia dată trebuie înmulțită exact cu  $\frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} + \frac{1}{a-b}$ ? Nu se poate imagina un mod general de raționament care să permită să se rezolve probleme asemănătoare?

Mai natural s-ar fi rezolvat această problemă astfel. Să scriem expresiile date sub forma unui cît de două polinoame:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a} + \frac{c}{a-b} &= \frac{p(a, b, c)}{(a-b)(b-c)(c-a)}, \quad \frac{a}{(b-c)^2} + \frac{b}{(b-c)^2} + \frac{b}{(c-a)^2} = \\ &= \frac{q(a, b, c)}{(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2} \end{aligned}$$

( $p$  va fi un polinom de gradul al treilea iar  $q$  de gradul al cincilea). Va trebui să demonstrăm că dacă  $p(a, b, c) = 0$ , atunci și  $q(a, b, c) = 0$ . Este natural să încercăm să demonstrăm că polinomul  $q$  se împarte la polinomul  $p$ , adică există un polinom  $r = r(a, b, c)$ , astfel încît  $q = pr$  (se poate demonstra o teoremă generală pentru polinoame de oricîte variabile: dacă  $q$  este egal cu zero pentru toate acele valori ale variabilelor pentru care  $p$  este egal cu zero și dacă  $p$  este ireductibil, adică nu se descompune în factori — și în cazul nostru chiar așa este — atunci  $q$  se divide la  $p$ ). Polinoamele se pot împărți în mod obișnuit, considerîndu-le polinoame de o singură variabilă  $a$  (în coeficienții cărora intră literele  $b$  și  $c$ ), de exemplu  $p$  se va scrie astfel:

$$p(a, b, c) = -a^3 + p_1(b, c)a^2 + p_2(b, c)a + p_3(b, c).$$

Ca rezultat am obține desigur că  $q = pr$  unde

$$\begin{aligned} r(a, b, c) &= (a-b)(b-c)(c-a) \left( \frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} \right) = \\ &= -a^2 + ab + ac + bc - b^2 - c^2. \end{aligned}$$

În acest exemplu, realizarea acestui plan de rezolvare este legat de mari dificultăți de calcul (în polinomul  $q(a, b, c)$  chiar după efectuarea reducerilor termenilor asemenea rămân 21 de termeni!) dar sfătuim insistent pe cititori să se gîndească la toate amănuntele acestui plan de rezolvare general aplicabil în multe alte probleme.

N.B. Vasiliev

**M. 28.** a) Din 19 bile 2 sînt radioactive. Din orice mulțime de bile, după o verificare se poate ști dacă în ea se află cel puțin o bilă radioactivă (dar nu se poate ști cîte astfel de bile sînt în mulțime). Să se arate că după 8 verificări se pot depista ambele bile radioactive.

b) Din 11 bile 2 sînt radioactive. Să se arate că cu mai puțin de 7 verificări nu se pot depista ambele bile radioactive.

### A XXX-a Olimpiadă de matematică din Moscova

Începem cu o problemă analoagă dar-mai simplă. Fie date  $n$  bile dintre care una este radioactivă; după cîte verificări poate fi depistată? Este ușor de indicat modalitatea ca prin  $k$  verificări să se depisteze una din  $n = 2^k$  bile: la început împărțim toate bilele în două grămezi egale cu cîte  $2^{k-1}$  bile în fiecare, verificăm una dintre ele și astfel determinăm în care dintre ele se găsește bila radioactivă, apoi această grămadă formată din  $2^{k-1}$  bile din nou o împărțim în două jumătăți, verificăm una dintre jumătăți ș.a.m.d. — la fiecare astfel de verificare numărul bilelor se înjumătățește și după  $k$  verificări vom găsi bila radioactivă. E clar că dacă  $n < 2^k$ , atunci de asemenea sînt suficiente  $k$  verificări. Astfel, pentru depistarea unei singure bile radioactive din  $n$  este suficient să se facă  $f_1(n)$  verificări, unde  $f_1(n)$  este cel mai mic număr întreg  $k$  pentru care  $n \leq 2^k$  (cu alte cuvinte  $f_1(n)$  este cel mai mic număr întreg, mai mare sau egal cu  $\log_2 n$ ). Mai jos vom vedea că un număr mai mic de verificări este insuficient.

Acum să trecem direct la rezolvarea problemei noastre. Aici nu vom reuși să obținem un rezultat exact deodată pentru orice  $n$  și vom lămuri la început după cîte verificări se pot depista 2 bile radioactive din  $n$ , dacă  $n$  este un număr mic.

Pentru  $n = 3$  sînt suficiente două verificări; după ce vom verifica succesiv două bile e clar dacă a treia bilă va fi radioactivă sau nu. Se poate desigur întîmpla ca deja prima bilă verificată să nu fie radioactivă și atunci verificările ulterioare nu mai sînt necesare dar pe noi ne interesează după ce număr de verificări se pot depista bilele radioactive, cu siguranță, pentru orice variantă, chiar nefavorabilă nouă, de aranjare a lor.

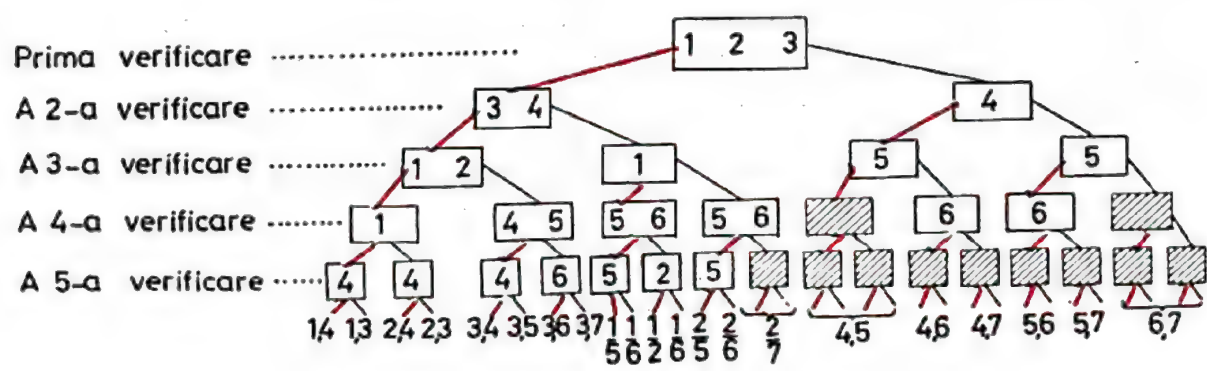


Fig. 54



În această schemă (fig. 54), sînt reprezentate modalitățile care permit ca din 5 verificări să se depisteze 2 bile radioactive din 7. Considerăm că bilele sînt numerotate cu cifrele 1, 2, ..., 7. și în fiecare căsuță înscrîm mulțimea de bile supusă verificării (cîteodată mulțimea constă dintr-o singură bilă). De exemplu, prima dată se verifică mulțimea formată din bilele {1, 2, 3}. La fiecare verificare sînt posibile două rezultate: „este radioactivitate”, atunci se trece pe săgeata roșie (din stînga), și „nu este radioactivitate”, atunci se trece pe săgeata neagră (din dreapta). Dacă se hașurează căsuța înseamnă că verificări ulterioare nu mai sînt necesare. Pentru fiecare drum care merge după săgeți de sus în jos, ca rezultat al tuturor verificărilor făcute pe acest drum se poate stabili care anume pereche de bile este radioactivă (ea este indicată sub cea mai de jos săgeată). Convingeți-vă! Exact la fel, verificînd succesiv bilele se pot depista două bile din 4 cu 3 verificări, din 5 după 4, din 6 după 5, din 7 după 6 ș.a.m.d. De altfel, pentru  $n = 7$  se pot găsi și 5 verificări. Înainte de a citi rezolvarea mai departe încercați să demonstrați aceasta, adică să găsiți modul respectiv de căutare a bilelor radioactive. Un astfel de mod (există mai multe) este indicat în figură.

Această figură ne ajută să înțelegem cuvintele „modalitate de căutare a bilelor”. Pentru a da un mod oarecare trebuie să se indice gruparea de bile care se verifică prima și de asemenea să se indice ce grupare se verifică după fiecare dintre rezultatele posibile ale verificării de radioactivitate efectuate; cu alte cuvinte, trebuie să se schițeze o diagramă formată din căsuțe și săgeți la fel ca cea din figură, numai dacă e nevoie, cu alt număr  $k$  de verificări și să se înscrie în fiecare căsuță un anumit număr de bile.

Să încercăm acum să răspundem la două chestiuni strîns legate între ele: cum se găsește o modalitate de căutare a două bile din  $n$ , din  $k$  verificări, dacă astfel de verificare există; dacă nu există cum se poate demonstra acest lucru?

În principiu, pentru orice  $n$  și  $k$  stabiliți, aceste chestiuni se pot rezolva prin „parcursere completă”: se încearcă succesiv toate modurile posibile de a completa căsuțele diagramei corespunzătoare la  $k$  verificări, ale submulțimilor formate din cele  $n$  bile (există doar un număr finit de astfel de moduri!) și pentru fiecare dintre aceste moduri se verifică dacă permite sau nu să depisteze bilele radioactive (aici pot să fie diferite situații, pentru o anumită pereche de bile radioactive să corespundă mai multe drumuri de săgeți de sus în jos). Dar numărul acestor moduri, chiar și pentru  $n$  și  $k$  nu prea mari este atît de mare, încît practic nu se poate face „parcurserea completă” fie chiar cu ajutorul calculatoarelor (de exemplu, pentru  $n = 11$  și  $k = 7$  se pot completa căsuțele diagramei cu mulțimi de bile în mai mult de  $10^{400}$  moduri diferite!). Vom demonstra acum cum se poate prescurta mult această parcursere.

Să ne întoarcem din nou la figura 54. De la cel mai de jos rînd de căsuțe, corespunzător ultimei verificări, cea de-a cincea, pleacă  $2^5 = 32$  săgeți. În cazul general, pentru  $k$  verificări, vor fi  $2^k$  săgeți. Dacă modul de căutare înscris pe diagramă garantează distingerea bilelor radioactive, atunci fiecare dintre aceste săgeți corespunde numai la una dintre variantele posibile de răspuns: care anume două bile sînt radioactive (dar se poate ca diferite săgeți să corespundă la una și aceeași variantă). De aceea, numărul diferitelor variante posibile de răspuns nu va fi mai mare decît numărul săgeților, adică nu mai mare decît  $2^k$ .

Să formulăm această considerație fundamentală astfel:

Dacă numărul variantelor posibile este mai mare decât  $2^k$ , atunci nu există un mod care să permită ca din  $k$  verificări să separăm una dintre aceste variante.

La fel se poate spune astfel:

Dacă există un mod care să permită ca după  $k$  verificări să se aleagă o variantă din  $N$  posibile, atunci  $N \leq 2^k$ .

(Ultima inegalitate poate fi scrisă și astfel:  $k \geq f_1(N)$ ).

Desigur, aceasta este o regulă aplicabilă la orice problemă unde se cere să se aleagă o variantă din  $N$  după rezultatele citorva verificări; ce este aici important este că fiecare verificare are două rezultate posibile (în problema noastră aceste rezultate sînt: „este radioactivitate” și „nu este radioactivitate”). În particular, din această regulă rezultă că nu se poate depista o bilă radioactivă din  $n$  cu mai puțin decât  $f_1(n)$  verificări: dacă  $f_1(n) = k$ , atunci  $2^{k-1} < n$ , și există  $n$  variante diferite în această problemă (este radioactivă prima bilă, este radioactivă a 2-a bilă, .., este radioactivă a  $n$ -a bilă).

Să ne întoarcem din nou la problema în care sînt două bile radioactive. Cîte variante posibile sînt aici? În figura 54 în care am ales 2 bile din 7, numărul variantelor este egal cu 21. În cazul general există  $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$

variante de alegere a 2 bile din  $n$ . Din regula noastră de bază menționată mai sus rezultă că dacă e posibil ca după  $k$  verificări să se aleagă 2 bile din  $n$ , atunci  $\frac{n(n-1)}{2} \leq 2^k$ . Vom conveni să notăm cel mai mic număr de veri-

ficări necesar pentru alegerea a 2 bile din  $n$  prin  $f_2(n)$ . Atunci ultima inegalitate poate fi scrisă astfel:

$$f_2(n) \geq f_1\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)$$

$n$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
$\frac{n(n-1)}{2}$	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105	120	136	153	171	190	210	231	253	276	300
$f_1(n)$	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5	5	5	5
$f_1\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)$	2	3	4	4	5	5	6	6	6	7	7	7	7	7	8	8	8	8	8	8	8	9	9
$f_2(n)$	2	3	4	5	5	6	6	6	7	7	7	7	7	8	8	8	8	8	8	8	8	9	9

Din tabel se vede că pentru unii  $n$  (de exemplu, pentru  $n = 6$ ,  $n = 8$ ) este posibilă și o inegalitate strictă. Într-adevăr pentru ca după  $k$  verificări să se poată găsi 2 bile radioactive din  $n$ , trebuie îndeplinită inegalitatea  $\frac{n(n-1)}{2} \leq 2^k$

ca o cerință minimă. Mai trebuie în plus ca acele variante pentru care prima verificare ar da rezultatul „+” (este radioactivitate) să nu fie mai multe decât  $2^{k-1}$  și acele pentru care ar da rezultatul „-” (nu este radioactivitate) de asemenea să nu fie mai multe decât  $2^{k-1}$ , căci altfel, după regula de bază, nu am putea după  $a(k-1)$  — a verificare să alegem din aceste variante una! La fel, fiecărei dintre rezultatele „++” (prima verificare „+”, a 2-a verificare „+”), „+-” „-+”, „--” nu trebuie să-i corespundă mai multe decât  $2^{k-2}$  variante ș.a.m.d.



Cerința a) a problemei constă în  $f_2(19) \leq 8$  iar b) este echivalentă cu  $f_2(11) \geq 7$ . Mai jos vom demonstra foarte pe scurt că  $f_2(6) \geq 5$ ;  $f_2(8) \geq 6$ ;  $f_2(11) \geq 7$ ;  $f_2(10) \leq 6$ ;  $f_2(15) \leq 7$ ;  $f_2(21) \leq 8$ . Cititorii care doresc să se convingă că toate numerele din rîndul de jos al tabelului sînt corecte, trebuie să mai demonstreze în plus că  $f_2(16) \geq 8$ ;  $f_2(22) \leq 8$ ;  $f_2(23) \geq 9$ ;  $f_2(25) \leq 9$  (într-adevăr, este clar că funcția  $f_2$  este nedescrescătoare, adică dacă  $m \geq n$ , atunci  $f_2(m) \geq f_2(n)$ , de aceea este suficient să se indice corect acele valori ale lui  $n$  pentru care  $f_2(n+1)$  este strict mai mare decît  $f_2(n)$ ).

Înainte de a demonstra inegalitățile menționate, să observăm că determinarea valorii exacte a lui  $f_2(n)$  pentru orice  $n$  în această problemă, ca și în multe asemănătoare nu este prea interesantă. Aceasta pentru că modul corespunzător de depistare a bilelor, evident este prea complicat. Pe de altă parte este ușor să se indice algoritmi foarte simpli de depistare a bilelor care să necesite numai cu puțin mai multe decît  $f_2(n)$  verificări. De exemplu, dacă la început se alege o bilă radioactivă, apoi se extrage și din cele rămase o alegem pe a doua, pentru aceasta ne trebuie nu mai mult decît  $f_1(n) + f_1(n-1)$  verificări și cum nu e greu de demonstrat că diferența  $f_1(n) + f_1(n-1) - f_1(C_n^2)$  este totdeauna nu mai mare decît 2 rezultă că diferența  $f_1(n) + f_1(n-1) - f_2(n)$  de asemenea nu este mai mare decît 2. În probleme practice asemănătoare acesteia, dacă numărul verificărilor  $k$  nu este prea mic, o verificare sau două în plus nu joacă un rol prea mare dacă mijlocul de verificare este mai simplu (pentru  $n = 15$  o schemă ca cea din figura 54 nu ar încăpea pe o pagină și urmărirea descrierii procedurii de verificare nu ar fi fost ușoară).

Din 4 verificări nu se pot alege 2 bile din 6.

Se verifică întîi căsuța făcută din  $6-q$  bile, unde  $q = 2, 3, 4$  sau 5. Atunci rezultatului „—” îi corespund  $C_q^2$  variante (ambele bile radioactive printre celelalte  $q$ ) rezultatului „+” îi corespund  $C_6^2 - C_q^2$  variante. Unul dintre aceste numere este mai mare decît  $2^3 = 8$ .

Din 5 verificări nu se pot alege 2 bile din 8.

Dacă

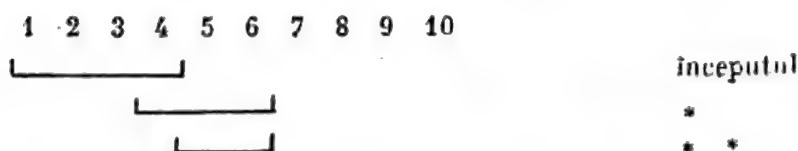
$$C_q^2 < 2^4 = 16 \quad \text{și} \quad C_8^2 - C_q^2 < 16,$$

atunci  $q$  poate să fie egal numai cu 6. Dacă rezultatul este „—” atunci ar rămîne să se aleagă 2 bile din 6, ceea ce nu e posibil din 4 verificări.

Din 6 verificări nu se pot alege 2 bile din 11.

Dacă  $C_q^2 < 2^5 = 32$  și  $C_{11}^2 - C_q^2 < 32$ , atunci  $q = 8$ , dar  $f_2(8) \geq 6$ .

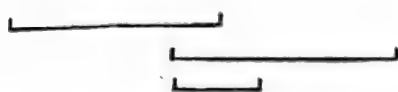
Din 6 verificări se pot alege 2 bile din 10.



Prima verificare la căsuța formată din 4 bile (1—4). Dacă dă „—”, atunci rămîne ca din 5 verificări să stabilim 2 bile din 6, (5—10), dacă dă „+”, verificăm căsuța (4—6). Dacă obținem „+—” putem ca din 4 verificări să obținem 2 bile din 7 (1—3, 7—10), știind că din (1—3) obținem „+” dacă obținem „++”, verificăm (5—6). Dacă obținem „+++” rămîne ca din 3 verificări să găsim o bilă din (1—3, 7—10) iar dacă obținem „+++” găsim 1 bilă din (5—6) după o verificare și 1 bilă din (1—4) după 2 verificări.

După 7 verificări se pot alege 2 bile din 15

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15



Începutul

\*  
\* \*

Prima verificare (1—5). „+” verificăm (5—9). „+ —” după 5 verificări 2 bile din 10 (1—4, 10—15) dintre care (1—4) dau „+” (vezi 10 bile, „+”). „++” verificăm (5), „+++” după 4 verificări 1 din (1—4, 6—15), „++—” după 2 verificări 1 din (1—4) și după 2 verificări 1 din (6—9).

După 8 verificări se pot alege 2 bile din 21.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21

Începutul

\*  
\* \*  
\* \* —  
\* \* — \*

Prima verificare (1—6). În afară de verificările indicate pe desen și evidente mai indicăm „+—” după 6 verificări 2 din 15 (1—5, 12—21) dintre care (1—5) dau „+” (vezi 15 bile „+”), „++—” după 2 verificări 1 din (1—4) și după 2 verificări 1 din (8—11).

A.N. Vilenkin

**M.29.** *n* monede identice sînt așezate pe o masă formînd un lanț închis (vezi figura 55)). Cîte învîrtituri trebuie să facă o monedă de aceeași dimensiune dacă ea se rostogolește pe partea exterioară a întregului lanț, așa cum se vede pe figură? Cum se modifică rezultatul dacă moneda *M* va avea o rază de *k* ori raza monedelor din lanț?

Vom lua raza monedelor din care este făcut lanțul ca unitate. Din figura 56 se vede că în timp ce moneda de rază *k* se rostogolește pe arcul  $\alpha$  al unui cerc fix de rază 1, ea se rotește cu unghiul  $\alpha(1 + 1/k)$ ; în acest desen razele

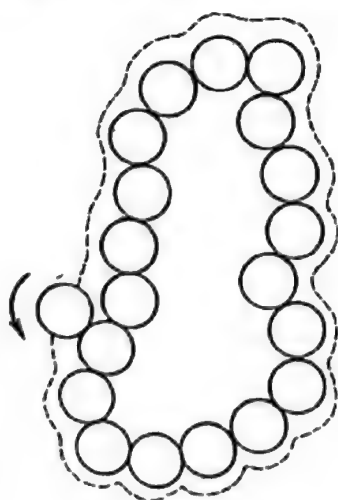


Fig. 55

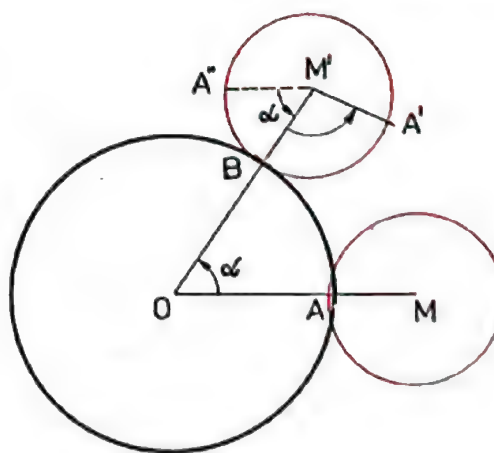


Fig. 56



$MA$  și  $M'A'$  sint paralele,  $\angle A'M'B = \angle AOB = \alpha$  și întrucît arcele  $\widehat{A'B}$  și  $\widehat{AB}$  sint egale ca lungime,  $\angle BMA' = \alpha/k$ , prin urmare întregul unghi  $\angle A'MA'$  cu care s-ar roti moneda  $M$  este egal cu  $\alpha + \alpha/k$  (în particular pentru  $k = 1$  pentru acest unghi este egal cu  $2\alpha$ ).

Acum vom găsi suma arcelor determinate de acele puncte ale monedelor fixe, pe care moneda  $M$  le atinge prin rostogolirea pe lanț. Fie  $O_1, O_2, \dots, O_n$  centrele monedelor lanțului. Suma arcelor situate în interiorul poligonului  $O_1O_2 \dots O_n$ , este egală cu suma unghiurilor sale interioare, adică  $(n-2)\pi$ . Suma arcelor situate în afara poligonului, prin urmare va fi egală cu  $2n\pi - (n-2)\pi = (n+2)\pi$ . Din ea mai trebuie scăzută încă suma arcelor situate în adînciturile dintre două monede vecine, în care  $M$  nu pătrunde. În fiecare dintre aceste  $n$  adîncituri suma a două astfel de arce este egală cu  $2\pi/3$  pentru  $k = 1$  (figura 57, a) și  $2 \arccos \frac{1}{k+1}$  în cazul general (figura 57, b). Astfel suma arcelor pe care se rostogolește moneda  $M$  este egală cu  $(n+2)\pi - 2n\pi/3$  (în cazul general  $(n+2)\pi - 2n \arccos \frac{1}{k+1}$ ). Ca să se afle numărul învîrtiturilor trebuie să se înmulțească această mărime cu 2 (în cazul general cu  $1 + 1/k$ ) și să se împartă la  $2\pi$ .

Răspuns  $\left(\frac{n}{3} + 2\right)$  învîrtituri pentru  $k=1$ ;  $\frac{k+1}{2k} \left(n - \frac{2}{\pi} n \arccos \frac{1}{k+1} + 2\right)$  învîrtituri în cazul general ( $n \geq 3$ ).

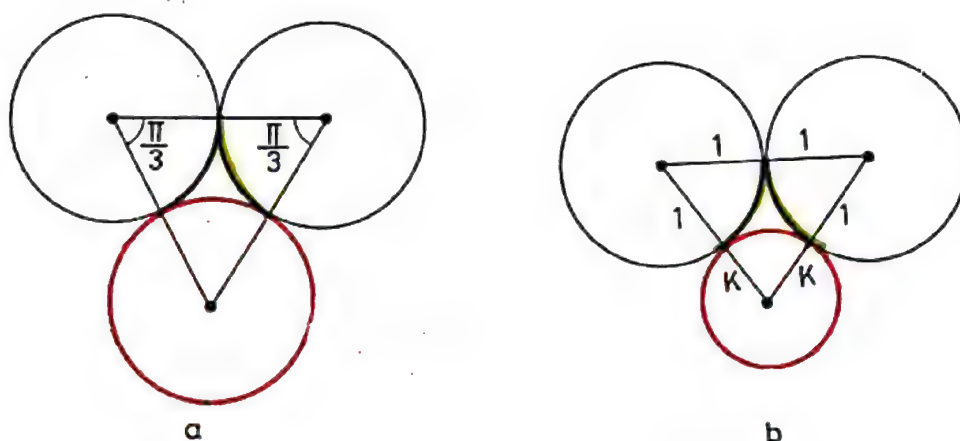


Fig. 57, a, b

În această rezolvare am considerat că moneda se rostogolește pe toate cele  $n$  monede succesiv (ținînd cont de „pierderile“ din adîncituri) fără excepție. Cum a observat just rezolvitorul A. Virovlianski din Gorki, această condiție este obligatorie pentru ca problema să aibă un răspuns precis. Pentru lanțuri cu „pătrunderi înguste“ (vezi figura 58) nu se poate stabili numai după numărul  $n$ , de cîte ori se învîrtește moneda  $M$ . O condiție suficientă dar nu necesară pentru ca problema să fie rezolvabilă, este ca poligonul  $O_1O_2 \dots O_n$  să fie convex.

Gîndiți-vă cum s-ar rezolva problema dacă în locul unui lanț închis ar fi numai o monedă, apoi două monede tangente între ele și în general un lanț neînchis format din  $n$  monede  $O_1, \dots, O_n$ , în care  $O_k$  se atinge de  $O_{k+1}$ ,

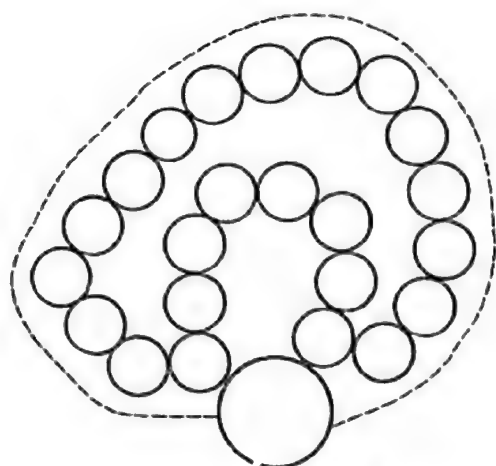


Fig. 58

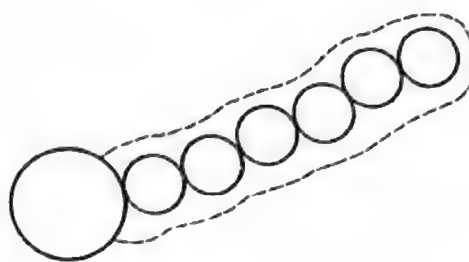


Fig. 59

astfel situate încît  $M$  se poate rostogoli înainte și înapoi pe toate monedele în ordinea  $O_1, O_2, \dots, O_{n-1}, O_n, O_{n-1}, \dots, O_1$  (vezi figura 59). (Indicație. Este suficient să se înlocuiască în formulele de mai sus  $n$  cu  $2n - 2$ .)

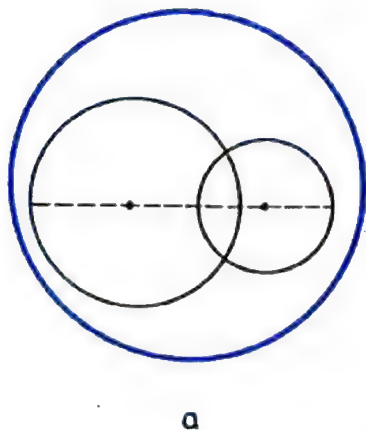
**M 30.** Să se demonstreze că orice  $N$  puncte din plan pot să fie totdeauna acoperite cu un anumit număr de cercuri a căror sumă a diametrelor este mai mică decît  $N$ , iar distanța între oricare două este mai mare decît 1. (Prin distanța dintre două cercuri se înțelege distanța dintre punctele lor cele mai apropiate.)

V.I. Arnold

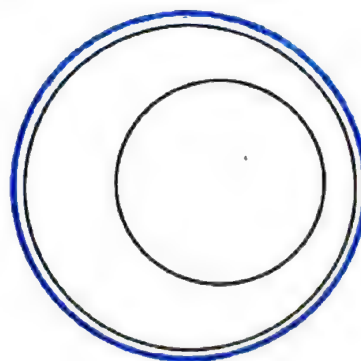
Ne este utilă următoarea leamnă evidentă.

Dacă două cercuri de diametre  $d_1$  și  $d_2$  se intersectează (au un punct comun) atunci ele pot fi incluse într-un cerc de diametru nu mai mare decît  $d_1 + d_2$  (vezi figurile 60, a și b).

Vom construi cîte un cerc cu centrul în fiecare dintre cele  $N$  puncte date care să aibă raza egală cu  $a$  ( $a$  mai mare decît  $1/2$ ; valoarea exactă a lui  $a$  o vom preciza mai jos). Dacă printre aceste cercuri există unele care se intersectează, atunci folosind lema vom înlocui oricare două astfel de cercuri prin cercul care le cuprinde. Dacă printre cercurile obținute se găsesc din nou cercuri care se intersectează, aplicăm iar lema ș.a.m.d. Deci în general va exista un anumit sistem de cercuri cu proprietățile: 1) acoperă toate punctele date



a



b

Fig. 60, a, b



împreună cu cercurile de rază  $a$  cu centrele în aceste puncte și 2) au suma diametrelor mai mică sau egală cu  $N \cdot 2a$ . Dacă printre acestea se găsesc din cele care se intersectează, atunci putem utiliza lema și să construim un nou sistem format dintr-un număr mai mic de cercuri care să satisfacă aceleași condiții 1) și 2) și astfel până la urmă obținem un sistem format din  $k$  cercuri astfel încât oricare două dintre ele nu se mai intersectează.

Vom micșora acum raza fiecăruia dintre aceste  $k$  cercuri cu mărimea  $b$  lăsând centrele lor neschimbate ( $b$  este mai mare decât  $\frac{1}{2}$  și mai mic decât  $a$ ; valoarea exactă a lui  $b$  va fi precizată mai jos). Atunci cele  $k$  cercuri obținute au proprietățile:

- 1) conțin toate punctele date;
- 2) au suma diametrelor mai mică sau egală cu  $N \cdot 2a - k \cdot 2b \leq 2Na - 2b$ ;
- 3) sînt distanțate între ele cu cel puțin  $2b$ .

E clar că dacă alegem  $a$  și  $b$  astfel încât să fie satisfăcute inegalitățile  $b < a$ ;  $2Na - 2b < N$ ,  $2b > 1$ , atunci toate cerințele problemei vor fi satisfăcute. Ar fi suficient, de exemplu, să se ia de la început  $a = \frac{1}{2} + \frac{1}{2N}$  și  $b = \frac{1}{2} + \frac{1}{4N}$ .

Aceste valori ale lui  $a$  și  $b$  au această formă numai pentru că în problemă s-a cerut să se îndeplinească niște inegalități stricte suma diametrelor mai mică decât  $N$ , distanța dintre cercuri mai mare decât 1. Dacă am fi luat  $a = b = \frac{1}{2}$ , s-ar putea demonstra că cele  $N$  puncte s-ar putea acoperi cu  $k$  cercuri (un anumit  $k$ ), astfel încât distanța dintre cercuri să nu fie mai mică decât 1, iar suma distanțelor să nu fie mai mare decât  $N - k$ . Să remarcăm că întrucît această afirmație se demonstrează pentru orice unitate de măsură, atunci (alegînd această unitate ceva mai mică) din ea se poate deduce ușor afirmația formulată în problemă.

N.B. Vasiliev

**M 31.** *O foaie de hîrtie de formă pătrată se taie după o dreaptă în două bucăți. Una dintre bucățile obținute se taie din nou în două și se procedează așa de mai multe ori. Care este numărul minim de tăieturi care trebuie efectuate pentru ca printre bucățile obținute să fie o sută de poligoane cu douăzeci de laturi.*

I. Berștein

La fiecare tăietură, numărul total de bucăți crește cu 1 (pentru că dispăre o bucată și apar două noi), de aceea după  $n$  tăieturi vor fi  $n+1$  bucăți de hîrtie.

Să evaluăm acum numărul total al vîrfurilor din toate bucățile împreună după  $n$  tăieturi. După fiecare tăietură numărul total al vîrfurilor crește fie cu 2 (dacă s-a tăiat prin două vîrfuri), fie cu 3 (dacă s-a tăiat printr-un vîrf și o latură), fie cu 4 (dacă s-a tăiat prin 2 laturi). Fiindcă la început au fost 4 vîrfuri, după  $n$  tăieturi în toate bucățile împreună nu sînt mai mult de  $4n + 4$  vîrfuri.

Să presupunem că după  $N$  tăieturi s-au obținut 100 de poligoane cu douăzeci de laturi. Fiindcă prin aceasta numărul total al bucăților obținute va fi  $N + 1$ , rezultă că în afara acestor poligoane vor mai fi  $N + 1 - 100$  bucăți. Fiecare dintre aceste bucăți va avea cel puțin trei vîrfuri de aceea

numărul total al virfurilor în toate bucățile va fi cel puțin  $100 \cdot 20 + (N - 99) \cdot 3$ . Cum s-a demonstrat mai sus acest număr nu e mai mare decât  $4N + 4$ . Deci

$$4N + 4 \geq 100 \cdot 20 + (N - 99) \cdot 3 = 3N + 1703$$

de unde  $N \geq 1699$ .

Astfel am demonstrat că nu se pot obține 100 de poligoane cu douăzeci de laturi făcând mai puțin de 1699 tăieturi. Aceasta este partea principală și cea mai dificilă a demonstrației.

Să arătăm acum cum se pot obține 100 de poligoane cu douăzeci de laturi efectuând 1699 tăieturi. Iată unul dintre moduri: tăiem pătratul în 100 de dreptunghiuri (99 tăieturi) și fiecare dreptunghi prin 16 tăieturi îl transformăm în poligon cu douăzeci de laturi, tăind din colțuri triunghiuri (1600 tăieturi). În total 1699 tăieturi.

*La fel se poate evalua numărul minim de tăieturi pentru a se obține exact  $k$  poligoane cu  $m$  laturi.*

I.N. Bernstein

**M 32.** În toate căsuțele unui tablou de  $100 \times 100$  sînt scrise plusuri. Se convine să se schimbe concomitent semnele în toate căsuțele unei linii sau unei coloane. Se poate ca, efectuînd aceste operații de mai multe ori, să se obțină un tablou în care să fie exact 1970 de minusuri?

A. Zelevinschi

Presupunem că pe linia  $i$  am schimbat semnul de  $x_i$  ori și în coloana  $k$  de  $y_k$  ori. Atunci în căsuța situată la intersecția liniei  $i$  cu coloana  $k$  semnul se va schimba de  $x_i + y_k$  ori. Prin urmare, în această căsuță semnul va fi minus atunci și numai atunci cînd  $x_i + y_k$  este impar. Astfel numărul total de minusuri în tabloul obținut va depinde numai de paritatea numerelor  $x_i$  și  $y_k$ ; în figura 61, în locul numerelor pare s-au pus zerouri iar în locul celor impare — unități. Fie  $x$  numărul numerelor impare printre  $x_i$  și  $y$  numărul numerelor impare printre  $y_k$  (pe desen  $x = 5$ ,  $y = 4$ ). Atunci, cum se poate calcula ușor, numărul total al minusurilor din tablou va fi egal cu

$$x(100 - y) + (100 - x)y = 100x + 100y - 2xy \text{ unde } x, y \text{ sînt întregi.}$$

Acum să ne întoarcem la problema noastră și să demonstrăm că nu are soluție, adică nu se pot obține 1970 de minusuri. Să presupunem că am reușit să obținem 1970 de minusuri. Atunci  $1970 = 100x + 100y - 2xy$ , de unde

$$xy - 50x - 50y + 2500 = 1515.$$

Descompunînd partea stîngă în factori, vom obține

$$(x - 50)(y - 50) = 1515 = 15 \cdot 101.$$

$$\text{Avem } -50 \leq x - 50 \leq 50,$$

$$-50 \leq y - 50 \leq 50$$

	0	1	1	0	1	1	1	0	0	0
0	+	-	-	+	-	-	-	+	+	+
0	+	-	-	+	-	-	-	+	+	+
1	-	+	+	-	+	+	+	-	-	-
1	-	+	+	-	+	+	+	-	-	-
0	+	-	-	+	-	-	-	+	+	+
1	-	+	+	-	+	+	-	-	-	-
0	+	-	-	+	-	-	-	+	+	+
1	-	+	+	-	+	+	+	-	-	-
0	+	-	-	+	-	-	-	+	+	+
0	+	-	-	+	-	-	-	+	+	+

Fig. 61



Întrucît numărul 101 este prim, rezultă că sau  $x - 50$  sau  $y - 50$  trebuie să se dividă la 101 (căci produsul lor se împarte la 101). Dar din inegalitățile precedente rezultă că atunci  $x - 50$  sau  $y - 50$  este egal cu 0. Astfel am obținut o contradicție care demonstrează că nu se pot obține exact 1970 de minusuri.

A.V. Zelevinski

**M 33.** Se dă un număr natural  $n > 1000$ . Vom lua resturile împărțirilor numărului  $2^n$  la numerele 1, 2, 3, ...,  $n$  și vom găsi suma acestor resturi. Să se arate că această sumă este mai mare decît  $2n$ .

A. Kušnirenko

Vom nota suma resturilor împărțirilor numărului  $2^n$  prin  $S_n$ . Întărim afirmația problemei și vom demonstra că pentru  $n > 1000$ ,  $S_n > 3,5n$ . Prin aceeași metodă vom demonstra că

$$S_n > \frac{n}{2} (\log_2 n - 4)$$

pentru orice  $n$ .

Vom urmări în esență rezolvarea lui D. Grigoriev din Leningrad. Rezolvarea se bazează pe o considerație foarte simplă:  $2^n$  nu se împarte exact la nici un număr impar cu excepția lui 1, deci restul împărțirii lui  $2^n$  la un astfel de număr nu este mai mic decît 1. De aici se deduce ușor, că pentru orice număr impar  $k > 1$ , resturile împărțirii lui  $2^n$  la  $2^l k$ , nu sînt mai mici decît  $2^l$ . Într-adevăr fie restul împărțirii lui  $2^{n-l}$  prin  $k$  egal cu  $r$ , adică  $2^{n-l} = mk + r$ , unde  $0 \leq r < k$ , atunci  $2^n = m(2^l k) + 2^l r$  unde  $0 \leq 2^l r \leq 2^l k$  adică restul împărțirii lui  $2^n$  prin  $2^l k$  este egal cu  $2^l r$  și fiindcă  $r \neq 0$ , acest rest nu e mai mic decît  $2^l$ .

De aici rezultă că, în orice caz  $S_n \geq 1 \cdot (\text{numărul numerelor de forma } 2k + 1 \text{ care nu-l depășesc pe } n, k > 1) + 2 \cdot (\text{numărul numerelor de forma } 2(2k + 1) \text{ care nu-l depășesc pe } n, k > 1) + 2^2 \cdot (\text{numărul numerelor de forma } 2^2(2k + 1) \text{ care nu-l depășesc pe } n, k > 1) + \dots + 2^l \cdot (\text{numărul numerelor de forma } 2^l(2k + 1), k > 1) (*)$  unde  $l$  este determinat de condițiile  $3 \cdot 2^l \leq n$ ,  $3 \cdot 2^{l+1} > n$  (nu are sens să se ia  $l$  mai mare fiindcă atunci expresia din paranteză va fi egală cu zero).

Ce se poate spune despre partea dreaptă a acestei inegalități?

Să considerăm al  $(i + 1)$ -lea termen:  $2^i(\dots)$ . Numărul din paranteză este egal, evident, cu numărul termenilor care nu depășesc pe  $n$  din progresia aritmetică  $3, 2^i, 5 \cdot 2^i, 7 \cdot 2^i, \dots$  adică progresia cu primul termen  $3 \cdot 2^i$  și rația  $2 \cdot 2^i$ . Numărul acestor termeni este de cel puțin  $\frac{n - 3 \cdot 2^i}{2^{i+1}}$  și, prin

urmare al  $i$ -lea termen al părții drepte a inegalității este cel puțin  $\frac{n}{2} -$

$-\frac{3}{2} \cdot 2^i$ . În esență rezolvarea problemei e terminată. Restul reprezintă diferite transformări ale părții din dreapta a formulei (\*) cu ajutorul inegalităților obținute. Vom înlocui, de exemplu, suma în partea dreaptă a lui (\*) cu primii opt termeni. Atunci obținem;

$$S_n > 8 \cdot \frac{n}{2} - \frac{3}{2} \sum_{i=0}^l 2^i > 8 \cdot \frac{n}{2} - \frac{3}{2} \cdot 2^8 = 3,5n + \left(\frac{n}{2} - 384\right).$$

Pentru  $n > 1000$  expresia din paranteză este pozitivă și deci am demonstrat că  $S_n > 3,5n$  pentru  $n > 1000$ . Astfel că problema M 33 este rezolvată complet.

Dar se poate obține o inegalitate mai precisă. Însumând toți termenii părții drepte a lui (\*), obținem:

$$S_n > (l+1) \frac{n}{2} - \frac{3}{2} \sum_{i=0}^l 2^i > (l+1) \frac{n}{2} - \frac{3 \cdot 2^{l+1}}{2}.$$

Utilizând inegalitățile  $3 \cdot 2^l \leq n$ ,  $3 \cdot 2^{l+1} > n$ , vom găsi că

$$S_n > \frac{n}{2} \log_2 \frac{n}{3} - n = \frac{n}{2} \left( \log_2 \frac{n}{3} - 2 \right) > \frac{n}{2} (\log_2 n - 4).$$

Această formulă arată, de exemplu, că dacă  $n > 2^{1004}$  atunci  $S_n > 500n$ .

**Problemă.** Suma resturilor împărțirii numerelor  $2^{l+1} \cdot 2^{l+1}$  la un număr impar  $m > 1$ , este mai mare decât  $\frac{m}{2} \left( \frac{L}{\log_2 2m} - 1 \right)$ . Cu ajutorul acestei probleme a cărei rezolvare va fi dată mai jos, se poate demonstra că pentru un număr nesfârșit de valori ale lui  $n$ , suma  $S_n$  este cu mult mai mare decât  $\frac{n}{2} (\log_2 n - 4)$ , adică se poate demonstra

că evaluarea  $S_n > \frac{n}{2} (\log_2 n - 4)$  este foarte grosolană (cel puțin pentru un număr nesfârșit de valori ale lui  $n$ ). Aceasta nu e de mirare, deoarece metoda noastră de demonstrație nu a ținut seama de multe circumstanțe. De exemplu, am folosit numai faptul că resturile împărțirii lui  $2^n$  la numere impare sînt nenule, în timp ce aceste resturi sînt destul de mari. Mărimea  $S_n$  nu poate crește prea repede odată cu creșterea lui  $n$  fiindcă e evident că  $S_n \leq 1 + 2 + \dots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$ . Ni se pare probabilă următoarea ipoteză:

**I p o t e z a I.** Pentru  $n$  suficient de mare este adevărată inegalitatea  $S_n \leq \frac{n^2}{4}$ .

b) există un număr pozitiv  $c > 0$ , astfel încît  $cn^2 \leq S_n$ .

Nu știm nici să demonstrăm nici să infirmăm aceste afirmații. Mai mult, nu știm dacă este adevărată următoarea (mai slabă) ipoteză:

**I p o t e z a a II-a.** Există un număr pozitiv  $c > 0$ , astfel încît inegalitatea  $cn^2 \leq S_n$  este îndeplinită pentru un număr nesfârșit de valori ale lui  $n$ .

Ca o afirmație mai slabă decât cea a ipotezei 2 se poate demonstra următoarea teoremă.

**T e o r e m ă.** Pentru un număr nesfârșit de valori ale lui  $n$  este îndeplinită inegalitatea

$$S_n > \frac{n^2}{132 \log_2 n}$$

(numărul  $\frac{n^2}{132 \log_2 n}$  pentru valori mari ale lui  $n$  este cu mult mai mare decât numărul

$\frac{n}{2} (\log_2 n - 4)$ ). Se poate arăta ușor că pentru valori destul de mari ale lui  $n$ , raportul acestor două numere este mai mare decât  $n$ ).

Teorema se deduce din problemă în felul următor. Să considerăm suma  $\Sigma_k$  a resturilor împărțirii numerelor  $2^{k+1}, \dots, 2^n$  la numărul  $k$ . Conform problemei, pentru  $k$  impar suma  $\Sigma_k$  este destul de mare și de aceea și numărul  $\Sigma_1 + \Sigma_2 + \dots + \Sigma_n$  este mare.



Dar, cum se observă ușor,  $S_1 + S_2 + \dots + S_n = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \dots + \Sigma_n$ , de aceea suma din partea stângă este de asemenea mare și înseamnă că unul dintre termeni, să zicem  $S_i$ , este tot mare. Demonstrația formală o propunem cititorului. Trecem acum la rezolvarea problemei.

**Rezolvarea problemei.** Vom scrie resturile împărțirilor numerelor  $2^{i+1}, \dots, 2^{i+L}$ , la  $m$  și vom pune între două resturi consecutive o „bară” dacă primul este mai mare decât al doilea. Atunci, în primul rând restul situat înainte de „bară” este mai mare decât  $m/2$ , în al doilea rând numărul numerelor cuprinse între două „bare” consecutive este mai mic decât  $\log_2 2m$  fiindcă resturile dintre două „bare” formează o progresie geometrică cu rația 2 (într-adevăr  $2^{\log_2 2m - 1} = m > m - 1$ , și orice rest nu e mai mare decât  $m - 1$ ). Astfel, numărul intervalelor dintre „bare” este mai mare decât  $\frac{L}{\log_2 2m} - 1$  și fiindcă fiecare interval se termină cu un număr mai mare decât  $m/2$ , totul este demonstrat.

A.G. Kušnirenko

**M 34.** Să se demonstreze că dacă un număr natural se împarte la 10101010101, atunci în scrierea sa zecimală există cel puțin șase cifre diferite de zero.

A. Tolpigo

Problema se rezolvă foarte ușor dacă numărul  $A$  care se împarte la 10101010101 are cel mult 12 cifre; atunci el are în mod obligatoriu forma  $abababababab$  și problema e rezolvată.

Rămîne să găsim un mod de a reduce problema la acest caz.

Notăm numărul 10101010101 prin  $M$ . Vom demonstra că dacă numărul  $A$  se divide la  $M$ , atunci se găsește un număr cu douăsprezece (sau cu mai puține) cifre  $C$ , care de asemenea se împarte la  $M$  și care are nu mai multe cifre nenule decât  $A$ .

**L e m ă.** Dacă  $A$  se divide prin  $M$  și are mai mult de 12 cifre (considerînd și zerourile), atunci se găsește un număr  $B$  care de asemenea se împarte la  $M$ , mai mic decât  $A$  și care nu are mai multe cifre nenule decât  $A$ .

Să demonstrăm aceasta. Fie  $A = \overline{a_1 a_2 a_3 \dots a_n}$ ; detașăm prima sa cifră  $a_1$  și o adăugăm cu 12 ordine mai jos, de exemplu

$$\begin{array}{r} 123\ 456789\ 123\ 456 \rightarrow 23\ 456\ 789\ 123\ 456 \\ + \qquad \qquad \qquad 1 \\ \hline 23\ 456\ 789\ 123\ 556 \end{array}$$

Numărul obținut va fi, fără îndoială, mai mic decât cel inițial: se poate verifica ușor că pur și simplu am scăzut, din numărul  $A$ , numărul  $a_1 \cdot (10^{n-1} - 10^{n-13})$ . În paranteză este produsul  $10^{n-13} \cdot (10^{12} - 1)$ ; al doilea factor evident se divide prin  $A$  (este un număr format din 12 de nouă), așa că diferența se divide prin  $A$ . Rămîne să observăm că în numărul obținut nu sînt mai multe cifre semnificative decât în cel inițial. În exemplul nostru ele chiar s-au micșorat cu una; aceasta s-ar putea să nu se întîmple dacă în poziția a 13-a ar sta 0 sau dacă acolo ar fi o cifră destul de mare și pe locul precedent 0, așa ca în exemplul:

$$\begin{array}{r} 888\ 888\ 888\ 880\ 421 \rightarrow 88\ 888\ 888\ 880\ 421 \\ + \qquad \qquad \qquad 8 \\ \hline 88\ 888\ 888\ 881\ 221 \end{array}$$

(n-am considerat încă situație în care schimbarea se produce și la ordinul al 12-lea dar se vede ușor că atunci numărul cifrelor semnificative se micșorează). Lema e demonstrată.

Acum dacă  $A$  se divide prin  $M$ , vom scădea din  $A$  prima sa cifră, înmulțită cu  $10^{n-13} \cdot (10^{12} - 1)$ . Cu numărul obținut facem aceeași operație și vom proceda tot așa până când ajungem la un număr cu 12 cifre. Fiindcă el are cel puțin șase cifre semnificative atunci și  $A$  are cel puțin șase cifre semnificative.

Majoritatea rezolvitorilor au încercat să examineze citul împărțirii lui  $A$  la  $M$ ; dar rezolvarea în felul acesta este foarte grea, întrucât la operația inversă de înmulțire a acestui cit cu 10101010101 cifrele sale „se lipesc” unele de altele, se pot întâmpla multe treceri ale unităților la alte ordine și este aproape imposibil să se analizeze ceea ce s-a obținut. Ideea rezolvării constă în a evalua aceste transferări una câte una.

A.K. Tolpigo

**M 35.** O sferă de rază egală cu 10 este înscrisă într-un poliedru cu 19 fețe. Să se arate că pe suprafața sa se pot găsi două puncte astfel încât distanța între ele să fie mai mare decât 21.

A. Kușnirenko

**Prima rezolvare.** Presupunem contrariul, adică faptul că distanța dintre oricare două puncte ale suprafeței poliedrului cu 19 fețe nu e mai mare decât 21. Atunci acest poliedru va fi situat în interiorul unei sfere de rază 11 concentrică cu sfera de rază 10 și fiecare față a sa va fi situată între sfere. De aceea aria fiecărei fețe nu este prea mare și anume nu depășește aria cercului indicat în figura 62 de rază  $\sqrt{21}$ . Fiind 19 fețe în poliedrul nostru, aria sa nu va depăși  $19\pi(\sqrt{21})^2 = \pi(20^2 - 1^2) = 399\pi$ . Dar poliedrul admite o sferă înscrisă de rază 10. De aici rezultă că aria sa este mai mare decât aria acestei sfere  $4\pi 10^2$ . Astfel, pe de o parte  $S < 399\pi$ , pe de alta  $S > 400\pi$ . Contradicția obținută rezolvă problema.

În această rezolvare (neriguroasă) am omis demonstrațiile celor trei afirmații care începeau cu cuvintele subliniate: atunci, de aceea, de aici. Lăsăm cititorului aceste demonstrații simple dar vrem să-l prevenim că deși a treia afirmație se demonstrează ușor pentru un poliedru convex prin comparația volumului său cu volumul sferei (într-adevăr, volumul poliedrului este egal cu  $\frac{R \cdot S}{3}$  unde  $R$  este raza sferei înscrise, iar  $S$  aria suprafeței sale) și este

intuitiv clar că poliedrul nostru este convex, este greu de demonstrat riguros fiindcă însăși definiția riguroasă a poliedrului este foarte complicată (Vezi de exemplu, cartea lui I. Lakatos „Demonstrații și desmințiri”, Moscova, „Nauka”, 1967).

**Rezolvarea a doua.** Să punem o chestiune mai generală: ce număr minim de fețe poate să aibă un poliedru care admite o sferă înscrisă de rază  $r$  și este situat complet într-o sferă concentrică cu aceasta de rază  $R > r$  (Iată și situația reală care i-a sugerat autorului această problemă: cu ce număr minim de tăieturi drepte de cuțit poate fi luată coaja unei portocale netăind nici una dintre feliile miezului? Evident că după luarea în acest mod a stratului superior al coajei ce rămâne are forma unui

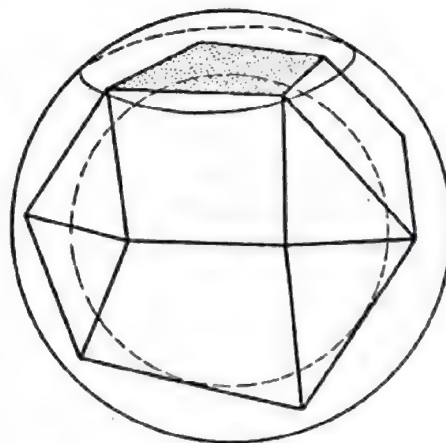


Fig. 62



poliedru fiindcă pe suprafața sa nu mai rămâne nici o porțiune rotunjită, deci problema este echivalentă cu cea dată.

Nu știm răspunsul exact la această problemă mai generală, dar vom demonstra pentru numărul fețelor o anumită limitare care pentru  $r = 10$  și  $R = 11$  va arăta că  $N > 22$ . Astfel vom arăta că, dacă în datele problemei M 35 în loc de un poliedru cu 19 fețe se ia un poliedru cu 22 de fețe, afirmația problemei rămâne adevărată.

Astfel, fie un poliedru cu  $N$  fețe care admite o sferă înscrisă de rază  $r$  și este situat în întregime într-o sferă de rază  $R$ . Să examinăm o față de a sa.

Planul care trece prin ea decupează din sferă o „căciulă” (calotă sferică) de înălțime  $R - r$ . E clar că dacă se construiesc calote pentru toate fețele poliedrului, reuniunea lor acoperă toată suprafața sferei exterioare. Aria unei calote este  $2\pi R(R - r)$ . Suma ariilor tuturor calotelor este mai mare decât aria sferei, de aceea  $N = 2\pi R(R - r) > 4\pi R^2$  de aici  $N > \frac{2R}{R - r}$ , în particular pentru  $R = 11, r = 10$  obținem  $N > 22$ .

E interesant că pentru orice alegere de calote care acoperă în întregime sfera exterioară, se poate construi un poliedru care să admită sfera dată ca sferă înscrisă (Demonstrați!). De aceea problema noastră privind numărul minim de fețe este complet echivalentă cu următoarea. Care este numărul minim  $N = N(h)$  de calote sferice de înălțime  $h$  care acoperă în întregime o sferă de rază 1? (În problema M 35,  $h = \frac{1}{11}$ ).

Evident că  $N(h) > \frac{2}{h}$  dar această inegalitate reflectă pur și simplu faptul că suma ariilor calotelor este mai mare decât aria sferei, în timp ce intuitiv este clar că pentru  $h < 1$  calotele trebuie să se acopere destul de mult. Într-adevăr, se poate demonstra că pentru  $h$  suficient de mici,  $N(h) > 1,2 \frac{2}{h}$ . Încercați să demonstrați singuri, de exemplu, că pentru  $h < 1$ ,

$$N(h) > 1,001 \frac{2}{h}$$

(În legătură cu rezolvarea acestei probleme și a altora asemănătoare se poate vedea cartea lui L.F. Toth „Aranjarea în plan, pe sferă și în spațiu”, Moscova, Fizmatgiz, 1958.)

A.G. Kušnirenko

**M 36.** *Să se demonstreze că în plan nu se pot găsi șapte drepte și șapte puncte, astfel încât prin fiecare punct să treacă trei drepte și pe fiecare dreaptă să fie situate trei puncte.*

Să presupunem că o astfel de așezare a celor șapte puncte și șapte drepte există. Înainte de toate vom arăta că oricare două din punctele date sînt situate pe cîte una din dreptele date. Într-adevăr, dacă  $A$  este unul dintre aceste puncte, atunci prin  $A$  trec trei drepte și pe fiecare dintre ele se găsesc cîte două din punctele date (în afară de  $A$ ); Astfel  $A$  și oricare dintre cele șase puncte diferite de  $A$  sînt situate pe una dintre dreptele date. La fel se demonstrează că fiecare două dintre dreptele date se intersectează în unul dintre punctele date: dacă  $a$  este una dintre drepte, atunci prin fiecare dintre cele trei puncte situate pe ea trec cîte două drepte (în afară de  $a$ ) și de aceea fiecare dintre aceste drepte se intersectează cu  $a$  într-unul dintre punctele date.

Să considerăm acum *înfășurătoarea convexă* a mulțimii formate din cele șapte puncte, care este cea mai mică figură convexă care cuprinde aceste șapte puncte. Aceasta va fi un anumit poligon convex cu  $n$  laturi, unde  $n \leq 7$  (el se poate obține astfel: se bat cuișoare în cele șapte puncte și apoi se întinde o bandă de cauciuc care cuprinde toate aceste cuișoare; firul se strânge după conturul unui poligon cu vîrfurile în  $n$  puncte din cele date, iar celelalte  $7 - n$  puncte se găsesc în interior sau pe laturile acestui poligon; vezi figura 63). Este clar că  $n \geq 4$  nu e posibil, căci pe fiecare latură a poligonului cu  $n$  laturi trebuie să mai fie un al treilea punct în afară de vîrfuri și în total sînt șapte puncte. Cazul  $n = 3$  cînd înfășurătoarea convexă este un anumit triunghi  $ABC$ , e de asemenea imposibil. Într-adevăr, dacă  $E$  și  $F$  sînt puncte (dintre cele șapte date) situate pe laturile  $AB$  și  $BC$ , atunci  $EF$  și  $AC$  două dintre dreptele date trebuie să se intersecteze pe prelungirea laturii  $AC$ , adică în afara triunghiului  $ABC$ , dar ele se intersectează în unul dintre cele șapte puncte. S-a obținut o contradicție.

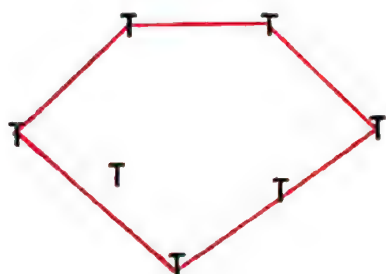


Fig. 63. Înfășurătoarea convexă a unei mulțimi făcute dintr-un număr finit de puncte din plan este un poligon cu vîrfurile în unele dintre aceste puncte (sau un segment dacă toate punctele sînt pe o dreaptă)

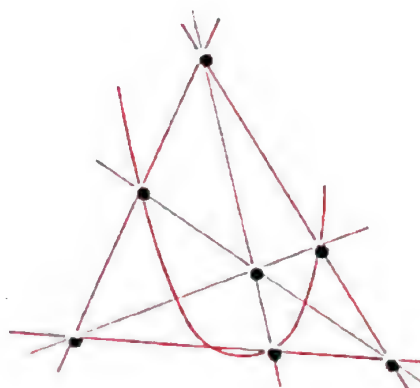


Fig. 64. Această configurație satisface aproape complet cerințele problemei M 36, numai că una dintre „drepte” trebuie îndoită

**M 37.** În fiecare pătrățel al unei foi de hîrtie cu pătrățele, infinită este scris un anumit număr, astfel încît suma numerelor din fiecare pătrat ale cărui laturi sînt determinate de liniile rețelei, în modul, nu depășește unitatea. Să se demonstreze că atunci există un astfel de număr  $c$ , încît suma numerelor din orice dreptunghi, cu laturi determinate de liniile rețelei, nu e mai mare decît  $c$ ; cu alte cuvinte că sumele cifrelor din toate dreptunghiurile sînt mărginite. Să se demonstreze că aceasta e adevărat pentru  $c = 4$ . Poate reușiți să îmbunătățiți această evaluare (de exemplu, să se demonstreze că afirmația este adevărată pentru  $c = 3$  sau chiar  $c = 2$ ).

Iu. I. Ionin

Demonstrăm că  $c = 4$  este bun.

Să presupunem că într-un anumit dreptunghi cu laturile  $a$  și  $b$  suma în modul este egală cu  $4 + \epsilon$ , unde  $\epsilon > 0$  ( $a < b$ ). Vom construi patru pătrate care au fiecare dintre ele cîte trei laturi făcînd parte dintre anumite trei laturi ale acestui dreptunghi  $a \times b$ . Atunci dreptele pe care sînt situate fiecare din cea de a patra latură a acestor pătrate, vor forma un nou dreptunghi cu laturile



$2b - a$  și  $|2a - b|$  (vezi figurile 65 și 66) cazul  $b = 2a$  desigur nu e posibil. Vom arăta că în acest nou dreptunghi suma numerelor în modul este mai mare sau egală cu  $4 + 3\varepsilon$ .

Putem considera că  $s_4 + s_5 + s_6 = 4 + \varepsilon$  (dacă suma e egală cu  $-(4 + \varepsilon)$  schimbăm semnele tuturor numerelor în cele contrare).

Considerăm la început cazul  $b < 2a$ . Atunci

$$\begin{aligned} s_5 &= (s_4 + s_5) + (s_5 + s_6) - (s_4 + s_5 + s_6) \leq 1 + 1 - 4 - \varepsilon = -2 - \varepsilon \\ s_2 + s_8 &= (s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + s_5 + s_6) + (s_4 + s_5 + s_6 + s_7 + s_8 + s_9) - \\ &- s_1 - s_3 - s_7 - s_9 - 2(s_4 + s_5 + s_6) \leq 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + - \\ &- 2(4 + \varepsilon) = -2 - 2\varepsilon \end{aligned}$$

de unde  $s_2 + s_5 + s_8 \leq -4 - 3\varepsilon$ .

Analog, dacă  $b > 2a$ , atunci

$$\begin{aligned} s_5 &= -s_4 - s_6 + (s_4 + s_5 + s_6) \geq -1 - 1 + 4 + \varepsilon \geq 2 + \varepsilon \\ s_2 + s_8 &= (s_1 + s_2) + (s_2 + s_3) + (s_7 + s_8) + (s_8 + s_9) - (s_1 + s_2 + s_3 + \\ &+ s_4 + s_5 + s_6) - (s_4 + s_5 + s_6 + s_7 + s_8 + s_9) + 2(s_4 + s_5 + s_6) \geq 2 + 2\varepsilon, \\ s_2 + s_5 + s_8 &\geq 4 + 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Astfel am demonstrat că dacă într-un dreptunghi  $a_1 \times b_1$  suma numerelor, în modul, este mai mare decât  $4 + \varepsilon$ , atunci într-un nou dreptunghi  $a_2 \times b_2$  unde  $a_2 = |2a_1 - b_1|$ ,  $b_2 = 2b_1 - a_1$ , suma numerelor, în modul, este mai mare decât  $4 + 3\varepsilon$ . Pentru dreptunghiul  $a_2 \times b_2$  putem construi în același mod un dreptunghi  $a_3 \times b_3$  în care suma numerelor va fi mai mare decât  $4 + 3 \cdot 3\varepsilon = 4 + 9\varepsilon$  și așa mai departe un întreg șir de dreptunghiuri  $a_1 \times b_1, a_2 \times b_2, a_3 \times b_3, \dots, a_n \times b_n, \dots$  astfel încât în dreptunghiul  $a_n \times b_n$  suma numerelor în modul este mai mare decât  $4 + 3^{n-1}\varepsilon$ . Să arătăm că în acest șir, toate dreptunghiurile începând de la unul anumit vor fi de tipul al doilea, adică  $b_n > 2a_n$ . Într-adevăr, în primul rând se verifică ușor că dacă

$$\frac{a_n}{b_n} < \frac{1}{2}, \text{ atunci și } \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \frac{b_n - 2a_n}{2b_n - a_n} < \frac{1}{2}.$$

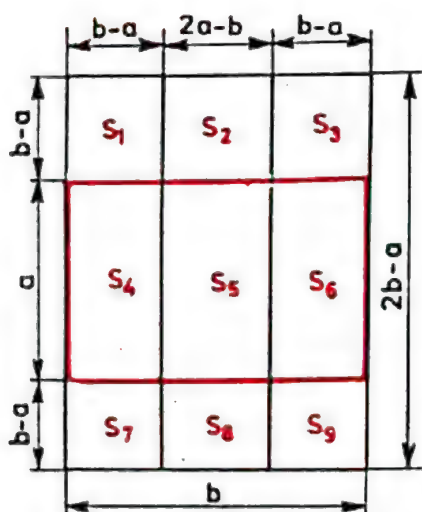


Fig. 65  $2a > b$

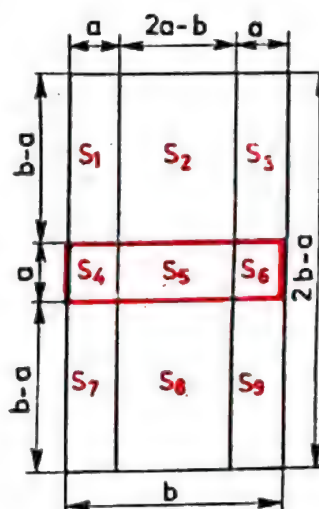


Fig. 66  $2a < b$ . Dreptunghiul inițial  $a \times b$  este marcat cu roșu, cel nou  $2a-b \times (2b-a)$  cu negru

În al doilea rând, dacă  $\frac{a_n}{b_n} > \frac{1}{2}$ , atunci

$$\frac{1 - \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}}{1 - \frac{a_n}{b_n}} = \frac{1 - \frac{2a_n - b_n}{2b_n - a_n}}{1 - \frac{a_n}{b_n}} = \frac{3b_n}{2b_n - a_n} > \frac{3b_n}{2b_n - \frac{b_n}{2}} = 2;$$

astfel mărimea

$$1 - \frac{a_n}{b_n}$$

prin trecerea de la  $n$  la  $n + 1$  se mărește cel puțin de două ori pînă cînd nu se ajunge la dreptunghiul cu  $a_n/b_n \leq 1/2$ . De aceea, oricît de mic ar fi  $1 - \frac{a_1}{b_1}$ , totdeauna după un număr de operații nu mai mare decît  $-1 - \log_2(1 - \frac{a_1}{b_1})$  ajungem la un dreptunghi de al doilea tip și în continuare în șir se întîlnesc numai astfel de dreptunghiuri.

De aceea putem considera că deja  $\frac{a_1}{b_1} < \frac{1}{2}$ . Atunci

$$a_3 = b_2 - 2a_2 = (2b_1 - a_1) - 2(b_1 - 2a_1) = 3a_1.$$

$$b_3 = 2b_2 - a_2 = 2(2b_1 - a_1) - (b_1 - 2a_1) = 3b_1.$$

Prin urmare, în general  $a_{2k+1} = 3^k a_1$  și  $b_{2k+1} = 3^k b_1$ , iar suma numerelor în acest dreptunghi  $3^k a_1 \times 3^k b_1$  este mai mare decît  $4 + 9^k \epsilon$ , adică alegînd pe  $k$  suficient de mare putem să o facem oricît de mare. Acum nu e greu

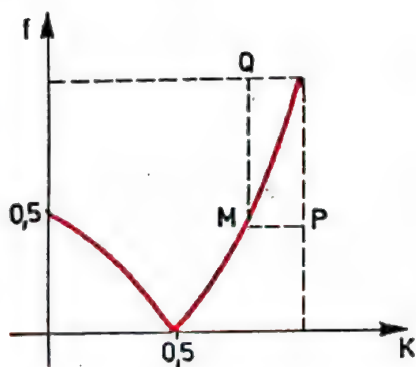


Fig. 67. Fie  $k_n = a_n/b_n$ . Atunci  $k_{n+1} = f(k_n)$ , unde  $f(k) = \frac{|1-2k|}{2-k}$ .

Reprezentăm aici graficul acestei funcții pe segmentul  $0 \leq k \leq 1$ . În rezolvarea problemei am folosit faptul că pentru orice punct  $M$  din jumătatea din dreapta a graficului  $MQ/MP > 2$ ; dacă  $0 < k < 1/2$ , atunci  $0 \leq f(k) \leq 1/2$  iar  $f(f(k)) = k$ , adică funcția  $f$  pe segmentul  $0 \leq k \leq 1/2$  coincide cu funcția sa inversă și graficul ei este simetric față de prima bisectoare

	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$
			$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
	$\frac{1}{2}$	$-1$		$-1$
	$-1$	$1$	$1$	$-1$
	$\frac{1}{2}$	$-1$		$\frac{1}{2}$
	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{2}$
			$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

Eig. 68. În toate căsuțele necompletate este zero



să se obțină contradicția: este clar că orice dreptunghi  $Na_1 \times Nb_1$  unde  $a_1, b_1$  și  $N$  sînt numere întregi poate fi descompus în  $a_1b_1$  pătrate (de latură  $N$ ) și de aceea suma tuturor numerelor situate în el nu poate depăși în modul  $a_1b_1$ .

Figura 67 clarifică a doua jumătate a demonstrației. În figura 68 este dat un exemplu în care suma numerelor dintr-un anumit dreptunghi este egală cu trei. Astfel pentru  $c = 2$  afirmația problemei nu este adevărată. Cel mai probabil e faptul că valoarea exactă este  $c = 4$  dar exemple care să arate că  $c > 3$ , nu cunoaștem.

N.B. Vasiliev

**M 38.** Cercul construit pe înălțimea  $AD$  a triunghiului dreptunghic  $ABC$ , ca diametru, intersectează cateta  $AB$  în punctul  $K$  și cateta  $AC$  în punctul  $M$ . Segmentul  $KM$  intersectează înălțimea  $AD$  în punctul  $L$ . Se știe că segmentele  $AK, AL$  și  $AM$  formează o progresie geometrică (adică  $AK \cdot AM = AL^2$ ). Să se găsească unghiurile ascuțite ale triunghiului  $ABC$ .

L.M. Lopovok

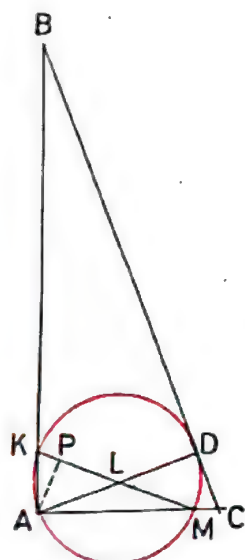


Fig. 69

E ușor să se demonstreze că  $AKDM$  este dreptunghi și  $L$  este centrul său (vezi figura 69). Ducem perpendiculara  $AP$  pe  $KM$ .

Atunci

$$AL^2 = AK \cdot AM = KM \cdot AP = 2AL \cdot AP,$$

$$AL = 2AP, \angle PLA = 30^\circ$$

și întrucât  $AL = KL = ML$  rezultă că unghiurile ascuțite ale triunghiului  $AKM$  sînt egale cu  $15^\circ$  și  $75^\circ$ . Aceleași unghiuri ascuțite le are și triunghiul  $ABC$ :

$$\angle C = \angle BAD = \angle AKM.$$

L. M. Lopovok

**M 39.** Să se demonstreze că numerele întregi nenegative  $x, y$  satisfac ecuația  $x^2 - mxy + y^2 = 1$  (unde  $m$  este un număr întreg dat, mai mare decît 1) atunci și numai atunci cînd  $x$  și  $y$  sînt termeni vecini ai șirului  $\varphi_0 = 0, \varphi_1 = 1, \varphi_2 = m, \varphi_3 = m^2 - 1, \varphi_4 = m^3 - 2m, \varphi_5 = m^4 - 3m^2 + 1, \dots$  în care  $\varphi_{k+1} = m\varphi_k - \varphi_{k-1}$  pentru toți  $k \geq 1$ .

De exemplu, toate soluțiile ecuației

$$x^2 - 3xy + y^2 = 1 \quad (1)$$

în numere întregi  $(x, y)$ ,  $0 \leq x < y$  sînt perechile

$$(0, 1), (1, 3), (3, 8), (8, 21), \dots \quad (2)$$

formate din termenii consecutivi ai șirului  $0, 1, 3, 8, 21, \dots$  determinat de condițiile  $\varphi_0 = 0, \varphi_1 = 1, \varphi_{k+1} = 3\varphi_k - \varphi_{k-1}$  pentru toți  $k \geq 1$ .

Vom rezolva această problemă pentru  $m = 3$  (pentru ceilalți  $m > 1$  rezolvarea este analoagă). Trebuie să demonstrăm în primul rând că perechile de numere (2) satisfac ecuația (1) și al doilea rând că nu există alte perechi formate din numere nenegative care să satisfacă această ecuație.

În șirul (2), după fiecare pereche  $(x, y)$  urmează o pereche  $(x_1, y_1)$  care poate fi obținută din  $(x, y)$  cu ajutorul transformării

$$x_1 = y, \quad y_1 = 3y - x. \quad (3)$$

Notăm această transformare  $(x, y) \rightarrow (y, 3y - x)$  prin litera  $T$ . E ușor de verificat că dacă perechea  $(x, y)$  satisface ecuația (1), atunci și perechea  $(x_1, y_1) = T(x, y)$  o satisface de asemenea:

$$x_1^2 - 3x_1y_1 + y_1^2 = y^2 - 3y(3y - x) + (3y - x)^2 = y^2 - 3xy + x^2. \quad (4)$$

De aici rezultă că toate perechile (2) satisfac ecuația (1), căci perechea  $(0, 1)$  o satisface și toate celelalte se obțin din ea cu ajutorul unui număr finit de transformări  $T$ .

Să arătăm acum că alte soluții  $(x, y)$  în numere întregi supuse la condiția  $0 \leq x < y$ , ecuația (1) nu admite. Fie  $(x_1, y_1)$  o astfel de soluție. Vom găsi, perechea  $(x, y)$  din care au fost obținuți acești  $x_1$  și  $y_1$  după formulele (3), pentru aceasta e suficient să se exprime  $x$  și  $y$  prin  $x_1$  și  $y_1$ :

$$x = 3x_1 - y_1, \quad y = y_1. \quad (5)$$

Această trecere de la  $(x_1, y_1)$  la  $(x, y)$  este transformarea inversă a lui  $T$  și o vom nota  $T^{-1}$ . Din egalitatea (4) rezultă că dacă perechea  $(x_1, y_1)$  satisface ecuația (1) atunci și perechea  $(x, y) = T^{-1}(x_1, y_1)$  o satisface. Să arătăm că dacă  $0 < x_1 < y_1$  atunci și

$$0 \leq x < y. \quad (6)$$

Scriem egalitatea  $x_1^2 - 3x_1y_1 + y_1^2 = 1$  în următoarele două feluri:

$$x_1^2 + y_1(y_1 - 3x_1) = 1, \quad (7)$$

$$x_1(x_1 - y_1) + y_1(y_1 - 2x_1) = 1. \quad (8)$$

Din egalitatea (7) rezultă imediat ( $x_1$  și  $y_1$  sînt pozitivi!) că  $-x = y_1 - 3x_1 \leq 0$ , iar dacă  $y_1 - 3x_1 = 0$  atunci  $x_1 = 1$  și  $y_1 = 3$ . Din egalitatea (8) rezultă că  $y = x = y_1 - 2x_1 > 0$  (căci  $x_1 - y_1$  e negativ). Inegalitatea (6) este demonstrată. Observăm că ea poate fi scrisă astfel

$$0 \leq x < x_1 \quad (9)$$

Întrucît  $x_1 = y$ . Astfel, orice soluție  $(x_1, y_1)$ ,  $0 < x_1 < y_1$ , poate trece prin transformarea  $T^{-1}$  în soluția  $(x, y)$  pentru care  $0 \leq x < y$ . Dacă  $x > 0$ , mai putem aplica  $T^{-1}$  încă o dată sau de mai multe ori, obținînd noi soluții (mai mici). Într-adevăr, așa cum arată (9) mărimea numărului întreg  $x$  prin fiecare transformare se micșorează. De aceea după un anumit număr finit de pași trebuie să ne oprim și ne oprim numai atunci cînd obținem soluția  $(x, y)$ , în care  $x = 0$  și deci  $y = 1$ . Astfel am demonstrat că din fiecare soluție  $(x_1, y_1)$  după un număr finit de transformări  $T^{-1}$  se obține soluția  $(0, 1)$ . De aici rezultă că orice soluție se obține din soluția  $(0, 1)$  după un număr finit de transformări  $T$  (adică alte soluții diferite de (2) nu există). Problema este complet rezolvată.



Această rezolvare poate fi făcută mai intuitivă astfel. Vom reprezenta perechea de numere  $(x, y)$ , în mod obișnuit, ca un punct din plan. Atunci ecuația  $x^2 - 3xy + y^2 = 1$  reprezintă în plan o curbă numită hiperbolă (vezi figura 70). A rezolva această ecuație în numere întregi înseamnă a găsi toate punctele de coordonate întregi situate pe hiperbolă. Un astfel de punct se indică ușor, este cel de coordonate  $(0, 1)$ . Toate celelalte (din unghiul  $0 \leq x < y$ , așa cum am arătat se obțin din acesta prin aplicarea succesivă a transformării  $T : (x, y) \rightarrow (y, 3y - x)$ . Această transformare  $T$ , a planului are următoarele proprietăți:

1) Transformă orice dreaptă din plan tot într-o dreaptă (astfel de transformări se numesc liniare).

2) Transformă orice punct de coordonate întregi tot într-un punct de coordonate întregi.

3) Transformă orice hiperbolă de ecuație  $x^2 - 3xy + y^2 = c \neq 0$  în ea însăși (și fiecare dintre cele patru semidrepte cu virfurile în  $(0, 0)$  după care sînt distribuite punctele mulțimii care satisface ecuația  $x^2 - 3xy + y^2 = 0$ ); fiecare punct sub acțiunea transformării  $T$  trece într-o nouă poziție pe aceeași hiperbolă (sau semidreaptă) pe care era; punctul  $(0, 0)$  rămîne neschimbat. O astfel de transformare se numește rotație hiperbolică cu centrul în punctul  $(0, 0)$  prin analogie cu obișnuita rotație „circulară“.

De aceleași proprietăți se bucură și transformarea inversă  $T^{-1}$ . Mai amintim încă o proprietate interesantă a acestor transformări.

4) Aria oricărei figuri nu se schimbă prin aceste transformări. (patrulateralele din figura 70 din semiplanul superior se transformă unul în celălalt prin transformările  $T$  și  $T^{-1}$ ). La fel stau lucrurile și pentru  $m > 3$ . Pentru  $m = 2$  raționamentele se fac la fel, dar interpretarea geometrică intrucitva se schimbă. În locul proprietății 3) transformarea respectivă  $T : (x, y) \rightarrow (y, 2y - x)$  se bucură de proprietate 3'): ea transformă fiecare dreaptă  $y - x = c$  în ea însăși; fiecare punct se deplasează pe dreapta sa (pentru  $c \neq 0$ ) și toate punctele situate pe dreapta  $y - x = 0$  rămîn nemișcate (o astfel de transformare se numește deplasare). Verificați aceasta și desenați respectiva figură singuri.

È interesant că și pentru  $m = 1$ , adică pentru ecuația  $x^2 - xy + y^2 = 1$  (ea este ecuația unei elipse), se poate scrie transformarea respectivă  $T : (x, y) \rightarrow (y, y - x)$  care transformă această ecuație — și în general fiecare elipsă de ecuație  $x^2 - xy + y^2 = c$  în ea însăși). Această transformare se numește rotație eliptică. Ea, ca și pentru  $m > 1$ , transformă toate soluțiile întregi ale ecuației unele în altele dar soluțiile sînt în

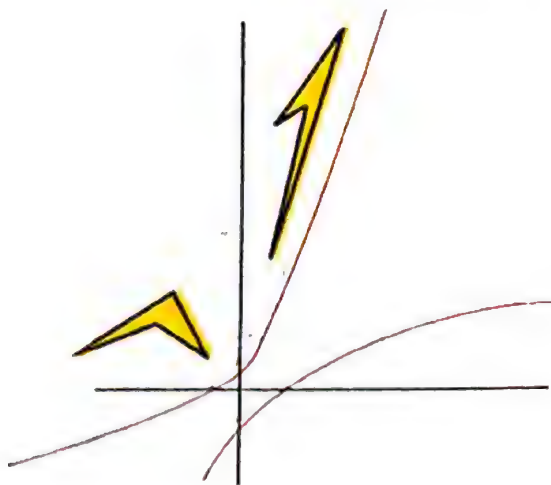


Fig. 70

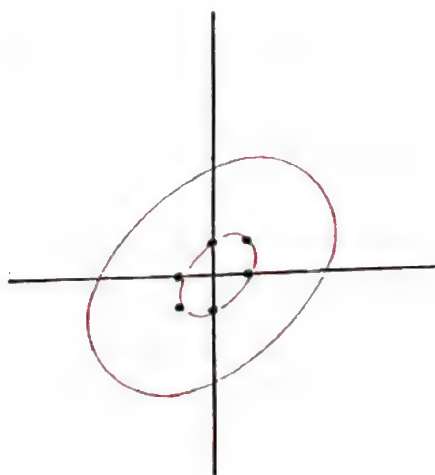


Fig 71

număr finit (nu e de mirare; spre deosebire de hiperbolă și drepte, elipsa este o figură mărginită) și anume șase, iar în locul schemei

$$(0, 1) \xrightarrow{T} (1, 3) \xrightarrow{T} (3, 8) \xrightarrow{T} (8, 21) \rightarrow \dots$$

care se putea scrie pentru ecuația (1), aici se obține următoarea:

$$\begin{array}{ccccccc} & & (-1, 0) & \xrightarrow{T} & (0, 1) & \xrightarrow{T} & (1, 1) \\ T \uparrow & & & & & & \\ & & (-1, -1) & \xleftarrow{T} & (0, -1) & \xleftarrow{T} & (1, 0) \\ & & & & & & \downarrow T \end{array}$$

L.G. Limanov

**M 40.** Să se găsească suma

$$1 \cdot n + 2 \cdot (n - 1) + 3 \cdot (n - 2) + \dots + (n - 1) \cdot 2 + n \cdot 1.$$

Încercați să rezolvați următoarea problemă mai generală: să se găsească suma:

$$S_{n,k} = [1 \cdot 2 \dots k] \cdot [n(n+1) \dots (n-k+1)] + [2 \cdot 3 \dots (k+1)] \cdot [(n-1)(n-2) \dots (n-k)] + [3 \cdot 4 \dots (k+2)] \cdot [(n-2)(n-1) \dots (n-k-1)] + \dots + [(n-k)(n-k+1) \dots (n-1)] \cdot [(k+1)k \dots 2] + [(n-k+1)(n-k+2) \dots n] \cdot [k(k-1) \dots 1]$$

V.N. Berezin

Problema constă din două cerințe dintre care prima, mult mai ușoară decât a doua, admite câteva rezolvări diferite. Dăm una dintre ele destul de interesantă și instructivă urmărind raționamentele lui I. Alekseev și A. Aliaev.

Mai înainte verificăm că

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}. \quad (1)$$

Într-adevăr

$$1 \cdot 2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3}$$

$$2 \cdot 3 = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{3} - \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3}$$

$$3 \cdot 4 = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{3} - \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{3}$$

.....

$$n \cdot (n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} - \frac{(n-1)n(n+1)}{3}.$$

De unde și rezultă prin adunare relația (1).

Scriem acum suma dată sub forma unui tablou triunghiular

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & & & & & & & \\ 1 & 2 & & & & & & \\ 1 & 2 & 3 & & & & & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & & & & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & & & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \dots n-1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \dots n-1 n \end{array}$$



Putem găsi valoarea acestei sume nu numai adunând pe coloană și apoi însumând coloanele, ci din contră se pot efectua întâi sumele pe linii. Întrucît

$$1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2},$$

ajungem la suma scrisă în partea stîngă a egalității (1). Deci obținem

$$\begin{aligned} n \cdot 1 + (n-1) \cdot 2 + \dots + 1 \cdot n &= \frac{1 \cdot 2}{2} + \frac{2 \cdot 3}{2} + \dots + \frac{n(n+1)}{2} = \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)}{6}. \end{aligned}$$

Suma cealaltă din problemă, mai generală, poate fi găsită cu ajutorul unor considerații de analiză combinatorie.

Este evidentă egalitatea:

$$\begin{aligned} [1 \cdot 2 \dots k] \cdot [n(n-1) \dots (n-k+1)] + [2 \cdot 3 \dots (k+1)] \cdot [(n-1)(n-2) \dots (n-k)] + \dots + \\ + [(n-k+1)(n-k+2) \dots n] \cdot [k(k-1) \dots 1] = \\ = (k!)^2 (C_k^k \cdot C_n^k + C_{k+1}^k \cdot C_{n-1}^k + C_{k+2}^k \cdot C_{n-2}^k + \dots + C_n^k \cdot C_k^k) \end{aligned}$$

Fiecare termen de forma  $C_{k+m}^k \cdot C_{n-m}^k$  (unde  $m = 0, 1, 2, \dots, n-k$ ) reprezintă numărul combinărilor de  $n+k$  elemente luate câte  $2k$  dar nu toate posibile ci cele în care la început se aleg  $k$  elemente din  $k+m$  elemente



Fig. 72

Fig. 72. Dintre cele  $m+k+1$  elemente alegem la început unul (astfel încît la stînga sa și la dreapta sa să fie cel puțin cîte  $k$  elemente) ducem prin el o linie și apoi la stînga și la dreapta liniei luăm cîte  $k$  elemente. Pe figură  $m=9$ ,  $k=3$ ,  $m+k+1=13$

determinate și apoi încă  $k$  elemente din restul de  $n-m$ . Intuitiv cele spuse se explică astfel. Așezăm „în linie” cele  $n+k$  elemente date și ducem o linie verticală care să separe  $k+m$  elemente la stînga de  $n-m$  elemente la dreapta. Alegem într-un anumit mod  $k$  elemente la stînga liniei și  $k$  elemente la dreapta și apoi reunim fiecare dintre aceste grupe „din stînga” cu fiecare din aceste grupe „din dreapta”. În total vor fi un număr de  $C_{k+m}^k \cdot C_{n-m}^k$  astfel de combinații.

Acum nu e greu de demonstrat că:

$$C_k^k \cdot C_n^k + C_{k+1}^k \cdot C_{n-1}^k + C_{k+2}^k \cdot C_{n-2}^k + \dots + C_n^k \cdot C_k^k = C_{n+k+1}^{2k+1}. \quad (2)$$

Pentru aceasta este suficient să se stabilească o corespondență biunivocă între combinările de  $n+k+1$  elemente luate câte  $2k+1$  și combinările de  $n+k$  elemente de tipul următor: „ $k$  elemente luate din stînga liniei; linia;  $k$  elemente luate din dreapta liniei” al căror număr total este egal cu suma din partea stîngă a egalității (2). Astfel, suma căutată este egală cu

$$(k!)^2 \cdot C_{n+k+1}^{2k+1} = \frac{(n+k+1)!(k!)^2}{(2k+1)!(n-k)!}.$$

În particular pentru prima cerință a problemei  $k=1$  și de aceea suma

$$\text{este } C_{n+2}^3 = \frac{(n+2)(n+1)n}{6}.$$

V.N. Berezin

**M 41.** Se dă un cerc, diametrul său  $AB$  și un punct  $C$  pe acest diametru. Să se construiască pe cerc două puncte  $X$  și  $Y$  simetrice față de diametrul  $AB$  astfel încât dreapta  $YC$  să fie perpendiculară pe dreapta  $XA^*$ .

Fie  $K$  punctul de intersecție a segmentelor  $XY$  și  $AB$ ; după condiție  $XY \perp AB$  și  $XK = KY$ . Pentru orice punct  $X$  de pe cerc  $\angle AXB = 90^\circ$ . De aceea cerința  $YC \perp AX$  este echivalentă cu oricare dintre următoarele condiții:

$$YC \parallel BX, \quad \angle YCB = \angle CBX,$$

$$\triangle CYX = \triangle KBX, \quad CK = KB \text{ (fig. 73).}$$

Astfel, ridicînd din mijlocul segmentului  $CB$  o perpendiculară pe dreapta  $AB$  la intersecția acesteia cu cercul obținem cele două puncte căutate (oricare dintre ele poate fi luat ca  $X$  respectiv  $Y$ ).

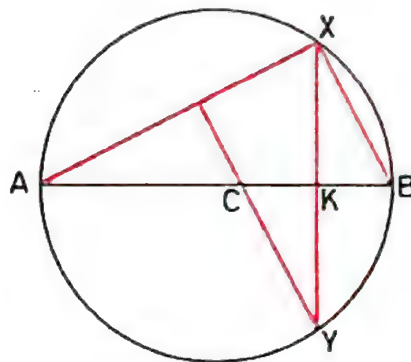


Fig. 73

**M 42.** Cifrele unui număr cu șaptesprezece cifre se scriu în ordine inversă. Numărul obținut se adună cu primul. Să se demonstreze că cel puțin una dintre cifrele acestei sume este pară.

Vom demonstra prin inducție după  $n$  că această afirmație este adevărată pentru orice număr cu  $4n + 1$  cifre. Pentru  $n = 0$  este evident. Să presupunem că pentru un anumit  $n$  ea nu este adevărată, adică există un astfel de număr

$a_1 a_2 a_3 \dots a_{4n-1} a_{4n} a_{4n+1}$  încît în suma

$$\begin{array}{r} a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad \dots \quad a_{4n-1} a_{4n} a_{4n+1} \\ + \\ a_{4n+1} a_{4n} a_{4n-1} \dots a_3 \quad a_2 \quad a_1 \end{array}$$

toate cifrele sînt impare. Atunci suma cifrelor  $a_1 + a_{4n+1}$  este impară și în locurile marcate de săgeți nu se va întîmpla trecerea unei unități la rangul următor. De aceea în suma următoarelor numere cu  $4n - 3$  cifre

$$\begin{array}{r} a_3 \dots a_{4n-1} \\ + \\ a_{4n-1} \dots a_3 \end{array}$$

de asemenea toate cifrele vor fi impare, prin urmare afirmația va fi neadevărată și pentru  $n - 1$ . Demonstrația este terminată (gîndiți-vă de ce obișnuitul „pas de inducție” — „dacă e adevărată pentru  $n$  atunci este adevărată și pentru  $n + 1$ ” poate fi înlocuit cu un pas în sens contrar — „dacă nu e adevărată pentru  $n$  atunci nu e adevărată nici pentru  $n - 1$ ”).

Remarcăm că afirmația dată nu se poate întări: pentru numerele cu un număr par de cifre sau cu  $4n + 3$  cifre, afirmația problemei poate să nu se adevărească:

$$\begin{aligned} 11112222 + 22221111 &= 33333333, \quad 72727262626 + 62626272727 = \\ &= 135353535353. \end{aligned}$$

\* Problemele 41 - 55 au fost date la Olimpiada unională din 1970.



**M 43.** Fiecare latură a unui triunghi echilateral este împărțită în  $n$  părți egale. Prin punctele de diviziune sînt duse drepte paralele cu laturile. Ca rezultat triunghiul se împarte în  $n^2$  triunghiuri mici. Numim „lanț” un șir de triunghiuri în care nici unul nu apare de două ori și în care succesorul are o latură comună cu precedentul. Care este numărul maxim posibil de triunghiuri în lanț?

**Răspuns:**  $n^2 - n + 1$ . Pentru demonstrație, așa cum se întîmplă la olimpiade se face un pas neașteptat: se colorează triunghiul ca la tabla de șah, așa cum se vede în figură. Restul este simplu. În tot triunghiul mare triunghiurile colorate sînt cu  $n$  mai multe decît celelalte (pe fiecare orizontală cele

colorate sînt cu unul mai multe), iar în lanț ele trebuie să alterneze, deci cele colorate vor fi cu unul mai multe decît celelalte.

Unul dintre lanțurile de lungime maximă este indicat în figura 74 (din cele spuse mai sus este clar că pentru ca lanțul să aibă  $n^2 - n + 1$  triunghiuri e necesar și suficient ca el să înceapă și să se termine într-un triunghi colorat și să conțină pe toate cele necolorate).

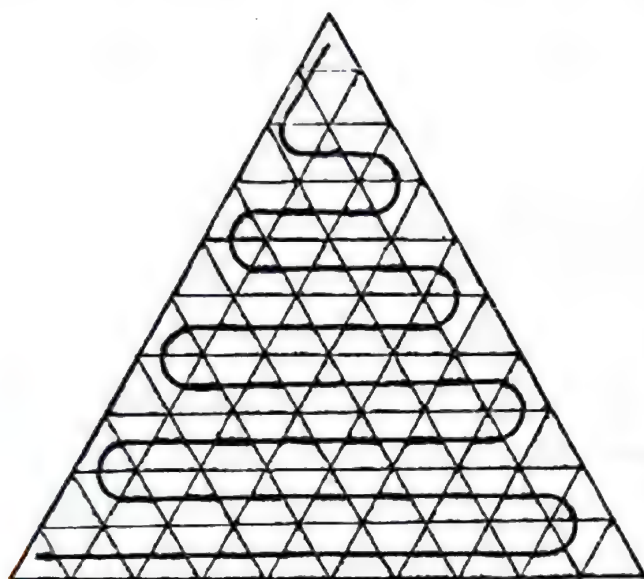


Fig. 74

**M 44.** Să se demonstreze că pentru orice număr natural  $K$  există o infinitate de numere naturale  $T$  care nu au în scrierea lor zecimală zerouri și astfel încît  $T$  și  $KT$  au aceeași sumă a cifrelor.

Presupunem că numărul  $K$  are (în scrierea zecimală)  $k$  cifre. Atunci în rolul lui  $T$  poate fi luat orice număr 999 ... 99 scris cu  $n$  de nouă, unde  $n \geq k$ ; atunci și suma cifrelor lui  $T$  și suma cifrelor lui  $KT$  sînt egale cu  $9n$  (în numărul  $KT = K(10^n - 1)$  cifrele distanțate între ele cu  $n$  ranguri dau însumate 9; de exemplu,

$$743552 \cdot 99999999 = 743552 \cdot (10^8 - 1) = 74355200000000 - 743552 = 74355199256448 \text{ demonstrația aproape evidentă pentru cazul general o lăsam cititorului).}$$

**M 45.** Să se demonstreze că din orice 200 de numere întregi se pot alege 100 astfel încît suma lor să se dividă prin 100.

Încercați să generalizați această problemă: demonstrați că din oricare  $2n - 1$  numere întregi se pot alege  $n$  astfel încît suma lor să se dividă prin  $n$ , unde  $n \geq 2$ .

**L e m ă.** Dacă afirmația problemei este adevărată pentru  $n = a$  și  $n = b$ , atunci este adevărată și pentru  $n = ab$ .

Să observăm că proprietatea „suma a  $n$  numere întregi  $x_1, \dots, x_n$  se divide prin  $n$ ” se poate formula și așa: media aritmetică  $\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$  este număr întreg.

Astfel, fie date  $2ab - 1$  numere întregi. Întrucît  $n = b$  și  $2ab - 1 > 2b - 1$ , din cele  $2ab - 1$  numere se pot alege  $b$ , astfel încît suma acestora se divide prin  $b$ . Apoi din cele rămase (dacă nu sînt mai puține decît  $2b - 1$ ) alegem încă  $b$  numere care se bucură de această proprietate ș.a.m.d.

Întrucît

$$2ab - 1 = (2a - 1)b + (b - 1),$$

atunci această operație se poate repeta de  $2a - 1$  ori și să se obțină  $2a - 1$  alegeri de câte  $b$  numere, astfel încît media aritmetică a celor  $b$  numere este întreagă. Întrucît afirmația este adevărată pentru  $n = a$  din aceste  $2a - 1$  medii aritmetice se pot alege  $a$ , astfel încît suma acestora să se dividă prin  $a$ . E clar că atunci că cele  $ab$  numere formate din cele  $a$  alegeri de către  $b$  numere au proprietatea cerută: suma lor se divide prin  $ab$ . Lema e demonstrată (această lema ca și problema sînt făcute de Iu. I. Ionin).

Astfel, pentru a demonstra afirmația problemei pentru produsul  $n = a_1 \cdot a_2 \dots a_n$  e suficient să se demonstreze pentru factorii săi  $n = a_1, n = a_2, \dots, n = a_k$  (și să se aplice de cîteva ori lema). De aceea e suficient să se demonstreze afirmația pentru factorii primi ai numărului  $n$ . De exemplu, pentru a rezolva problema cînd  $n = 100$ , e suficient să se demonstreze două afirmații: „din orice 3 numere întregi se pot alege 2 a căror sumă se divide prin 2” și „din orice 9 numere întregi se pot alege 5 a căror sumă se divide prin 5”. Prima este evidentă iar a doua se poate demonstra printr-un raționament scurt. Iată demonstrația pentru orice  $n$  prim.

**Te o r e m ă.** Din orice  $2p - 1$  numere întregi se pot alege  $p$ , astfel încît suma lor să se dividă prin  $p$  ( $p$  un număr prim arbitrar).

Dăm demonstrația propusă de S. Voronin (Moscova).

E clar că în demonstrație vom considera toate numerele „după modulul  $p$ ” adică ne interesează numai ce rest 0, 1, 2, ...,  $p - 1$  dă cutare sau cutare număr la împărțirea prin  $p$ . E comod să reprezentăm aceste resturi (mai ales dacă va fi vorba de „adunare după modulul  $p$ ” pe un cerc (vezi figura 75).

**L e m ă.** Fie date  $r$  numere întregi  $b_1, b_2, \dots, b_r$ ;  $0 < b_i < p$  pentru toți  $i = 1, 2, \dots, r$  și  $0 < r < p$  ( $p$  prim). Atunci din aceste numere se pot face  $r + 1$  sume care dau resturi diferite la împărțirea prin  $p$  (vom lua suma formată dintr-o „mulțime vidă de termeni” pe care o considerăm egală cu zero, sume dintr-un singur termen, din doi ... din  $r$  termeni).

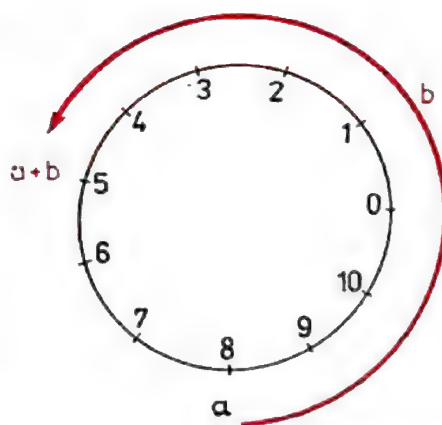


Fig. 75. Pentru ca să se găsească suma  $a + b$  după modulul  $p$ , trebuie să se numere de la  $a$  în sens invers acelor ceasului  $b$  unități (pe desenul care corespunde la  $p = 11$  e reprezentată suma  $8 + 8$  care după modulul 11 dă 5)



**Demonstrație.** Pentru  $r = 1$  este evident: sumele dau ca resturi 0 și  $b_1$ . Să presupunem că este adevărat pentru  $r = k < p - 1$  și neadevărată pentru  $r = k + 1$  și vom ajunge la o contradicție. Presupunem că sumele formate din  $k$  termeni  $b_1, b_2, \dots, b_k$  dau  $k + 1$  resturi diferite 0,  $s_1, \dots, s_k$ . Atunci, întrucât după adăugarea lui  $b = b_{k+1}$ , numărul sumelor diferite nu trebuie să se mărească, toate sumele

$$0 + b, s_1 + b, \dots, s_k + b$$

(după modulul  $p$ ) vor fi cuprinse în mulțimea

$$\{0, s_1, \dots, s_k\},$$

Cu alte cuvinte, dacă la orice element al acestei mulțimi se adaugă  $b$ , atunci se obține din nou un element din aceeași mulțime. Astfel această mulțime conține elementele  $0, b, 2b, 3b, \dots, (p - 1)b$ .

Dar este clar că toate aceste elemente sînt diferite (după modul): diferența  $ib - jb = (i - j)b$ , unde  $0 < i - j < p$  și  $0 < b < p$  nu poate să se dividă prin  $p$  întrucât  $p$  este prim. Astfel am demonstrat că mulțimea  $\{0, s_1, \dots, s_k\}$  conține  $p$  elemente diferite deși am presupus că  $k + 1 < p$ . Lema e demonstrată.

**Demonstrația teoremei.** Fie

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_p \leq a_{p+1} \leq \dots \leq a_{2p-1}$$

resturile împărțirii celor  $2p - 1$  numere la  $p$ . Să considerăm încă următoarele  $p$  numere:

$$a_{p+1} - a_2, a_{p+2} - a_3, \dots, a_{2p-1} - a_p. \quad (*)$$

Dacă unul oarecare dintre ele este egal cu zero, de exemplu

$$a_{p+j} - a_{j+1} = 0, \text{ atunci } a_{j+1} = a_{j+2} = \dots = a_{j+p}$$

iar suma celor  $p$  numere corespunzătoare se divide la  $p$ . Rămîne să examinăm cazul în care toate numerele (\*) sînt nenule.

Vom găsi restul  $x$  al împărțirii sumei  $a_1 + a_2 + \dots + a_p$  la  $p$ . Dacă  $x = 0$ , atunci totul e clar. Dacă  $x \neq 0$  atunci, folosind lema, putem forma din diferențele (\*) o sumă care să dea restul  $p - x$  prin împărțirea cu  $p$ . Adăugînd respectivele diferențe la  $a_1 + a_2 + \dots + a_p$  și efectuînd reducerile evidente, obținem o sumă formată din  $p$  termeni care se divide prin  $p$ .

Utilizînd rezultatul acestei probleme, e ușor să se stabilească faptul că afirmația „Din oricare  $a$  numere întregi se pot alege  $b$  numere  $a$  căror sumă să se dividă prin  $c$ ” (unde  $a, b, c$  sînt niște numere naturale concrete) este adevărată atunci și numai atunci cînd  $b$  se divide la  $c$  și  $a \geq b + c - 1$ .

N.B. Vasiliev

**M 46.** Cîte laturi ale unui poligon convex pot să fie egale cu cea mai mare dintre diagonale?

G. Galperin

**Răspuns:** două, una sau nici una.

Exemple pentru fiecare dintre aceste cazuri pot fi construite ușor. Poligoane care să aibă trei sau mai multe laturi egale cu cea mai mare dintre diagonale nu pot să fie, întrucât două laturi egale cu cea mai mare dintre diagonale, trebuie să aibă neapărat un vîrf comun (vezi figura 76), iar trei laturi fiecare două dintre ele avînd un vîrf comun pot fi numai la triunghi dar acesta nu are diagonale.

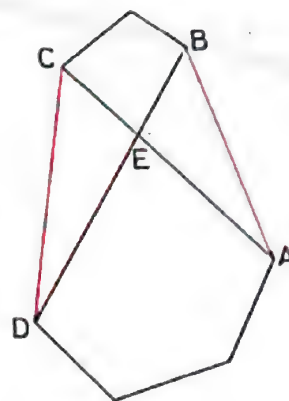


Fig. 76. Cazul  $AB = CD > \max \{AC, BD\}$  nu e posibil pentru că  $AB + CD < AE + EB + CE + ED = AC + BD$ .

**M 47.** Din cifrele 1 și 2 să se formeze cinci numere de câte  $n$  cifre, astfel încît la oricare două numere să le coincidă cifrele în exact  $m$  ranguri dar în nici un rang să nu coincidă cifrele tuturor celor cinci numere. Să se demonstreze că  $\frac{2}{5} \leq \frac{m}{n} \leq \frac{3}{5}$ .

Vom scrie numerele unele sub altele. În fiecare rang („coloană”) sînt 5 cifre. Din ele se pot face 10 perechi (neordonate). În toate cele  $n$  coloane vor fi  $10n$  astfel de perechi. Să evaluăm cîte perechi dintre acestea vor fi formate din cifre identice, adică perechile (1, 1) și (2, 2). În fiecare coloană astfel de perechi sînt sau 4 sau 6. De aceea, numărul total de astfel de perechi nu e mai mic decît  $4n$  și nu e mai mare decît  $6n$ . Pe de altă parte numărul acestor perechi este  $10m$ , pentru că prin comparația oricăror două numere după toate cele  $n$  ranguri, din ipoteză se obțin exact  $m$  astfel de perechi, iar numărul tuturor perechilor posibile la 5 numere este 10.

Astfel  $4n \leq 10m \leq 6n$  ceea ce și trebuia demonstrat (vezi fig. 77).

**M 48.** Într-un triunghi ascuțitunghic  $ABC$ , bisectoarea  $AD$ , mediana  $BM$  și înălțimea  $CH$  se intersectează într-un punct. Să se demonstreze că unghiul  $BAC$  este mai mare de  $45^\circ$ .

Nu e greu de demonstrat că pentru un unghi dat  $\angle BAC = \alpha < \frac{\pi}{2}$  există numai un triunghi (abstracție făcînd de o asemănare)  $ABC$  în care înălțimea  $CH$  bisectoarea  $AD$  și mediana  $BM$  să se intersecteze într-un punct. Într-adevăr, luînd pe o latură a unghiului  $\angle A = \alpha$  (arbitrar) segmentul  $AC$ , ducînd pe cealaltă latură a unghiului perpendiculara  $CH$  și notînd punctul ei de intersecție cu bisectoarea unghiului  $A$  prin  $O$ , vom găsi punctul  $B$  de intersecție a celei de a doua laturi a unghiului cu dreapta  $OM$  (unde  $M$  este mijlocul segmentului  $AC$ ) și astfel construim triunghiul cerut  $ABC$ , evident că dacă sînt date unghiul  $\angle A$  și  $AC$  triunghiul este determinat în mod unic. Remarcăm că

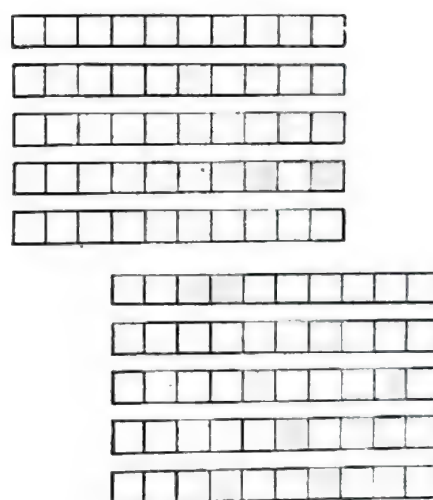


Fig. 77. Aici sînt prezentate cazuri în care în Inegalitățile din ipoteza problemei avem egalitatea. Cifra 1 corespunde pătratelor necolorate, cifra 2 celorlalte.



astfel unghiul  $B$  este ascuțit (întrucât punctul  $H$ , piciorul înălțimii, este situat pe latura  $AB$ ).

Să demonstrăm că dacă  $\angle A < \frac{\pi}{4}$ , atunci  $\angle ACB > \frac{\pi}{2}$ . Vom lua pe dreapta  $AB$  segmentul  $HB_1 = AH$ . Atunci bisectoarea  $B_1F$  a unghiului  $B_1$  a triunghiului isoscel  $AB_1C$  va trece prin punctul  $O$ . Întrucât  $\frac{AF}{FC} = \frac{AB_1}{B_1C} > 1$ , atunci punctul  $M$  va fi situat între  $A$  și  $F$ , de aceea  $B_1$  va fi situat între  $A$  și  $B$  și  $\angle BCA > \angle B_1CA > \frac{\pi}{2}$ .

În această problemă se poate obține și un rezultat mai exact: să se găsească cea mai mică valoare a unghiului  $\alpha$  cu condiția ca  $\angle ACB = \gamma < \frac{\pi}{2}$ . Pentru aceasta vom exprima pe  $\gamma$  ca funcție de  $\alpha$ . Ducem  $HE \parallel BM$  ( $E$  un punct pe  $AC$ ). Atunci (vezi figura 78):

$$\frac{EM}{MC} = \frac{HO}{OC} = \frac{AH}{AC} = \cos \alpha, \quad \frac{HB}{AH} = \frac{EM}{AE} = \frac{\cos \alpha}{1 - \cos \alpha},$$

$$\frac{HB}{HC} = \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha (1 - \cos \alpha)}.$$

$$\gamma = \gamma(\alpha) = \frac{\pi}{2} - \alpha + \arctg \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha (1 - \cos \alpha)}.$$

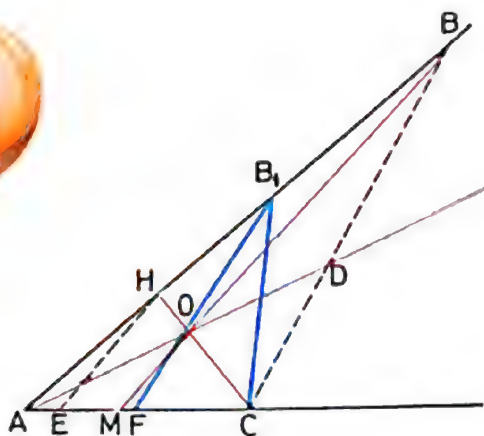


Fig. 78

De aici este evident că funcția  $\gamma = \gamma(\alpha)$  pe segmentul  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$  este monoton descrescătoare (cu cât crește  $\alpha$  cu atât descresce  $\cos \alpha$  și crește  $\sin \alpha$ , deci se micșorează fracția de sub arctg). Vom găsi acum  $\alpha$  pentru care  $\gamma(\alpha) = \frac{\pi}{2}$ . Această ecuație se reduce la:  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ,  $\sin^2 \alpha (1 - \cos \alpha) = \cos^3 \alpha$ , de unde  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ . Astfel dacă  $\gamma < \frac{\pi}{2}$  atunci  $\alpha > \alpha_0 = \arccos \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$  ( $\alpha_0 >$

$\frac{\pi}{4}$ , întrucât  $\frac{\sqrt{5} - 1}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2}$ ; cum ne putem convinge din tabele, valoarea unghiului  $\alpha_0$  în grade este aproximativ  $51^\circ 50'$ ).

**M 49.** Pe niște cartoane se scriu numerele de la 11111 la 99999 inclusiv. Apoi aceste cartoane se aranjează unul după altul într-o ordine oarecare. Să se arate că numărul cu 444445 cifre obținut nu poate fi putere a lui 2.

Este ușor demonstrat că acest număr se împarte la 11111, folosind faptul că numerele  $10^5 A$  și  $A$ , pentru orice întreg  $A$  dau aceleași resturi la împărțirea cu 11111, iar suma  $11111 + 11112 + \dots + 99998 + 99999$  se împarte la 11111. Dar dacă acest număr se împarte la 11111 el nu poate fi putere a lui 2 (din unicitatea descompunerii în factori primi).

N.B. Vasiliev

**M 50.** Virfurile unui poligon regulat cu  $n$  laturi se colorează în culori diferite, astfel încît punctele cu aceeași culoare sînt vîrfurile unor poligoane regulate. Să se demonstreze că printre aceste poligoane se găsesc două egale.

N. Vasiliev

Să presupunem că virfurile unui poligon regulat cu  $n$  laturi au fost colorate astfel încît virfurile de aceeași culoare formează poligoane regulate diferite: cu  $m_1$  laturi, cu  $m_2$  laturi, cu  $m_3$  laturi, ..., unde  $m_1 < m_2 < m_3 < \dots$ . Cel mai mic dintre aceste numere  $m_1$  va juca un rol deosebit în raționamentele noastre și îl vom nota simplu prin  $m$ .

Ducem din centrul  $O$  al poligonului cu  $n$  laturi, vectori în toate virfurile sale; îi notăm în ordine:  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  (vezi figura 79, a). Atunci

$$\sphericalangle a_1 a_2 = \sphericalangle a_2 a_3 = \dots = \sphericalangle a_{n-1} a_n = \sphericalangle a_n a_1 = \frac{2\pi}{n}.$$

Aici și mai departe, prin  $\sphericalangle ab$  înțelegem mărimea unghiului (cel mai mic, pozitiv) cu care trebuie să se rotească în sens contrar acelor ceasului vectorul  $a$  pentru ca el să coincidă cu  $b$ ; totdeauna  $0 \leq \sphericalangle ab < 2\pi$ .

Vom spune că vectorii  $c_1, c_2, c_3, \dots, c_q$  din plan, duși din punctul  $O$  formează un sistem regulat dacă au lungimi egale și formează între ei unghiuri egale

$$\sphericalangle c_1 c_2 = \sphericalangle c_2 c_3 = \dots = \sphericalangle c_{q-1} c_q = \sphericalangle c_q c_1 = \alpha > 0.$$

Ne e necesar următorul fapt aproape evident (demonstrația sa este dată la sfîrșitul rezolvării.)

**L e m a.** Suma vectorilor care formează un sistem regulat este egală cu zero.

Înainte de a folosi lema, să facem cu vectorii noștri următoarea transformare. Să considerăm că vectorul  $a_1$  ajunge în unul dintre vîrfurile poligonului cu  $m$  laturi. Îl vom nota simplu  $a$  și vom socoti toate unghiurile de la el (în sens pozitiv). Vom nota prin  $b_i$  vectorul care se obține din  $a$  prin rotația de unghi  $m \sphericalangle aa_i$  (pentru fiecare  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ). Prin transformarea  $a_i \rightarrow b_i$  pe care am definit-o\* (pe figura 79, b este reprezentată o astfel de transformare pentru  $m = 3$ ) unghiurile dintre vectori se măresc de  $m$  ori; mai exact: dacă  $m \sphericalangle a_i a_j < 2\pi$ , atunci  $\sphericalangle b_i b_j = m \sphericalangle a_i a_j$ . De aceea, sistemul regulat de vectori cu unghiul  $\alpha < \frac{2\pi}{m}$  este transferat prin această transformare tot într-un sistem regulat. În particular suma tuturor vectorilor  $b_1, b_2, \dots, b_n$  este egală cu zero.

Să calculăm această sumă în două moduri: vom găsi la început suma tuturor vectorilor corespunzători virfurilor de aceeași culoare și apoi vom aduna aceste sume. Să considerăm la început toți vectorii  $a_i$  care ajung în vîrfurile poligonului cu  $m_k$  laturi, unde  $m_k > m$ . Acesta este un sistem regulat de vectori cu unghi  $\frac{2\pi}{m_k} < \frac{2\pi}{m}$ . După transformare din el se obține tot un sistem regulat de vectori și suma vectorilor obținuți este egală cu zero.

\* Pentru aceia care cunosc numerele complexe, remarcăm că dacă punctul  $O$  este zero din planul complex iar extremitatea vectorului  $a$  este unitatea, atunci această transformare este ridicarea la puterea  $m$ :  $z \rightarrow z^m$ .



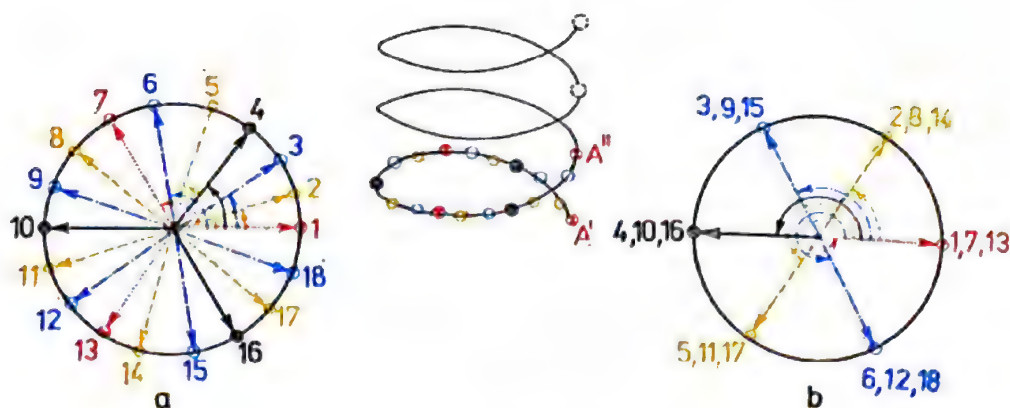


Fig. 79. Imaginați-vă că punctele colorate din figura 79-a sînt niște mărgelile înșirate pe o sîrmă îndoită în spirală. Noi privim această spirală de sus și de aceea cele două mărgelile însemnate la fel, din marginea desenului,  $A'$  și  $A''$  se proiectează pentru noi într-un singur punct  $A$ . Dacă acum fixăm una dintre mărgelile  $A'$ , iar pe  $A''$  o deplasăm pe sîrmă încă două spire, ajungem la desenul 79-b, în care unghiurile dintre doi vectori vecini s-au mărit de 3 ori.

Să considerăm acum vectorii care ajung în virfurile poligonului cu  $m$  laturi. Unghiul dintre doi vectori vecini este egal cu  $\frac{2\pi}{m}$ , iar după transformare, toți acești  $m$  vectori vor coincide cu vectorul  $a$ , așa că suma lor va fi egală cu  $ma$  (în figura 79 acest lucru se întîmplă cu vectorii desenați cu linie punctată și linie plină).

Astfel s-a obținut o contradicție: pe de o parte suma tuturor vectorilor  $b_i$  este egală cu zero, pe de alta este  $ma$ . De aceea presupunerea noastră nu e adevărată.

**Demonstrația lemei.** Din punct de vedere fizic, această afirmație este evidentă din considerente de simetrie. Un mod de a transforma aceste considerații într-o demonstrație riguroasă este următorul: Presupunem că  $c_1 + c_2 + \dots + c_n = s$ . Rotim toți vectorii  $c_1, c_2, \dots, c_n$  în jurul punctului  $O$  cu unghiul  $\alpha$ . Atunci desigur că și suma lor se rotește cu  $\alpha$ . Dar după ipoteză, întregul sistem format din  $n$  vectori, după rotația cu unghiul  $\alpha$ , coincide cu el însuși ( $c_1$  va ocupa locul lui  $c_2$ ,  $c_2$  al lui  $c_3$  ...  $c_n$  al lui  $c_1$ ). De aceea, vectorul  $s$ , după rotația cu unghiul  $\alpha$ , nu trebuie să se modifice. Aceasta se poate întîmpla, numai dacă  $s = 0$ .

Se poate demonstra că un sistem regulat format din  $q$  vectori, în cazul general, constă din  $q = dr$  vectori duși din punctul  $O$  în virfurile unui poligon regulat cu  $r$  laturi, astfel încît în fiecare vîrf sînt duși cîte  $d$  vectori egali (dacă includem aici și „douălatelele” adică perechile de vectori opuși, corespunzătoare lui  $m = 2$ );  $\alpha$  poate să ia orice valoare  $2\pi k/r$ , unde  $k$  și  $r$  sînt prime între ele și  $0 < k < r$ . Am lăsat această observație la sfîrșit intrucît în demonstrație nu am explicat detaliat cum se construiește un sistem regulat de vectori  $b_i$ . Dar desigur că analizînd demonstrația în profunzime, este util să clarificăm acest lucru.

Ideea rezolvării expuse aparține lui A. Livșiț (Leningrad). Analizînd atent această demonstrație, se poate demonstra că orice descompunere a mulțimii virfurilor unui poligon regulat cu  $n$  laturi în cîteva submulțimi corespunzătoare virfurilor unor poligoane regulate (nu neapărat diferite) se poate face în felul următor: la început se desface poligonul cu  $n$  laturi în cîteva poligoane cu  $m$  laturi (pentru aceasta este necesar ca  $n$  să se dividă la  $m$ ), apoi unul dintre poligoanele regulate obținute se desface din nou în cîteva poligoane regulate egale (vezi figura 79) ș.a.m.d. de mai multe ori. Cititorul, care dorește

să analizeze mai amănunțit acest lucru, este sfătuit să se gândească la legătura problemei acesteia „unidimensională” cu problema M9 „bidimensională” și mai înainte să stabilească echivalența problemei M50 cu următoarea: să se demonstreze că mulțimea tuturor numerelor întregi nu se poate descompune într-un număr finit de progresii aritmetice (infinite în ambele sensuri) de rații două câte două diferite.

**M 51.** *Să se demonstreze că dacă produsul a trei numere pozitive este egal cu unu și suma acestor numere este strict mai mare decât suma inverselor lor, atunci unul și numai unul dintre aceste numere este mai mare decât unu.*

Fie  $a, b, c$  numerele date. Atunci  $abc = 1$  și  $(a-1)(b-1)(c-1) = abc - ab - bc - ac + a + b + c - 1 = a + b + c - \frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c} > 0$  prin urmare, dintre cele trei numere  $a-1, b-1, c-1$ , două sînt negative și unul pozitiv (toate trei nu pot fi pozitive, întrucît  $abc = 1$ ).

**M 52.** *Se dau cinci segmente astfel încît cu oricare trei dintre ele se poate face un triunghi. Să se demonstreze că cel puțin unul dintre aceste triunghiuri este ascuțitunghic.*

M. Serov

Din segmentele  $x \leq y \leq z$  se poate face un triunghi dacă  $z < x + y$  și acesta va fi ascuțitunghic dacă  $z^2 < x^2 + y^2$ . Să presupunem că există cinci segmente  $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \leq a_5$  astfel încît din oricare trei se poate face un triunghi dar nu ascuțitunghic. Atunci

$$a_5^2 \geq a_4^2 + a_3^2, a_4^2 \geq a_3^2 + a_2^2, a_3^2 \geq a_2^2 + a_1^2,$$

și de aceea

$$a_5^2 \geq 2a_3^2 + a_2^2 \geq 3a_2^2 + 2a_1^2 \geq a_2^2 + 2a_1a_2 + a_1^2 = (a_2 + a_1)^2$$

adică  $a_5 \geq a_2 + a_1$  și prin urmare din segmentele  $a_1, a_2, a_5$  nu se poate construi un triunghi.

**M 53.** *În triunghiul ABC prin mijlocul M al laturii BC și prin centrul O al cercului înscris se duce dreapta MO care intersectează înălțimea AH în punctul E. Să se demonstreze că segmentul AE este egal cu raza cercului înscris.*

Notăm lungimile laturilor opuse vîrfurilor A, B, C respectiv prin  $a, b, c$ . Se poate considera  $b > c$  ( $b \neq c$  fiindcă altfel dreptele MO și AH nu s-ar intersecta ci ar coincide). Ducem perpendiculara  $OP = r$  pe BC (fig. 80).

Atunci

$$MC = \frac{a}{2}, PC = \frac{a+b-c}{2}, HC = \frac{a^2+b^2-c^2}{2a},$$

$$\frac{EH}{OP} = \frac{HM}{PM} = \frac{HC - MC}{PC - MC} = \frac{2HC - a}{b - c} = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - a^2}{a(b - c)} = \frac{b + c}{a}$$

$$\frac{AE}{r} = \frac{AH}{r} - \frac{EH}{r} = \frac{a + b + c}{a} - \frac{b + c}{a} = 1.$$



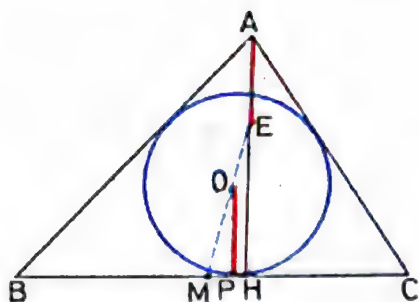


Fig. 80

O altă rezolvare geometrică a acestei probleme se bazează pe următoarea lemă: dacă prelungim raza  $PO$  pînă la diametrul  $PQ$  al cercului înscris și ducem dreapta  $AQ$  pînă la intersecția în punctul  $R$  cu latura  $BC$ , atunci segmentele  $BP$  și  $CR$  vor fi egale. Propunem cititorului să demonstreze și să utilizeze această lemă.

**M 54.** Două dreptunghiuri congruente sînt situate astfel încît contururile lor se intersectează în opt puncte. Să se demonstreze că aria părții comune este mai mare decît jumătatea ariei unuia.

G. Galperin

Fie date laturile  $a$  și  $b$  ale dreptunghiurilor. Remarcăm că pe laturile fiecărui dreptunghi sînt situate exact două puncte de intersecție cu două laturi vecine ale celui alt dreptunghi. (Se demonstrează ușor că dacă sînt în total 8 puncte de intersecție, atunci pe fiecare latură trebuie să fie cel puțin două puncte și că intersecția laturii unui dreptunghi cu ambele laturi paralele ale celui alt dreptunghi este imposibilă.) Fie  $A$  și  $C$  punctele în care se intersectează laturile egale cu  $a$ , ale celor două dreptunghiuri;  $B$  și  $D$  punctele în care se intersectează laturile egale cu  $b$ . Atunci este evident că segmentul  $AC$  servește ca bisectoare a unghiului dintre laturile  $a$  duse prin punctul  $A$  (pentru aceasta este suficient să coborîm pe aceste laturi perpendiculare din punctul  $C$  și să examinăm perechea de triunghiuri congruente astfel formate). La fel  $BD$  este bisectoarea unghiului dintre laturile de lungime  $b$  duse prin punctul  $B$ . Prin urmare,  $AC \perp BD$  și de aceea aria patrulaterului convex cu diagonalele  $AC$  și  $BD$  este  $\frac{AC \cdot BD}{2}$ . Întrucît  $AC \geq b$  și  $BD \geq a$ , chiar această arie (și cu

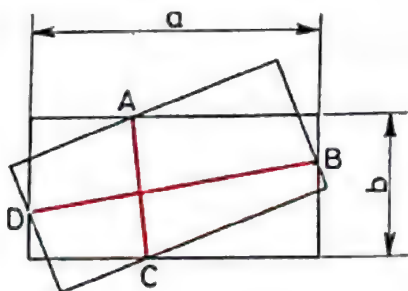


Fig. 81

atît mai mult întreaga arie a părții comune a celor două dreptunghiuri) este mai mare decît  $\frac{ab}{2}$ .

Cum arată rezolvările trimise, ceea ce a fost mai greu în această problemă a fost faptul ca să se demonstreze riguros indiferent de cazurile de figură posibile. De aceea, anume nu ne-am referit în demonstrație la figura dată, pentru ca să subliniem că rezolvarea se poate face formal fără a ne referi la un desen concret.

**M 55.** Toate numerele naturale scrise în sistemul zecimal cu nu mai mult de  $n$  cifre se împart în două grupe. În prima grupă intră toate numerele pentru care suma cifrelor este impară, în a doua, în care este pară. Să se demonstreze că dacă  $1 \leq k < n$ , atunci suma puterilor  $k$  a tuturor numerelor din prima grupă este egală cu suma puterilor  $k$  ale tuturor numerelor din grupa a doua.

Vom demonstra această afirmație prin inducție după  $n$ . Vom conveni ca în fața numerelor cu mai puțin de  $n$  cifre să scriem atîția de zero încît să aibă  $n$  cifre toate numerele.

Justețea afirmației pentru  $n = 2$  (atunci  $k$  poate să ia numai o valoare  $k = 1$ ) se verifică ușor:

Numere cu suma cifrelor impară	Numere cu suma cifrelor pară
$01 + 03 + 05 + \dots + 09 + 10 + 12 + \dots$ $+ 18 + 21 + 23 + \dots + 29 + 30 + 32 +$ $+ \dots + 38 + \dots +$ $+ 81 + 83 + \dots + 89 + 90 + 92 + \dots +$ $+ 98 = 5(00 + 20 + \dots + 80) + 5(10 +$ $+ 30 + \dots + 90) + 5(01 + 03 + \dots +$ $+ 09) + 5(00 + 02 + \dots + 08)$	$00 + 02 + \dots + 08 + 11 + 13 + \dots + 19$ $+ 20 + 22 + \dots + 28 + 31 + 33 + \dots +$ $+ 39 + \dots +$ $+ 80 + 82 + \dots + 88 + 91 + 93 + \dots +$ $+ 99 = 5(00 + 20 + \dots + 80) + 5(10 +$ $+ 30 + \dots + 90) + 5(00 + 02 + \dots + 08)$ $+ 5(01 + 03 + \dots + 09)$

Trecerea de la  $n$  la  $n + 1$  nu e mult mai grea. Pentru evitarea neclarității și pentru a nu mai folosi atîtea puncte e util să se folosească semnul sumei  $\Sigma$ . Vom nota numerele cu  $n$  cifre avînd suma cifrelor impară (începînd cu 00 ... 00) prin litera  $a$  și cele cu suma cifrelor pară (începînd cu 00 ... 01) prin litera  $b$ . E ușor de văzut că fiecare dintre variabilele  $a$  și  $b$  pot să ia  $5 \cdot 10^{n-1}$  valori diferite. Mai departe, fie  $A$  care ia valorile  $A = 10^n \cdot p$ , unde  $p$  este una dintre cifrele 0, 2, 4, 6, 8, iar  $B$ , valorile  $B = 10^n q$ , unde  $q$  este una dintre cifrele 1, 3, 5, 7, 9. Trebuie să demonstrăm că pentru orice număr natural  $k < n$ ,

$$\Sigma(A + b)^k + \Sigma(B + a)^k = \Sigma(A + a)^k + \Sigma(B + b)^k \quad (*)$$

(fiecare sumă se ia după toate perechile posibile de valori ale literelor din parantezele rotunde de sub semnul  $\Sigma$ ) cu condiția că deja s-a demonstrat egalitatea sumelor  $\Sigma a^j$  și  $\Sigma b^j$  pentru toți  $j \leq n - 1$ :  $\Sigma a^k = \Sigma b^k = S_k$ . Desfacem în (\*) fiecare paranteză utilizînd formula

$$(X + y)^k = X^k + C_k^1 X^{k-1} y + \dots + C_k^j X^{k-j} y^j + \dots + y^k$$

și verificăm că pentru fiecare  $j$  separat sumele termenilor de forma  $X^{k-j} y^j$  din partea dreaptă și stîngă a egalității sînt egale (coeficientul  $C_k^j$  nu-l mai scriem):

	Numere cu suma cifrelor impară	Numere cu suma cifrelor pară
Suma termenilor de forma $X^k$	$5 \cdot 10^{n-1} \Sigma A^k + 5 \cdot 10^{n-1} \Sigma B^k$	$5 \cdot 10^{n-1} \Sigma A^k + 5 \cdot 10^{n-1} \Sigma B^k$
Suma termenilor de forma $X^{k-j} y^j$ $1 \leq j \leq k - 1$	$\Sigma A^{k-j} b^j + \Sigma B^{k-j} a^j =$ $= \Sigma b^j \Sigma A^{k-j} + \Sigma a^j \Sigma B^{k-j} =$ $= s_j (\Sigma A^{k-j} + \Sigma B^{k-j})$	$\Sigma A^{k-j} a^j + \Sigma B^{k-j} b^j =$ $= \Sigma a^j \Sigma A^{k-j} + \Sigma b^j \Sigma B^{k-j} =$ $= s_j (\Sigma A^{k-j} + \Sigma B^{k-j})$
Suma termenilor de formă $y^k$	$5 \Sigma b^k + 5 \Sigma a^k$	$5 \Sigma a^k + 5 \Sigma b^k$



Observăm că raționamentul precedent pentru  $n = 2$  cu ajutorul unor notații analoge se poate scrie astfel:

$\Sigma(A + b) + \Sigma(b + a) = 5\Sigma A + 5\Sigma a + 5\Sigma b + 5\Sigma a$ ,  $\Sigma(A + a) + \Sigma(B + b) = 5\Sigma A + 5\Sigma a + 5\Sigma B + 5\Sigma b$  pentru  $k = 1$  rămân numai primul și ultimul termen corespunzător lui  $j = 0$  și  $j = k$ .

E ușor de văzut că afirmația problemei este adevărată nu numai în sistemul zecimal ci în orice altă bază  $d$ , unde  $d$  este un număr par (gândiți-vă unde s-a folosit în demonstrația noastră paritatea lui  $d = 10$ ). Dacă se ia  $d = 2$  se obține următorul șir de egalități interesante:

$$\begin{aligned} 1 + 2 &= 3 \\ 1 + 2 + 4 + 7 &= 3 + 5 + 6 \\ 1^2 + 2^2 + 4^2 + 7^2 &= 3^2 + 5^2 + 6^2 \\ 1 + 2 + 4 + 7 + 8 + 11 + 13 + 14 &= 3 + 5 + 6 + 9 + 10 + 12 + 15 \\ 1^2 + 2^2 + 4^2 + 7^2 + 8^2 + 11^2 + 13^2 + 14^2 &= 3^2 + 5^2 + 6^2 + 9^2 + 10^2 + 12^2 + 15^2 \\ 1^3 + 2^3 + 4^3 + 7^3 + 8^3 + 11^3 + 13^3 + 14^3 &= 3^3 + 5^3 + 6^3 + 9^3 + 10^3 + 12^3 + 15^3 \\ &\dots \end{aligned}$$

**M 56.** Pe o circumferință se scriu într-o ordine arbitrară patru de 1 și cinci de 0. Apoi, în intervalul dintre două numere la fel se scrie 0 iar între două diferite se scrie 1, iar primele cifre se șterg. Să se arate că ori de câte ori am repeta procedeul nu se vor obține nouă de 0.\*

Se poate demonstra ușor chiar o afirmație mai tare: dacă pe o circumferință se scriu un număr impar  $N$  de 1 și de 0 — să fie și 0 și 1 — atunci ori de câte ori am repeta procedeul descris în problemă nu vom obține  $N$  de 0. Într-adevăr, să presupunem că la un anumit pas 1  $t$ , am obținut prima dată numai zerouri. Atunci la pasul  $t - 1$  toate cele  $N$  cifre ar fi fost la fel, și nu toate 0, deci toate 1, iar la pasul  $t - 2$  fiecare două cifre vecine ar trebui să fie diferite, dar întrucât  $N$  este impar o asemenea dispoziție a lui 0 și 1 pe circumferință, nu e posibilă.

Totodată am răspuns (deocamdată pentru  $N$  impar) la chestiunea care a rămas neexaminată în rezolvarea problemei M19; în această problemă zerourile se numeau „celule liniștite” iar unitățile „celule excitate” iar regula de trecere era aceeași. În acești termeni rezultatul se poate formula astfel: dacă  $N$  este impar și în momentul inițial nu toate celulele sînt excitate (și nu toate sînt liniștite) atunci excitația niciodată nu se liniștește.

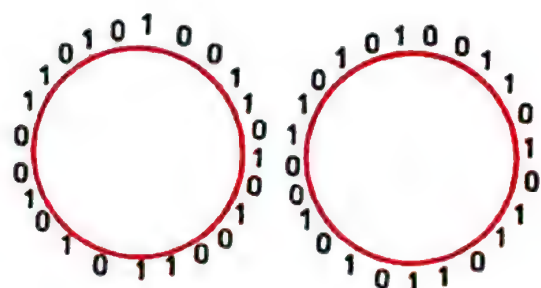


Fig. 82. Zerourile și unitățile din desenul din stînga, după 8 pași se transformă în zerouri.

Ce se întîmplă pentru ceilalți  $N$ ? Pentru ca să lămurim acest lucru ne vom folosi de o leamă (care se poate demonstra prin inducție după  $k$  ea este adevărată și pentru problema pe dreaptă și pentru cerc): dacă pentru  $t = 0$  pe locul  $2^{k-1}$  în ambele părți față de o cifră dată  $a$ , sînt cifre la fel, atunci după  $t = 2^k$  pași în locul lui  $a$  va fi zero, iar dacă sînt diferite va fi unu. De aici rezultă direct că dacă  $N = 2^m$  unde  $m$  este un număr natural, atunci din orice aranjare după  $N$  pași vor rămîne numai zerouri.

Fie acum  $N = 2^m L$  unde  $L$  este impar. Să urmărim modificările care apar după

\* Problemele 56–60 sînt din „Culegerea” de Dinkin E, B, ș.a.

fiecare  $T = 2^m$  pași. Pentru fiecare  $L$  cifre distanțate prin  $2^m$  una de alta (în virfurile unui poligon regulat cu  $L$  laturi) aceste modificări vor fi exact aceleași ca și cum numai aceste  $L$  cifre ar fi dispuse pe cerc, cu ele se repetă același proces și l-am urmărit la fiecare pas. De aici se obține ușor răspunsul în cazul cel mai general: situația „toate zero” se atinge atunci și numai atunci când șirul format din 0 și 1 este periodic cu perioada  $2^m$  (vezi figura 82).

**M 57.** a) Să se găsească numărul  $k$ , divizibil prin 2 și 9 și care are în total 14 divizori (inclusiv 1 și  $k$ ).

b) Să se demonstreze că dacă înlocuim pe 14 cu 15 atunci problema are mai multe soluții, iar prin înlocuirea lui 14 cu 17 problema nu are soluție.

Fie  $M = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$  descompunerea numărului  $M$  în factori primi; pentru fixarea ideilor vom considera  $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \alpha_r \geq 1$ . Divizorii numărului  $M$  au aspectul  $p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_r^{\beta_r}$  unde fiecare  $\beta_i$ , independent de ceilalți poate lua valorile 0, 1, ...,  $\alpha_i$ , și de aceea numărul total de divizori ai lui  $M$  (inclusiv 1 și  $M$ ) este egal cu  $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_r + 1)$ .

a) 14 poate fi descompus în factori într-un singur mod  $14 = 7 \cdot 2$ , de aceea, dacă  $M$  are 14 divizori rezultă,  $r = 2$ ,  $\alpha_1 = 6$ ,  $\alpha_2 = 1$ . Mai știm că 3 intră în descompunerea lui  $M$  cu un exponent mai mare decât 1, iar 2 cu un exponent mai mare decât 0. De aici rezultă că  $M = 3^6 \cdot 2 = 1458$ .

b) Pentru 15 divizori putem avea soluțiile  $M = 3^2 \cdot 2^4$  și  $M = 3^4 \cdot 2^2$ , iar 17 divizori poate să aibă numai un număr de forma  $M = p^{16}$  unde  $p$  este prim.

**M 58.** În plan se dau trei drepte concurente. Pe una dintre ele este marcat un punct. Se știe că dreptele sînt bisectoarele unui triunghi și punctul este unul dintre vîrfuri. Să se construiască triunghiul.

**Prima rezolvare.** Presupunem că  $O$  este punctul de intersecție a bisectoarelor  $AK$ ,  $BL$ , și  $CM$  ale triunghiului  $ABC$  (vezi figura 83).

Atunci:

$$\sphericalangle MOB = \sphericalangle OCB + \sphericalangle OBC = \frac{1}{2} (\sphericalangle ACB + \sphericalangle ABC) = \frac{\pi}{2} - \sphericalangle CAK,$$

adică  $\sphericalangle CAK = \frac{\pi}{2} - \alpha$ . De aceea, dacă sînt date dreptele  $AK$ ,  $BL$ ,  $CM$  și punctul  $A$ , atunci, construind de o parte și de alta a semidreptei  $AO$  unghiuri

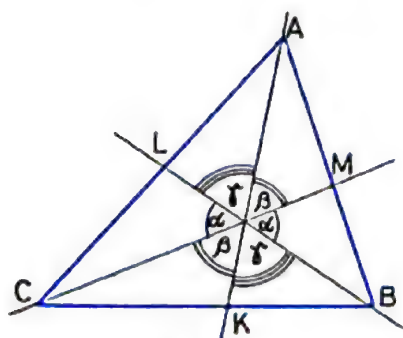


Fig. 83

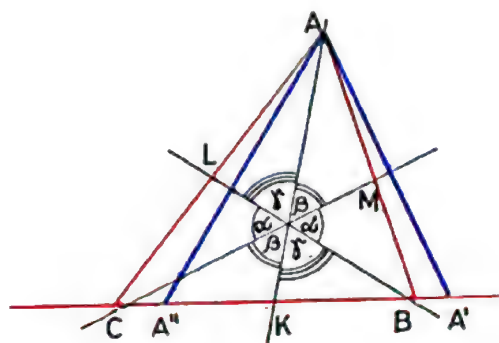


Fig. 84



congruente  $\varphi = \frac{\pi}{2} - \alpha$ , vom găsi virfurile căutate  $B$  și  $C$  (cu condiția ca  $\varphi > 0$ ,  $\varphi < \beta$  și  $\varphi < \gamma$ ). Mai trebuie demonstrat că în triunghiul  $ABC$  construit, dreptele  $BL$  și  $CM$  sînt bisectoare. Unghiurile  $ABL$  și  $ACM$  se calculează ușor, ele sînt respectiv egale cu  $\frac{\pi}{2} - \beta$  și  $\frac{\pi}{2} - \gamma$ . Greutatea constă doar în a demonstra că  $\angle LBC = \frac{\pi}{2} - \beta$  și  $\angle MCA = \frac{\pi}{2} - \gamma$  (este clar că suma lor este egală cu  $\alpha$ ); acest lucru se poate face, de exemplu, astfel: dacă  $\angle LBC < \angle ABL$ , atunci bisectoarea unghiului  $ABC$  va tăia segmentul  $AO$ , de aceea bisectoarea unghiului  $ACB$  de asemenea îl va tăia și înseamnă că  $\angle MCB < \angle ACM$ , deci suma  $\angle LBC + \angle MCB$  este mai mică decît  $\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) = \alpha$ . La fel se poate demonstra că nu e posibil cazul  $\angle LBC > \angle ABL$ .

A doua rezolvare. Construim punctele  $A'$  și  $A''$ , simetricele punctului  $A$  față de bisectoarele care nu trec prin  $A$ . Este clar că ambele puncte  $A'$  și  $A''$  trebuie să fie situate pe dreapta  $BC$  (pe latura triunghiului căutat sau pe prelungirea ei). Ducînd o dreaptă prin  $A'$  și  $A''$  vom găsi punctele căutate  $B$  și  $C$  (vezi figura 84).

1 4	2 3	5
1 6	2 5	3 4
4 8	5 7	1 2 3 6
6 9	7 8	1 2 4 3 5

Fig. 85

Remarcăm că deși a doua rezolvare este mai efectivă, în aceasta este mai greu de pus în evidență condițiile în care problema are soluție. Aceste condiții sînt:  $\alpha < \pi/2$ ,  $\beta < \pi/2$ ,  $\gamma < \pi/2$ . (Întrucît  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ , ele pot fi scrise și astfel:  $\alpha + \beta > \pi/2$ ,  $\beta + \gamma > \pi/2$ ,  $\gamma + \alpha > \pi/2$ ). Dacă sînt îndeplinite, soluția este unică. Gîndiți-vă cum pot fi obținute aceste condiții în fiecare dintre modurile de rezolvare expuse mai sus.

**M 59.** Sînt mai multe mase avînd 1 g, 2 g, 3 g, ...,  $n$  g. Ele trebuie împărțite în trei grămezi de mase egale. Pentru ce valori ale lui  $n$  se poate face aceasta?

Vom arăta că acest lucru se poate face dacă și numai dacă  $n > 3$  și unul dintre numerele  $n$  sau  $n + 1$  se divide prin 3 (adică pentru  $n$  egal cu 5, 6, 8, 9, 11, 12, 14, 15, ...).

Necesitatea acestor condiții e evidentă, întrucît masa totală  $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$  trebuie să se dividă la 3.

Pentru demonstrație, este suficient să observăm la început că împărțirea este posibilă pentru  $n = 5, 6, 8, 9$  (vezi figura 85). Toate celelalte valori ale lui  $n$  care ne interesează se obțin din acestea patru prin adăugarea unor multipli de șase dar orice grupă formată din șase numere naturale consecutive  $a + 1, \dots, a + 6$  se împarte ușor în trei perechi de numere care au sume egale:  $a + 1$  și  $a + 6$ ,  $a + 2$  și  $a + 5$ ,  $a + 3$  și  $a + 4$ .

**M 60.** Considerăm toate numerele naturale scrise în baza 10 numai cu cifrele 1 și 0. Să se descompună aceste numere în două grupe, astfel încât suma oricăror două numere diferite din aceeași grupă să conțină, în scrierea zecimală, cel puțin doi de 1.

Vom separa într-o grupă toate numerele în scrierea cărora intră un număr impar de 1 și în cealaltă grupă cele care au un număr par de 1. Atunci este clar că într-o grupă nu pot să fie două numere care să se deosebească numai la un singur rang, de aceea această descompunere satisface cerința problemei (1 va apare la acele ranguri ale sumei la care un număr are 1 iar celălalt 0). Mulți rezolvitori au prezentat raționamente care arată că descompunerea descrisă: prima grupă: 1, 10, 100, 111, 1000, 1011, 1101, 1110.

grupa a doua: 11, 101, 110, 1001, 1010, 1100, 1111, 10001, este unică.

**M 61.** Doi isteți joacă un nou joc care constă în următoarele. Se scriu numerele 0, 1, 2, ..., 1024. Primul taie, la alegerea sa, 512 numere, apoi al doilea taie 256 numere dintre cele rămase, apoi din nou primul taie încă 128, apoi al doilea încă 64 ș.a.m.d. Cu ultima sa manevră, a cincea, al doilea taie un singur număr. Rămân două numere și al doilea îi plătește primului diferența dintre aceste două numere. Cum trebuie să joace primul, pentru ca să obțină cât mai mult posibil? Cum trebuie să procedeze al doilea pentru a pierde cât mai puțin? Cât trebuie să plătească al doilea primului dacă ambii joacă în modul cel mai bun?

A XXXII-a Olimpiadă matematică din Moscova

**Răspuns:** La un joc corect diferența numerelor rămase este 32 (cum se spune, „prețul jocului“ este 32).

La acest răspuns conduc următoarele considerații: primul jucător tinde ca diferențele dintre numerele rămase să fie cât mai mari și el trebuie să se străduiască tot timpul să „împrăștie“ cât mai mult mulțimea de numere rămase, iar celui de-al doilea îi convine să taie numerele „de pe margini“ (vezi figura 86).

Aceste considerații, desigur, nu reprezintă o demonstrație riguroasă. Mulți rezolvitori, utilizând niște considerații care la prima vedere nu sînt mai puțin îndreptățite, ca, de exemplu, acestea: primul trebuie să taie numerele din mijloc pentru ca să rămână numere cu diferențe mari, au obținut răspunsuri incorecte: 1 sau 5 sau 6 ș.a.

Pentru ca să fundamentăm complet răspunsul, în această problemă ca și în orice altă situație de joc, trebuie să se demonstreze două afirmații: 1) oricum ar juca al doilea, primul poate să obțină cel puțin 32; 2) oricum ar juca primul, al doilea poate pierde cel mult 32.

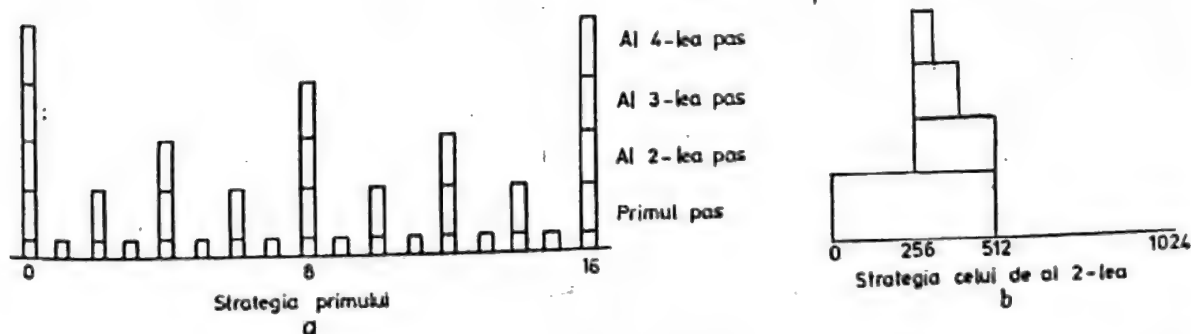


Fig. 86



Pentru demonstrația afirmației 1) vom indica o astfel de strategie a primului jucător, încît indiferent de manevrele celui de-al doilea să asigure că diferența între numerele rămase nu e mai mică decît 32. Această strategie se descrie foarte simplu. La fiecare pas să se taie numerele din două în două, adică al doilea, al patrulea, al șaselea din cele rămase (presupunem că numerele sînt scrise în ordine crescătoare). Atunci după primul pas diferența dintre oricare două numere rămase nu e mai mică decît 2, după al doilea pas, decît 4, după al treilea, decît 8, după al patrulea decît 16 și după al cincilea decît 32.

Pentru demonstrația afirmației 2) este suficient să indicăm strategia celui de-al doilea jucător, care independent de pașii primului să-i permită să nu piardă mai mult decît 32. Ea constă în următoarele. La primul pas el taie toate numerele mai mici decît 512 sau toate numerele mai mari decît 512 (e clar că sau de unele sau de altele rămîn mai multe decît 256). După aceasta, diferența dintre numerele extreme rămase nu va fi mai mare decît 512. În mod analog, după al doilea pas el poate reuși ca toate numerele rămase să se găsească într-unul dintre intervalele  $[0, 256]$ ;  $[256, 512]$ ;  $[512, 768]$ ;  $[768, 1024]$  adică să micșoreze diferența dintre numerele extreme pînă la 256. La fel după al treilea pas, el poate micșora diferența pînă la 128, la al patrulea pînă la 64 și la al cincilea pînă la 32.

Desigur, în mod analog s-ar putea demonstra că dacă jocul constă din  $n$  pași și se începe cu numerele  $0, 1, 2, \dots, 2^{2^n}$ , atunci „prețul jocului“ este  $2^n$ . Dar o cercetare amănunțită a unui asemenea joc care să înceapă cu o mulțime arbitrară de numere (nu neapărat o progresie aritmetică) este o problemă cu mult mai grea.

**M 62.** Să se demonstreze că pentru orice număr impar  $a$ , se găsește un număr natural  $b$ , astfel încît  $2^b - 1$  se divide la  $a$ .

Iată demonstrația cea mai scurtă.

Considerăm numerele  $2^0 - 1, 2^1 - 1, 2^2 - 1, \dots, 2^a - 1$ . Acestea sînt  $a + 1$  numere. Două dintre ele cel puțin dau aceleași resturi la împărțirea prin  $a$  căci sînt numai  $a$  astfel de resturi diferite (acest raționament se numește „principiul lui Dirichlet“). Să presupunem că  $2^k - 1$  și  $2^m - 1$  dau resturi egale la împărțirea prin  $a$  și  $k < m$ . Atunci numărul  $(2^m - 1) - (2^k - 1) = 2^k(2^{m-k} - 1)$  se divide prin  $a$  și întrucît  $a$  este impar, rezultă că  $2^{m-k} - 1$  se divide la  $a$ .

La fel se demonstrează și următoarea afirmație mai generală: dacă numerele naturale  $a$  și  $c$  sînt prime între ele atunci se găsește un număr natural  $b$  încît  $c^b - 1$  se divide prin  $a$ . Mulți cititori au remarcat faptul că afirmația problemei rezultă din următoarea teoremă a lui Euler: pentru orice numere naturale  $a$  și  $c$ , numărul  $c^{\varphi(a)+1} - c$  se divide prin  $a$ , unde  $\varphi(a)$  este numărul numerelor naturale mai mici decît  $a$  și prime cu el și chiar au dat formula pentru calculul „funcției lui Euler“.

$$\varphi(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}) = (p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1-1}) \cdot (p_2^{\alpha_2} - p_2^{\alpha_2-1}) \dots (p_r^{\alpha_r} - p_r^{\alpha_r-1}).$$

**M 63.** Se poate ca din 18 plăci de dimensiuni  $1 \times 2$  să se facă un pătrat astfel încît să nu fie nici o „cusătură“ dreaptă care să unească laturile opuse ale pătratului, mergînd pe marginea plăcilor? (De exemplu aranjarea plăcilor din figura 87 nu e bună, întrucît apare „cusătura“  $AB$ ).

A.A. Kirillov

Să presupunem că am reușit să facem un pătrat de  $6 \times 6$  din plăcile  $1 \times 2$  fără „cusături“. Atunci, oricare dintre cele 10 drepte care taie acest pătrat în pătrățele de  $1 \times 1$  trebuie să se intersecteze cel puțin cu o placă  $1 \times 2$ . Nu e greu de demonstrat că fiecare astfel de dreaptă intersectează în mod obligatoriu un număr par de plăci. Într-adevăr ea taie din pătratul  $6 \times 6$  un dreptunghi  $6 \times k$  care constă dintr-un număr par de pătrățele  $1 \times 1$ ; acest dreptunghi conține un anumit număr întreg de plăci  $1 \times 2$  și încă un număr par de pătrățele  $1 \times 1$ , jumătatea plăcuțelor sectionate de dreaptă (vezi figura 88).

Dar dacă fiecare dreaptă intersectează cel puțin două plăci, atunci numărul total de plăci trebuie să fie cel puțin  $2 \cdot 10 = 20$  pe când numărul lor este 18.

Astfel am demonstrat că pătratul  $6 \times 6$  nu poate fi tăiat în plăcuțe în modul cerut.

În majoritatea scrisorilor primite s-a abordat și următoarea problemă mai generală: cînd un dreptunghi  $m \times n$  poate fi tăiat în plăci  $1 \times 2$  fără cusături? Este ușor de demonstrat că dreptunghiurile  $2 \times n$ ,  $3 \times n$  și  $4 \times n$  nu se pot tăia astfel. Dacă însă  $m \geq 5$ ,  $n \geq 5$  și  $mn$  este par (ultima condiție evident e necesară), atunci în toate cazurile, în afară de cel examinat  $6 \times 6$  există descompunerea cerută. Pentru demonstrație este suficient să se studieze descompunerea dreptunghiurilor  $5 \times 6$  și  $6 \times 8$  și să se observe că din descompunerea dreptunghiului  $m \times n$  se obține ușor descompunerea dreptunghiului  $(m+2) \times n$  (figurile 89 și 90).

N.B. Vasiliev

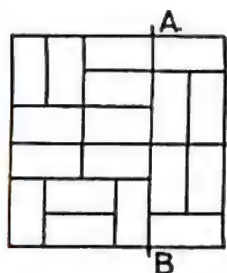


Fig. 87

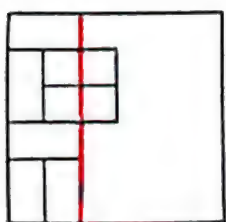


Fig. 88

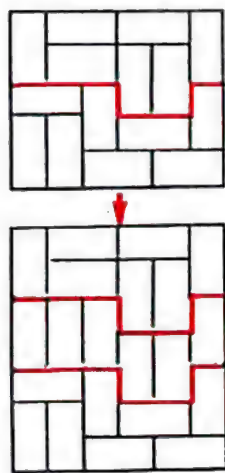


Fig. 89

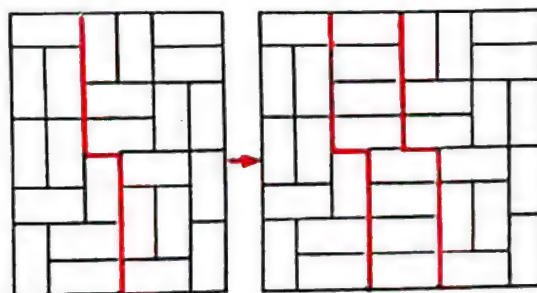


Fig. 90

**M 64.** În plan sînt date o dreaptă  $d$  și două puncte  $P$  și  $Q$  situate de aceeași parte a ei. Să se găsească pe dreapta  $d$  un punct  $M$  astfel încît distanța dintre picioarele înălțimilor triunghiului  $PQM$  duse pe laturile  $PM$  și  $QM$  să fie minimă.

G.A. Palatnik

Să observăm că picioarele înălțimilor  $PK$  și  $QH$  ale triunghiului  $PQM$  sînt situate pe un cerc  $c$  cu diametrul  $PQ$ . Considerăm două cazuri:

1) Cercul  $c$  are un punct sau două comune cu dreapta  $d$ . Atunci este evident că oricare dintre aceste puncte este punctul căutat  $M$ ;



triunghiul  $PQM$  este dreptunghic și distanța dintre picioarele înălțimilor este nulă; punctele  $K$  și  $H$  coincid cu  $M$ .

2) Cercul  $c$  nu are puncte comune cu dreapta  $d$ . Atunci, este ușor de demonstrat că unghiul ascuțit înscris în cerc care cuprinde arcul  $KH$  este  $90^\circ - \angle PMQ$ . Într-adevăr, pentru orice poziție a punctului  $M$ , cel puțin unul dintre punctele  $K$  sau  $H$  este situat pe o latură a triunghiului  $PQM$  și nu pe prelungirea ei; fie, de exemplu,  $H$ . Atunci,  $\angle KHP = 90^\circ - \angle QMP = \angle KPM = 90^\circ - \angle KMP$ . Astfel coarda  $KH$  este cu atât mai mică cu cât este mai mare unghiul  $QMP$  (figura 91).

Rămâne să se rezolve următoarea problemă: să se găsească pe dreapta  $d$  un punct  $M$  pentru care unghiul  $PQM$  este maxim. Nu e greu de bănuț că punctul  $M$  trebuie să aibă următoarele proprietăți: cercul care trece prin punctele  $P$ ,  $Q$  și  $M$  este tangent la dreapta  $d$ . Pentru ca să construim punctul  $M$  trebuie (în cazul în care segmentul  $PQ$  nu este paralel cu dreapta  $d$ ) ca de la punctul  $C$  de intersecție a lui  $PQ$  cu  $d$  să se ia pe dreapta  $d$  segmentele  $CM_1 = CM_2 = \sqrt{CP \cdot CQ}$  și apoi dintre punctele obținute  $M_1$  și  $M_2$  să se aleagă acela pentru care unghiul  $M_1CP$  este ascuțit (sau drept). Demonstrația faptului că chiar pentru acest punct unghiul  $PMQ$  este maxim, este aproape evidentă și o lăsăm cititorului (figura 92).

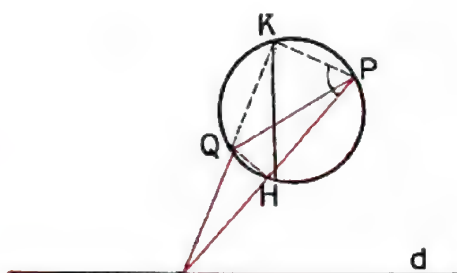


Fig. 91

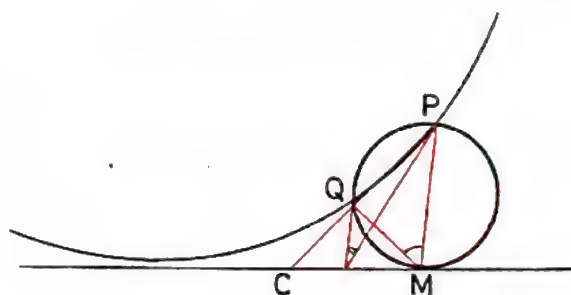


Fig. 92

M 65. a) Fie  $E, F, G$  trei puncte pe laturile  $AB, BC$  și  $CA$  ale triunghiului  $ABC$  pentru care

$$\frac{AE}{EB} = \frac{BF}{FC} = \frac{CG}{GA} = k \text{ unde } 0 < k < 1.$$

Să se găsească raportul dintre aria triunghiului  $KLM$  format de dreptele  $AF, BG$  și  $CE$  și aria triunghiului  $ABC$  (vezi figura 93, a).

b) Să se desfacă triunghiul prin șase drepte în astfel de bucăți din care să se poată compune șapte triunghiuri congruente.

A.L. Soifer

a) Notăm aria triunghiului cu vîrfurile  $X, Y, Z$  cu  $s(XYZ)$ . Folosind faptul că raportul ariilor a două triunghiuri cu aceleași înălțimi (sau cu aceleași baze) este egal cu raportul bazelor (respectiv raportul înălțimilor) se justifică ușor că:

$$\begin{aligned} s(ACK) &= \frac{1}{k} s(ABK) = \frac{k+1}{k^2} s(AEK) = \frac{k+1}{k^2+k+1} s(AEC) = \\ &= \frac{k}{k^2+k+1} s(ABC). \end{aligned}$$

Analog se poate demonstra că

$$s(BLA) = s(CMB) = \frac{k}{k^2 + k + 1} s(ABC).$$

De aceea

$$\frac{s(KLM)}{s(ABC)} = 1 - \frac{3k}{k^2 + k + 1} = \frac{(1-k)^2}{k^2 + k + 1} = \frac{(1-k)^2}{1-k^3}.$$

b) Observăm că pentru  $k = 1/2$  acest raport este egal cu  $1/7$  și fiecare dintre cele trei segmente  $AF$ ,  $BG$ ,  $CE$  le împarte pe celelalte două în rapoartele  $3 : 3 : 1$ , așa că dacă se duc prin punctele  $M$ ,  $K$ ,  $L$  încă trei drepte paralele respectiv cu aceste trei segmente, atunci fiecare dintre laturile triunghiului  $ABC$  va fi împărțită în rapoartele  $2 : 1 : 1 : 2$ .

Acum este ușor ca din cele 13 bucăți în care a fost împărțit triunghiul  $ABC$ , să se compună 7 triunghiuri congruente (unul dintre ele constă dintr-o singură bucată  $KLM$ ; vezi figura 93, b).

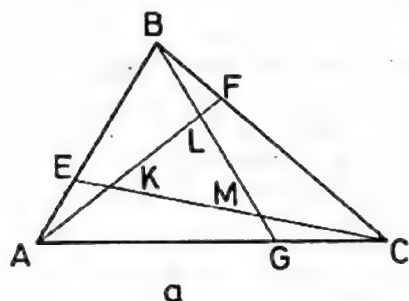


Fig. 93, a

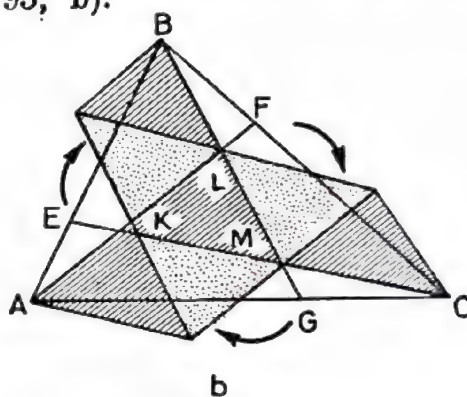


Fig. 93, b

**M 66.** *Ită câteva exemple în care suma pătratelor a  $k$  numere naturale succesive este egală cu suma pătratelor următoarelor  $k - 1$  numere naturale:*

$$3^2 + 4^2 = 5^2, \quad 36^2 + 37^2 + 38^2 + 39^2 + 40^2 = 41^2 + 42^2 + 43^2 + 44^2.$$

$$55^2 + 56^2 + 57^2 + 58^2 + 59^2 + 60^2 = 61^2 + 62^2 + 63^2 + 64^2 + 65^2$$

*Găsiți formula generală care cuprinde toate aceste cazuri.*

A.I. Milovanov

Să demonstrăm că pentru fiecare număr natural  $k$ , există numai un singur număr natural  $n$ , astfel încît

$$(n - k + 1)^2 + (n - k + 2)^2 + \dots + (n - 1)^2 + n^2 = (n + 1)^2 + (n + 2)^2 + \dots + (n + k - 1)^2 \quad (1)$$

(observați că în membrul drept sînt  $k - 1$  termeni, iar în cel stîng  $k$ ). Egalitatea (1) este echivalentă cu următoarele:

$$n^2 = [(n + 1)^2 - (n - k + 1)^2] + [(n + 2)^2 - (n - k + 2)^2] + \dots + [(n + k - 1)^2 - (n - 1)^2] \quad (2)$$

$$n^2 = k(2n - k + 2) + k(2n - k + 4) + \dots + k(2n + k - 2), \quad (3)$$

$$n^2 = 2k(k - 1)n. \quad (4)$$



Astfel afirmația enunțată a fost demonstrată: egalitatea (1) pentru numerele naturale  $k$  și  $n$  este satisfăcută atunci și numai atunci când  $n = 2k^2 - 2k$ . (În trecerea de la (3) la (4) am folosit faptul că suma a  $k - 1$  termeni ai progresiei aritmetice  $(2n - k + 2) + (2n - k + 4) + \dots + (2n + k - 2)$  este egală cu  $(k - 1) \frac{(2n - k + 2) + (2n + k - 2)}{2} = 2(k - 1)n$ ). Am obținut astfel formula generală căutată. Ea poate fi scrisă de exemplu astfel:

$$(2k^2 - 3k + 1)^2 + (2k^2 - 3k + 2)^2 + \dots + (2k^2 - 2k)^2 = (2k^2 - 2k + 1)^2 + (2k^2 - 2k + 2)^2 + \dots + (2k^2 - k - 1)^2.$$

unde  $k$  este un număr natural oarecare. Exemplele date în textul problemei se obțin pentru  $k = 2, 4$  și  $5$ .

**M. 67.** Unui bijutier i s-a comandat un inel de aur de lățimea  $h$ , avînd forma unui corp mărginit de o suprafață sferică cu centrul în  $O$  și de suprafața unui cilindru de rază  $r$  a cărei axă trece prin punctul  $O$  (vezi figura 94). Meșterul a făcut un astfel de inel, dar a luat pe  $r$  prea mic. Cît aur trebuie să mai adauge dacă  $r$  trebuie mărit de  $k$  ori iar lățimea  $h$  rămîne cea precedentă?

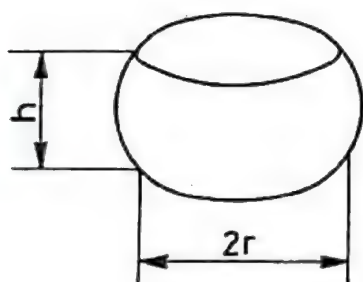


Fig. 94

E ușor de demonstrat că volumul inelului sferic, adică al corpului care se obține prin rotirea unui segment de cerc  $AB$  în jurul diametrului  $MN$  care nu se intersectează cu acest segment, este  $\frac{\pi}{6} AB^2 \cdot A_1B_1$ , unde  $A_1B_1$  este proiecția coardei  $AB$  pe diametrul  $MN$ . Această formulă se dă, de exemplu, în cartea lui J. Hadamard „Geometria elementară”, partea II, cap. IV, 500. Volumul inelului va fi egal cu  $\frac{\pi}{6} h^3$ , adică nu depinde de raza  $r$ , deci meșterul nu trebuie să adauge aur.

**M 68.** Rețeaua de curbe reprezentată în figura 95 este formată din cercuri concentrice de raze  $1, 2, 3, 4, \dots$  cu centrul în punctul  $O$ , din dreapta  $d$  care trece prin punctul  $O$  și din toate tangentele posibile la aceste cercuri paralele cu dreapta  $d$ . Tot planul este împărțit astfel în celule pe care le colorăm ca la tabla de șah. În șirul punctelor roșii marcate pe desen, oricare două puncte vecine sînt vîrfurile opuse ale unei celule negre. Demonstrați că toate punctele unui astfel de șir infinit sînt situate pe o parabolă (de aceea întregul desen parcă e făcut din parabole albe și negre).

A.N. Vilenkin

Luăm dreapta  $d$  ca axa  $Ox$  și punctul  $O$  ca originea sistemului de coordonate, așa cum e indicat în figura 95. Unitatea de măsură este dată în problemă. Rețeaua de curbe, de care este vorba în problemă, este formată din cercuri de rază  $n$  (ecuația unui astfel de cerc este  $x^2 + y^2 = n^2$ ) și din drepte de ecuație  $y = m$ , unde  $m$  și  $n$  sînt toate numerele întregi posibile,  $n > 0$ . Astfel fiecărui punct de intersecție (sau de tangentă) a acestor curbe—fiecărui „nod”  $(x, y)$  al rețelei — îi corespunde o pereche de valori  $n = \sqrt{x^2 + y^2}$  și  $m = y$ . Să observăm că atunci cînd trecem de la un punct roșu la cel vecin,

$m$  și  $n$  se schimbă cu câte o unitate, așa că diferența lor  $n - m = \sqrt{x^2 + y^2} - y$  rămâne constantă; această diferență, pentru toate punctele roșii este egală cu 6.

Ecuția  $\sqrt{x^2 + y^2} - y = 6$  este echivalentă cu următoarele:  $x^2 + y^2 = (y + 6)^2$ ;  $y = \frac{x^2}{12} - 3$ . Astfel, toate punctele roșii sînt situate pe parabola  $y = \frac{x^2}{12} - 3$ .

Într-un alt șir asemănător, pe care l-am desenat cu albastru, prin trecerea de la un punct la vecinul său,  $\sqrt{x^2 + y^2}$  și  $y$  se modifică, astfel încît suma lor rămîne constantă  $\sqrt{x^2 + y^2} + y = 4$ . Această ecuație, după transformări devine tot ecuația unei parabole  $y = -\frac{x^2}{6} + \frac{3}{2}$ .

La fel se poate demonstra că orice șir infinit de puncte în care două puncte vecine sînt virfuri opuse ale unei celule negre (sau ale unui segment) sînt situate pe parabola  $y = \frac{x^2}{2p} + \frac{p}{2}$ , unde  $p$  este un număr întreg oarecare nenul. Reciproc, pe oricare dintre aceste parabole situat un astfel de șir infinit de puncte (acestea sînt punctele de intersecție a parabolei cu toate dreptele  $y = m$ ).

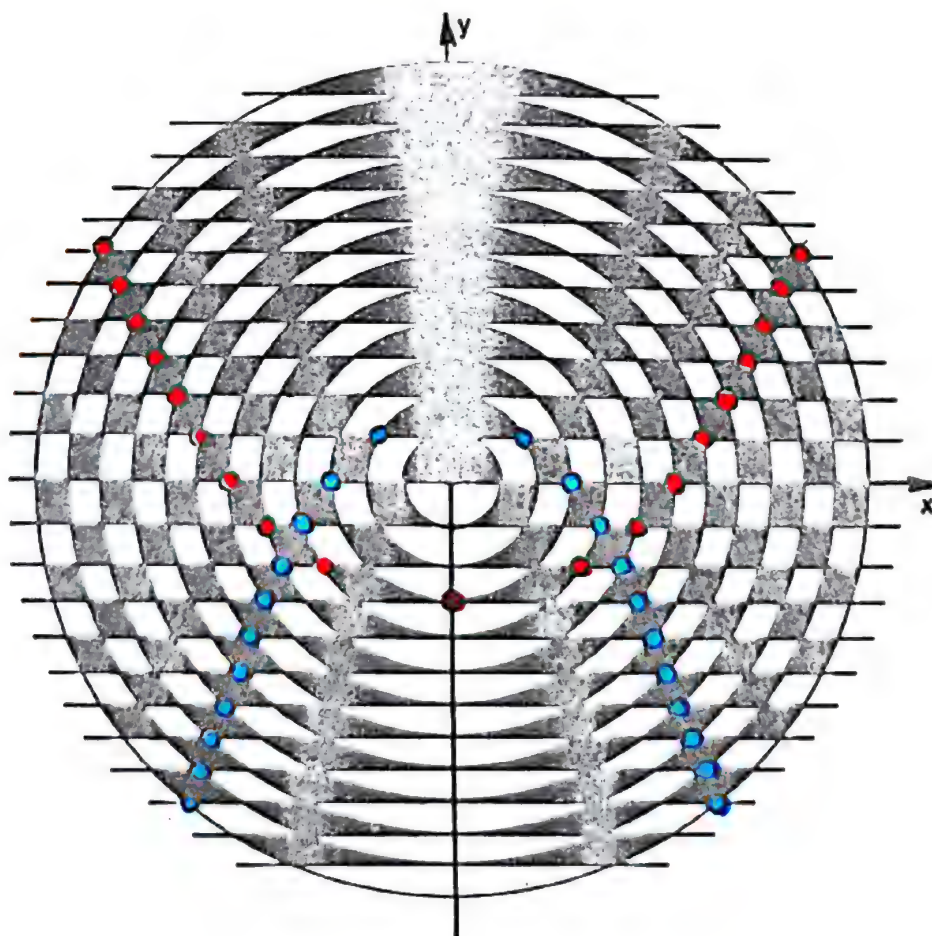


Fig. 95



Observăm că dacă  $p < 0$ , adică dacă ramurile parabolei merg în jos, atunci pentru  $p$  par parabola trece prin celulele negre, iar pentru  $p$  impar prin cele albe; dacă  $p > 0$ , este invers. Astfel că prin fiecare punct de intersecție a dreptelor și a cercurilor din rețea (exceptând punctele de tangență de pe dreapta  $x = 0$ ) trec două parabole: una trece prin celulele negre, cealaltă prin cele albe; una are ramurile îndreptate în sus cealaltă în jos.

Rezolvarea acestei probleme au trimis-o mulți cititori. Unii au folosit în rezolvare următoarea definiție geometrică a parabolei: parabola este locul geometric al punctelor egal depărtate de un punct și o dreaptă. În esență, rezolvarea problemei M68 este foarte apropiată de demonstrația echivalenței acestei definiții a parabolei și a celei cunoscute din algebră (parabola este graficul trinomului de gradul al II-lea). Dacă se alege un sistem de coordonate, astfel încât punctul dat să fie originea axelor și dreapta dată să aibă ecuația  $y = c$ , atunci condiția ca punctul  $(x, y)$  să fie egal depărtat de punctul dat și dreapta dată se scrie în forma  $\sqrt{x^2 + y^2} = |y - c|$ , care este echivalentă cu ecuația  $y = -\frac{x^2}{2c} + \frac{c}{2}$ .

**M 69.** Numărul 76 are următoarea proprietate interesantă: ultimele două cifre ale numărului  $76^2 = 5776$  dau din nou numărul 76.

- Mai există astfel de numere formate din două cifre?
- Găsiți toate numerele de trei cifre  $A$ , astfel încât ultimele trei cifre ale numărului  $A^2$  formează numărul  $A$ .
- Există un șir infinit de cifre  $a_1, a_2, a_3, \dots$ , astfel încât pentru orice  $n$ , pătratul numărului „ $a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1$ ” să aibă aspectul „ $\dots a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1$ ”? (Prin ghilimele am notat aici scrierea zecimală a numărului. Răspunsul banal  $a_i = 0$  pentru toți  $i > 1$  îl excludem).

Răspunsul în această problemă este următorul: pentru orice  $n > 1$  există exact două astfel de numere cu  $n$  cifre  $n > 1$ , pătratul cărora se termină în  $A$  (ne luând în considerare cele evidente  $0 \dots 000$  și  $0 \dots 0001$ ), pentru  $n = 2$  acestea sînt 76 și 25 pentru  $n = 3$  sînt 376 și 625, pentru  $n = 4$  sînt 9376 și 0625, pentru  $n = 5$  sînt 09376 și 90625 ș.a.m.d. așa că există două șiruri infinite de cifre de care este vorba la punctul c): unul începe cu cifrele 6, 7, 3, 9, 0, 1, ..., celălalt cu cifrele 5, 2, 6, 0, 9, 8, ... (n-am exclus numerele la care prima sau primele cifre sînt nule).

Începem cu problema a). Cel mai simplu mod de a găsi numerele cu două cifre necesare constă în următoarele. Dacă  $A^2$  se termină în aceleași două cifre ca și  $A$ , atunci  $A^2 - A = A(A - 1)$  se divide la  $100 = 25 \cdot 4$ , iar întrucît numerele  $A$  și  $A - 1$  sînt prima între ele (nu au divizori comuni mai mari decît 1) unul dintre ele trebuie să se dividă la 25 iar celălalt la 4. Verificăm dacă numerele 25, 50 și 75 pot să joace rolul lui  $A$  sau a lui  $A - 1$  (ambele aceste numere sînt cu două cifre). Pentru aceasta trebuie doar să se verifice care dintre numerele vecine cu ele se divid la 4. Acestea vor fi numai 76 și 24 de aceea  $A$  poate să fie egal numai cu 25 și 76.

În mod analog poate fi rezolvată problema b) dar vom demonstra deodată o afirmație mai generală: dacă pătratul numărului  $B = „a_{n-1} a_{n-2} \dots a_1”$  se termină cu cifrele „ $\dots a_{n-1} a_{n-2} \dots a_1$ ”, atunci se poate alege în mod unic cifra  $a_n$  astfel încît pătratul numărului  $A = „\dots a_n a_{n-1} \dots a_1”$  să se termine în „ $\dots a_n a_{n-1} \dots a_1$ ”.

Fie  $B^2 = „b_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_1”$ . Atunci ( $n \geq 2 \Rightarrow 2n > n + 1$ ).

$A^2 = (10^n a_n + B)^2 = 10^{2n} a_n^2 + 2 \cdot 10^n a_n B + B^2 = „\dots c_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_1”$  unde  $c_n$  este ultima cifră a numărului  $2a_n a_1 + b_n$ . Trebuie să alegem pe  $a_n$  astfel încît  $c_n$  să fie egal cu  $a_n$  adică  $2a_n a_1 + b_n - a_n = (2a_1 - 1)a_n + b_n$  să se dividă la 10.

Evident că acest lucru se poate face și anume într-un mod unic. În cazurile care ne interesează pe noi,  $a_1 = 5$  și  $a_1 = 6$ , funcțiile  $b_n \rightarrow a_n$  care trebuie să le indicăm sînt deosebit de simple: dacă  $a_1 = 5$ , atunci  $a_n = b_n$ , iar dacă  $n = 6$ , atunci  $a_n = 10 - b_n$  pentru  $b_n > 0$  și  $a_n = 0$  pentru  $b_n = 0$ .

Mai multe amănunte despre rezolvarea acestei probleme vezi în cartea Ia. I. Perelman: „Algebră recreativă”.

Observăm că afirmația demonstrată mai sus poate fi reformulată astfel: din rezolubilitatea congruenței  $x^2 - x = 0 \pmod{10^n}$  rezultă rezolubilitatea ei modulo  $10^{n+1}$ . Această afirmație am folosit-o pentru ca să construim două soluții nebanale ale ecuației  $x^2 - x = 0$  în numere 10-adice (analog cu teoria numerelor  $p$ -adice pentru  $p$  prim, se pot construi numere  $m$ -adice pentru  $m$  compus, dar acestea nu mai au multe proprietăți de care se bucurau numerele  $p$ -adice și numerele reale obișnuite. De exemplu, produsul a două numere  $m$ -adice nenule poate fi egal cu zero, ecuația de gradul II pe care am dat-o mai sus poate avea mai mult de două soluții ș.a.m.d.) care sînt numere „infinite la stînga”:  $x_1 = \dots 890625$  și  $x_2 = \dots 109376$  (numim soluții banale pe  $0 = \dots 0000$  și  $1 = \dots 0001$ ). Verificați următoarele două proprietăți ale numerelor construite:  $x_1 + x_2 = 1$ ;  $x_1 x_2 = 0$ . Gîndiți-vă pentru ce alți  $m$  ecuația  $x^2 - x = 0$  are soluții în numere  $m$ -adice diferite de 0 și 1.

N.B. Vasiliev

**M 70.** Fie  $d_1, d_2, \dots, d_n$  niște drepte într-un plan, printre care sînt două care se intersectează. Să se demonstreze că se poate alege într-un mod unic pe fiecare dintre aceste drepte cîte un punct  $x_1, x_2, \dots, x_n$  astfel încît perpendiculara ridicată din punctul  $x_i$  pe dreapta  $d_i$  să treacă prin punctul  $x_{i+1}$  (pentru toți  $i = 1, 2, \dots, n-1$ ) și perpendiculara ridicată pe  $d_n$  din punctul  $x_n$  să treacă prin punctul  $x_1$ .

Încercați să formulați și să demonstrați o problemă analoagă în spațiu.

N.B. Vasiliev

Această problemă mai poate fi formulată în felul următor. Fie  $p_i$  aplicația care pune în corespondență fiecărui punct  $M$  (din plan) proiecția sa pe dreapta  $d_i$ , adică  $p_i(M)$  este piciorul perpendicular eicoborîte din punctul  $M$  pe dreapta  $d_i$ . Trebuie să se demonstreze că pe dreapta  $d_1$  există un singur punct  $x_1$  astfel încît după  $n$  transformări

$$x_1 \xrightarrow{p^n} x_n \xrightarrow{p_{n-1}} x_{n-1} \xrightarrow{p_{n-2}} \dots \xrightarrow{p_2} x_2 \xrightarrow{p_1} x_1$$

se transformă în el însuși.

Pentru un punct arbitrar  $x$  de pe dreapta  $d_1$ , vom nota cu  $f(x)$  punctul de pe dreapta  $d_1$  în care trece  $X$  după  $n$  transformări  $p_n, p_{n-1}, \dots, p_1$  (vezi figura 96): aceasta se va scrie astfel:

$$f = p_1 \circ p_2 \circ \dots \circ p_n.$$

Vom alege pe fiecare dintre dreptele  $d_i$  o origine și un sens, adică le transformăm în axe numerice (unitatea de măsură o vom lua pe toate axele aceleași). Vom identifica punctul de pe dreaptă și coordonata sa, așa că transformările  $p_1, p_2, \dots, p_n$ , și  $f$  le putem considera acum funcții care pun în corespondență oricărui număr tot un număr.

Vom demonstra că transformarea  $f$  este liniară:  $f(x) = ax + b$ .

Pentru aceasta, este suficient să demonstrăm următoarele trei afirmații, aproape evidente.



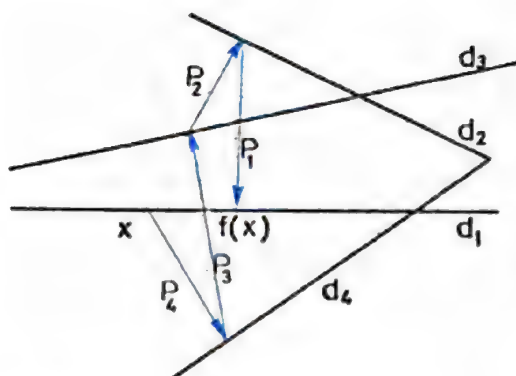


Fig. 96. Transformarea  $f: x \rightarrow f(x)$  se numește produsul transformărilor  $p_4, p_3, p_2, p_1$ .

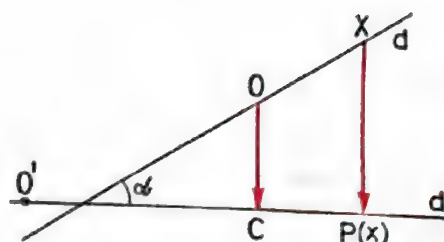


Fig. 97. Transformarea care pune în corespondență fiecare punct al unei drepte proiecția sa pe altă dreaptă se scrie ca o funcție liniară.

(1) Dacă  $d$  și  $d'$  sînt două drepte și  $p: d \rightarrow d'$  este o transformare care pune în corespondență fiecare punct de pe  $d$  cu proiecția lui pe  $d'$ , atunci  $p$  este o transformare liniară.

(2) Dacă  $p_1$  și  $p_2$  sînt transformări liniare, atunci  $p_1 \circ p_2$  este transformare liniară.

(3) Dacă  $p_1, p_2, \dots, p_n$  sînt transformări liniare, atunci  $f = p_1 \circ p_2 \circ \dots \circ p_n$  este tot o transformare liniară.

Este evident că (3) se deduce din (2) cu ajutorul inducției. Verificarea lui (2): dacă  $p_1(x) = a_1x + b_1$  și  $p_2(x) = a_2x + b_2$ , atunci  $(p_1 \circ p_2)(x) = p_1(p_2(x)) = a_1a_2x + (a_1b_2 + b_1)$ . Pentru demonstrația lui (1) ținem cont de formula

$$p(x) = x \cos \alpha + c,$$

unde  $\alpha$  este unghiul dintre sensurile pozitive ale axelor  $Ox$  și  $O'x'$ ,  $c$  este coordonata punctului  $p(0)$  în sistemul  $O'x'$  (vezi figura 97; examinați și cazul cînd dreptele  $d$  și  $d'$  sînt paralele).

Acum, pentru rezolvarea problemei este de ajuns să se arate că ecuația liniară  $x = ax + b$  are o rădăcină și numai una singură. Dacă nu se întîmplă așa (adică dacă nu are soluții sau sînt mai multe) atunci  $a = 1$ . Să arătăm că nu poate fi. Observăm că la fiecare proiecție  $p_k: d_{k+1} \rightarrow d_k$  distanța dintre oricare două puncte nu se mărește:

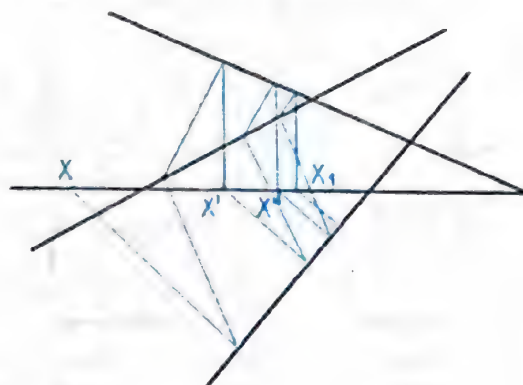
$$|p_k(x) - p_k(x')| \leq |x - x'|$$

și dacă dreptele  $d_{k+1}$  și  $d_k$  nu sînt paralele, se micșorează strict. De aici rezultă că pentru oricare două puncte  $x$  și  $x'$ ,

$$|f(x) - f(x')| < |x - x'|.$$

Dar dacă  $a = 1$ , adică  $f(x) = x + b$ , atunci  $f$  păstrează distanța dintre oricare două puncte (le translatează cu distanța  $b$ ). S-a obținut o contradicție. Demonstrația s-a terminat.

Fig. 98. Punctul  $x_1$ , pentru care  $f(x_1) = x_1$ , practic se poate găsi prin metoda aproximațiilor succesive: începînd cu un punct oarecare  $x$ , ducem perpendiculară pe drepte date și găsim succesiv după flecare „ciclu” punctele  $x' = f(x)$ ,  $x'' = f(x')$  ș.a.m.d. Este ușor de demonstrat că distanțele  $|x - x_1|$ ,  $|x' - x_1|$ , .... formează o progresie geometrică infinit descrescătoare cu rația  $|a| < 1$ , așa încît dacă repetăm construcția de cîteva ori, putem găsi poziția punctului  $x_1$  cu o precizie dorită. Această metodă se aplică adesea pentru găsirea rădăcinilor ecuațiilor de forma  $f(x) = x$ ; se aplică atunci cînd funcția  $f$  micșorează distanța dintre oricare două puncte. În cazul nostru, cînd funcția  $f$  este liniară, desigur că soluția ecuației  $f(x) = x$  poate fi găsită exact (gîndiți-vă cum se poate găsi punctul  $x_1$  dacă sînt cunoscute  $x, x'$  și  $x''$ ).



Problema și rezolvarea dată se pot transpune și la cazul cînd dreptele sînt în spațiu (printre ele pot fi și drepte oarecare). În acest caz prin  $p_k$  vom nota proiecția pe dreapta  $d_k$  din spațiu, adică transformarea care pune în corespondență fiecărui punct piciorul perpendicularei coborîtă din acest punct pe dreapta  $d_k$ . Mai este o altă posibilitate de generalizare: să se considere în loc de drepte, plane. Se poate demonstra, de exemplu, următorul fapt: dacă se dau  $n$  plane în spațiu dintre care trei se întîlnesc într-un punct, atunci se poate alege în fiecare plan cîte un punct  $X_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) astfel încît, perpendiculara dusă în punctul  $X_k$  pe planul corespunzător, să treacă prin punctul  $X_{k+1}$  (luăm  $X_{n+1} = X_1$ ). Acum  $f = p_1 \circ p_2 \circ \dots \circ p_n$  va fi o transformare liniară a unui plan pe un plan și într-un sistem de coordonate se va scrie astfel:  $f(x, y) = (x', y')$  unde  $x' = a_1x + b_1y + c_1$ ,  $y' = a_2x + b_2y + c_2$ .

Să se demonstreze că dacă sistemul de ecuații

$$\begin{cases} x = a_1x + b_1y + c_1 \\ y = a_2x + b_2y + c_2 \end{cases}$$

nu are soluții sau are mai mult decît una singură (aceasta înseamnă că  $(a_1 - 1)(b_2 - 1) - a_2b_1 = 0$ ), atunci sistemul

$$\begin{cases} x = a_1x + b_1y \\ y = a_2x + b_2y \end{cases}$$

admite o soluție  $(x_0, y_0)$  diferită de  $(0, 0)$  și transformarea  $f$  nu modifică distanța dintre punctele  $(0, 0)$  și  $(x_0, y_0)$  ceea ce în problema noastră nu se poate.

**M. 71.** Un tablou dreptunghiular format din  $m$  linii și  $n$  coloane este completat cu numere. Aranjăm numerele în fiecare linie în ordine crescătoare. Să se demonstreze că; dacă după aceasta, aranjăm numerele în fiecare coloană în ordine crescătoare, atunci în fiecare linie ele rămîn tot în ordine crescătoare.

Să se stabilească ce se va întîmpla dacă se procedează în ordine inversă: în tabloul inițial, la început aranjăm numerele din fiecare coloană în ordine crescătoare, iar apoi în fiecare linie; se obține ca rezultat același tablou ca și în primul caz sau altul?

Să considerăm tabloul în care pe fiecare linie numerele sînt aranjate în ordine crescătoare și să demonstrăm că dacă  $l < r$ , atunci cel mai mare număr de pe coloana  $r$  (să-l notăm  $b$ ) nu e mai mic decît cel mai mare număr



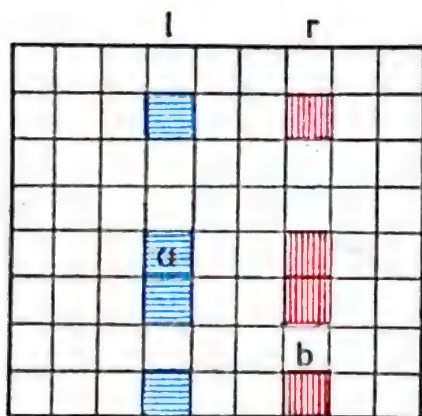


Fig. 99. Dacă numerele din căsuțele albastre nu sînt mai mici decît  $a$ , atunci numerele din căsuțele roșii, de asemenea nu sînt mai mici decît  $a$ .

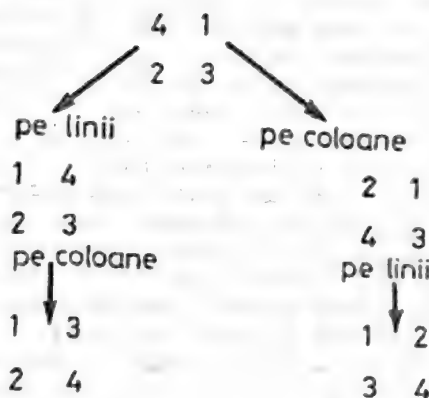


Fig. 100

de pe coloana  $l$  (să-l notăm  $a$ ). Într-adevăr, numărul situat la intersecția liniei pe care este situat  $a$ , cu coloana  $r$  nu este mai mic decît  $a$  (deoarece pe linie numerele merg în ordine crescătoare).

Analog se poate demonstra că al  $k$ -lea număr (considerat de la cel mai mare) din coloana  $r$  să-l notăm  $b_k$  nu este mai mic decît al  $k$ -lea număr după mărime de pe coloana  $l$ , să-l notăm  $a_k$ . Într-adevăr (vezi figura 99) în coloana  $l$  sînt  $k$  numere nu mai mici decît  $a_k$ , prin urmare, în liniile corespunzătoare din coloana  $r$  se găsesc  $k$  numere nu mai mici decît  $a_k$ , deci  $b_k \geq a_k$ . De aici rezultă că dacă aranjăm numerele pe coloane în ordine crescătoare, atunci al  $k$ -lea număr din coloana  $r$  nu va fi mai mic decît al  $k$ -lea număr din coloana  $l$  pentru orice  $l < r$ , adică în linia  $k$  numerele sînt în ordine crescătoare. Cerința problemei este demonstrată.

În funcție de cum aranjăm numerele (la început pe coloane sau la început pe linii) se pot obține tablouri diferite. Pentru ca să ne convingem de acest lucru, este suficient să urmărim exemplul din figura 100.

N.B. Vasiliev

## M 72 Să se rezolve ecuația

$$\sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{1+x} = p \quad (1)$$

unde  $p$  este un număr real arbitrar.

Iu. I. Ionin

O încercare naivă de rezolvare: ridicăm ambele părți ale ecuației (1) la cub:

$$2 + 3\sqrt[3]{1-x^2} (\sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{1+x}) = p^3 \quad (2)$$

și înlocuim aici din egalitatea inițială (1), și obținem:

$$2 + 3p\sqrt[3]{1-x^2} = p^3. \quad (3)$$

De aici se găsește ușor  $x$ :

$$x = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{p^3 - 2}{3p}\right)^3}. \quad (4)$$

S-au primit multe rezolvări în care s-a obținut (așa sau în alte moduri) acest răspuns. Au fost și rezolvitori care au găsit și mulțimea valorilor lui  $p$ , pentru care formula (4) are sens:  $p = -1, 0 < p \leq 2$ .

Unii au observat chiar că valoarea  $p = -1$  trebuie dată deoparte fiindcă valoarea  $x = 0$  dată de această formulă pentru acest  $p$  nu e bună. Dar nu s-a demonstrat că pentru toți  $p, 0 < p \leq 2$  valorile lui  $x$  date de formula (4) sînt soluții. (De obicei această demonstrație se face prin verificare, dar aici aceasta se face foarte complicat.) Dar aceasta trebuie demonstrat căci nu toate transformările efectuate mai sus păstrează echivalența: ecuația (2) nu este echivalentă cu (3). Pentru ca să ne convingem de acest lucru să înlocuim  $x = 0, p = -1$  în (2) și (3). Egalitatea (3) se transformă într-o identitate dar (2) nu. (Încercați ca din (3) să deduceți pe (2). Trebuie să folosiți egalitatea (1) dar acest lucru nu e permis căci tocmai aceasta trebuie cercetată.) Aceasta și alte rădăcini pot să fie străine.

Să analizăm mai amănunțit transformările pe care le efectuăm asupra ecuației. Să notăm pentru ușurință  $\sqrt[3]{1-x} = u$  și  $\sqrt[3]{1+x} = v$ .

De la ecuația  $u + v = p$  am trecut la ecuația  $u^3 + v^3 + 3uv(u + v) = p^3$  (2) cu ajutorul unei transformări echivalente (ridicarea ambelor părți la cub). Pasul următor pe care îl facem, este să înlocuim pe  $p$  în locul lui  $u + v$  și să trecem la ecuația

$$u^3 + v^3 + 3uvp = p^3 \quad (3)$$

pe care o transcriem astfel:

$$\begin{aligned} u^3 + v^3 - p^3 + 3uvp &= 0 \\ (u + v)^3 - p^3 - 3uvp(u + v - p) &= 0. \end{aligned}$$

Vom aplica formula diferenței cuburilor și apoi vom scoate în factor  $(u + v - p)$ :

$$(u + v - p)(u^2 + v^2 + p^2 + up + pv - uv) = 0. \quad (3')$$

Astfel am reușit să scriem ecuația (3) în forma (3') pe care este ușor să se cerceteze de ce nu e echivalentă cu (2). Evident că partea stîngă a ecuației (3') este egală cu zero, cînd cel puțin una dintre paranteze este egală cu zero:

$$\begin{aligned} 1) \quad u + v - p &= 0, \\ 2) \quad u^2 + v^2 + p^2 + up + pv - uv &= 0. \end{aligned}$$

Prima egalitate este ecuația noastră inițială. Înseamnă că toate soluțiile străine sînt date de-a doua și trebuie văzut care sînt rădăcinile ei. Amplificînd-o cu 2, ea poate fi scrisă astfel:

$$(u + v)^2 + (v + p)^2 + (u - v)^2 = 0.$$

Această egalitate este satisfăcută numai pentru  $u = v = -p$ .

Revenind la ecuația noastră,

$$\sqrt[3]{1-x} = \sqrt[3]{1+x} = -p.$$



Înseamnă că  $x = 0$  pentru  $p = -1$  este singura rădăcină străină. Toate celelalte rădăcini date de formula (4) pentru  $0 < p \leq 2$  satisfac ecuația (1).

Mai scriem o dată identitățile care le-am stabilit pe parcurs: (pentru simetria scrierii vom înlocui pe  $p$  cu  $-w$ ):

$$u^3 + v^3 + w^3 - 3uvw = (u + v + w)(u^2 + v^2 + w^2 - uv - vw - wu),$$

$$2(u^2 + v^2 + w^2 - uv - vw - wu) = (u - v)^2 + (v - w)^2 + (w - u)^2.$$

Ele se dovedesc adesea utile pentru justificarea unor inegalități în alte probleme.

**M 73.** Pe un bilet de loterie trebuie marcate 8 căsuțe din 64. Care e probabilitatea ca după tragere, la care de asemenea se aleg 8 căsuțe din cele 64 (toate posibilitățile le considerăm egal probabile) să se vadă că s-au ghicit 4 căsuțe? 5 căsuțe?... toate cele 8 căsuțe?

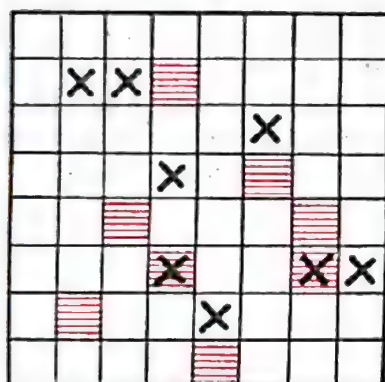


Fig. 101. Căsuțele hașurate sînt cîștigătoare; căsuțele alese de noi le-am marcat cu o cruce. Pe desen  $k = 2$ ,  $8 - k = 6$ .

După cum se știe, 8 căsuțe din 64 pot fi alese în  $C_{64}^8 = \frac{64!}{8!56!}$  moduri. Toate aceste moduri sînt egal probabile. Prin urmare, probabilitatea de a nimeri un anumit mod este  $1/C_{64}^8$ . Acum trebuie socotit în cîte cazuri vor fi ghicite exact  $k$  căsuțe ( $0 \leq k \leq 8$ ). Numărul acestor cazuri va fi egal cu numărul modurilor în care se aleg  $k$  căsuțe din cele 8 trase cu  $8 - k$  căsuțe din cele 56 netrase. De aceea el este egal cu  $C_8^k \cdot C_{56}^{8-k}$ . Pentru a găsi probabilitatea căutată  $f_k$  de a ghici exact  $k$  căsuțe, trebuie să se înmulțească probabilitatea unui mod cu acest număr. Vom obține

$$f_k = \frac{C_8^k \cdot C_{56}^{8-k}}{C_{64}^8}.$$

Astfel, probabilitățile de a ghici 0, 1, 2, ..., 8 căsuțe sînt egale respectiv cu:

$$f_0 = \frac{C_8^0 \cdot C_{56}^8}{C_{64}^8}; \quad f_1 = \frac{C_8^1 \cdot C_{56}^7}{C_{64}^8}; \quad \dots \quad f_8 = \frac{C_8^8 \cdot C_{56}^0}{C_{64}^8}. \quad (1)$$

Suma acestor nouă numere este 1.

Formal problema este rezolvată dar din punct de vedere practic acesta nu este încă un răspuns. Am dori să ne dăm seama cît de mari sînt șansele să ghicim un anumit număr de căsuțe dacă cumpărăm și completăm, să zicem, 10 bilete de loterie. Pentru aceasta trebuie să ne reprezentăm aproximativ aceste numere sub formă de fracții zecimale. La început vom calcula raportul dintre al  $k + 1$ -lea dintre aceste numere și al  $k$ -lea:

$$\frac{f_{k+1}}{f_k} = \frac{C_8^{k+1} \cdot C_{56}^{8-k-1}}{C_{64}^8} : \frac{C_8^k \cdot C_{56}^{8-k}}{C_{64}^8} = \frac{(8-k)^2}{(k+1)(48+k+1)}$$

În particular

$$\frac{f_1}{f_0} = \frac{64}{49} \approx 1,31; \quad \frac{f_2}{f_1} = \frac{49}{100}; \quad \frac{f_3}{f_2} = \frac{12}{51} \approx 0,235; \quad \frac{f_4}{f_3} = \frac{25}{208} \approx 0,12; \quad \frac{f_5}{f_4} \approx 0,06.$$

Să calculăm rapoartele lui  $f_2, f_3, f_4$  la  $f_0$  cu două zecimale

$$\frac{f_2}{f_0} = 0,64, \quad \frac{f_3}{f_0} \approx 0,15; \quad \frac{f_4}{f_0} = 0,02.$$

Este clar că  $f_5/f_0 < 0,02 \cdot 0,12$  și pentru gradul de aproximație ales  $f_5, f_6, f_7, f_8$  sînt egale cu zero. Putem face ecuația

$f_0(1 + 1,31 + 0,64 + 0,15 + 0,02) = 1$ , de unde  $f_0 \approx 0,32$ . Acum vom găsi pe  $f_1, f_2, f_3, f_4$ :

$$f_1 \approx f_0 \cdot 1,31 \approx 0,42; \quad f_2 \approx f_0 \cdot 0,64 \approx 0,20, \quad f_3 \approx f_2 \cdot 0,24 \approx 0,047; \quad f_4 \approx f_3 \cdot 0,12 \approx 0,0056.$$

Astfel, dacă cumpărăm 10 bilete printre ele mai curînd vor fi de acelea pe care s-au ghicit 0, 1, 2 și poate 3 căsuțe; probabilitatea de a ghici 4 căsuțe este foarte mică. Înmulțind pe  $f_4$  cu  $f_5/f_4 \approx 0,06$  ș.a.m.d. se pot obține valorile aproximative ale lui  $f_5, f_6, f_7, f_8$ . În particular  $f_8 = 2 \cdot 10^{-10}$ . Aceasta înseamnă că pentru a avea șanse reale de a ghici toate cele 8 căsuțe trebuie completate cîteva miliarde de bilete.

Cu ajutorul unei metode aproximative de calcul pe care am aplicat-o se poate arăta că dacă numărul  $N$  al căsuțelor de pe bilet este mult mai mare decît numărul  $m$  al căsuțelor care trebuie alese și  $m$  este destul de mare, atunci probabilitatea de a ghici  $k$  căsuțe este aproximativ egală c

$$f_k = \frac{C_m^k \cdot C_{N-m}^{m-k}}{C_N^m} \approx \frac{\mu^k \cdot e^{-\mu}}{k!}$$

unde  $\mu = m^2/(N - 2m)$  și  $e \approx 2,718...$

A.L. Toom

**M 74.** Un polinom  $p$  are următoarea proprietate: pentru un anumit număr  $a$ :

$$p(x) = p(a - x).$$

Să se demonstreze că  $p(x)$  poate fi pus sub forma unui polinom de  $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2$ . De exemplu dacă  $p(x) = x^5 + (1 - x)^5$ , atunci, evident că  $p(x) = p(1 - x)$  și, după cum se poate verifica ușor,

$$p(x) = 5y^2 + \frac{5}{2}y + \frac{1}{16},$$

unde

$$y = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2.$$

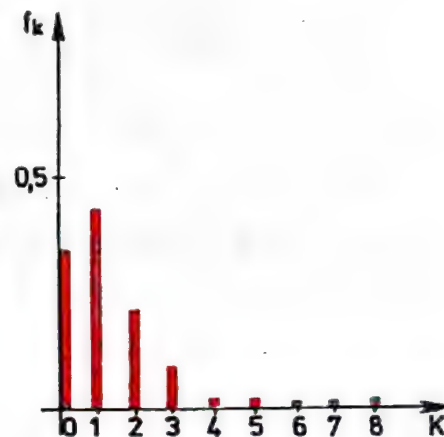


Fig. 102. Aici sînt prezentate numerele  $f_k$ -probabilitățile de a ghici  $k$  căsuțe ( $k = 0, 1 \dots 8$ ). Pentru  $k \geq 4$  mărimea  $f_k$  este foarte apropiată de zero.



Vom exprima pe  $x$  printr-o nouă variabilă  $y = x - \frac{a}{2}$ . Atunci  $x = \frac{a}{2} + y$ ,  $a - x = \frac{a}{2} - y$ . Dacă în polinomul  $p(x)$  în locul lui  $x$  punem  $\frac{a}{2} + y$ , atunci se obține un polinom de variabila  $y$ :  $p\left(\frac{a}{2} + y\right)$  care va satisface condiția

$$p\left(\frac{a}{2} + y\right) = p\left(\frac{a}{2} - y\right). \quad (1)$$

Fie

$$p\left(\frac{a}{2} + y\right) = b_0 + b_1y + b_2y^2 + b_3y^3 + \dots + b_ny^n. \quad (2)$$

Atunci

$$p\left(\frac{a}{2} - y\right) = b_0 - b_1y + b_2y^2 - b_3y^3 + \dots + b_ny^n$$

și egalitatea (1), după reduceri, ia aspectul:

$$b_1y + b_3y^3 + \dots = 0. \quad (3)$$

(Aici intră numai termeni cu  $y$  la exponent impar.)

Acum este „evident” că

$$b_1 = b_3 = \dots = 0, \quad (4)$$

de unde

$$p\left(\frac{a}{2} + y\right) = b_0 + b_2y^2 + b_4y^4 + \dots,$$

$p\left(\frac{a}{2} + y\right)$  apare ca un polinom de  $y^2$  adică  $p(x)$  apare ca un polinom de  $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2$  (Vă sfătuim să faceți toate aceste transformări asupra polinomului  $x^5 + (1-x)^5$  dat în textul problemei.)

Dacă dorim să asigurăm rigoarea matematică a rezolvării, trebuie să lămurim de ce este „evident” că din (3) rezultă (4).

Pentru aceasta trebuie să precizăm cum înțelegem egalitatea a două polinoame, de exemplu, egalitatea (3) sau (2) sau (1) sau cea din textul problemei.

De obicei, în școală, o astfel de egalitate se înțelege ca o egalitate de funcții, adică egalitatea celor doi membri pentru orice valori date variabilei. Atunci pentru trecerea de la (3) la (4) trebuie să ne referim la teorema despre polinomul identic nul: dacă  $c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n = 0$  pentru toate valorile reale ale lui  $x$ , atunci  $c_0 = c_1 = \dots = c_n = 0$ .

Remarcăm că în majoritatea manualelor de algebră modernă, de obicei se înțelege egalitatea polinoamelor ca egalitatea coeficienților corespunzători (după aducerea lor la forma standard  $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ ). Dacă toate egalitățile din problema noastră se înțeleg astfel, atunci la trecerea de la (3) la (4) cuvântul „evident” trebuie înlocuit cu „după definiție”.

A.L. Toom

**M 75.** a) Să se demonstreze că în orice poliedru convex, suma lungimilor tuturor muchiilor este mai mare decât întregul diametrului său. (Diametrul unui poliedru este cea mai mare dintre lungimile tuturor segmentelor posibile cu extremitățile în vîrfurile poliedrului.)

b) Să se demonstreze că pentru orice două vîrfuri  $A$  și  $B$  ale unui poliedru convex, se găsesc trei linii frînte formate din muchii ale poliedrului, unind punctele  $A$  și  $B$  astfel încît oricare două nu trec prin aceeași muchie.

c) Să se demonstreze că dacă într-un poliedru convex se taie două muchii, atunci pentru orice două vîrfuri ale sale  $A$  și  $B$  se găsește o linie frîntă care unește pe  $A$  cu  $B$  trecînd prin celelalte muchii.

d) Să se demonstreze că în problema b) se pot alege trei linii frînte care să nu aibă două cîte două vîrfuri comune afară de  $A$  și  $B$ .

A.G. Kušnirenko

Evident că din problema d) rezultă problema b) din b) rezultă c) și a).

a) Fie  $AB$  diametrul poliedrului  $P$ . Proiectăm toate muchiile lui  $P$  pe  $AB$ . Să examinăm cîte puncte se proiectează într-un anumit punct  $C$  situat în interiorul lui  $AB$ . Dacă prin  $C$  se duce un plan  $\pi$  perpendicular pe  $AB$ , atunci  $\pi$  intersectează pe  $P$  după un poligon convex. Vîrfurile acestui poligon vor fi punctele de intersecție a lui  $\pi$  cu muchiile lui  $P$  (vor fi cel puțin trei vîrfuri) și înseamnă că în fiecare punct interior al lui  $AB$  se proiectează cel puțin trei de pe muchiile lui  $P$ . De aici se deduce ușor afirmația problemei a).

Pentru rezolvarea problemelor c) și d) vom folosi următoarea afirmație evidentă intuitiv: Pentru orice două vîrfuri  $A$  și  $B$  ale unui poliedru convex  $P$ , există un drum de la  $A$  la  $B$  prin muchiile lui  $P$ . Demonstrația o lăsăm cititorului.

c) Presupunem că s-au tăiat muchiile  $r_1$  și  $r_2$ . Este evident că există un drum  $L_1$  care unește capetele lui  $r_1$  și care nu trece prin  $r_2$ . Într-adevăr, muchia  $r_1$  este formată de două fețe. Muchia  $r_2$  nu este situată cel puțin într-una dintre aceste două fețe, de aceea  $L_1$  poate fi luat conturul acestei fețe. Analog pentru  $r_2$  există un drum  $L_2$ . Să considerăm acum două vîrfuri arbitrare  $A$  și  $B$ . Înlocuind în drumul  $L$  care merge de la  $A$  la  $B$  (care există, după cele spuse mai sus) muchia  $r_1$  cu drumul  $L_1$  și muchia  $r_2$  cu drumul  $L_2$  (desigur, numai dacă aceste muchii se găsesc în drumul  $L$ ) vom obține drumul cerut, după celelalte muchii. Remarcăm că acest drum poate să aibă auto-intersecții care, dealtfel, nu sînt greu de eliminat.

d) Cum s-a arătat mai sus, pentru orice două vîrfuri  $A$  și  $B$  ale unui poliedru convex, se găsește un drum care merge de la  $A$  la  $B$  prin muchiile sale. Numim lungime a unui astfel de drum, numărul muchiilor din care este format și vom numi distanța de la  $A$  la  $B$  — o vom nota  $d(A, B)$  — lungimea celui mai scurt (după numărul muchiilor) drum. Pentru demonstrația cerinței problemei, vom fixa punctul  $A$  și vom face o inducție după distanța dintre  $A$  și  $B$ . Dacă  $d(A, B) = 1$ , atunci  $A$  și  $B$  sînt situate pe aceeași muchie și afirmația este evidentă, fiindcă se poate merge de la  $A$  la  $B$  pe muchia  $AB$  și pe contururile celor două fețe care determină pe  $AB$ . Să presupunem că afirmația este demonstrată pentru toate vîrfurile aflate la distanța  $n - 1$  de  $A$ . Fie  $d(A, B) = n$ . Atunci există un vîrf  $B'$  astfel încît  $d(A, B') = n - 1$  și  $d(B', B) = 1$ . Să considerăm toate fețele care-l conțin pe  $B$ : Mulțimea tuturor muchiilor care aparțin acestor fețe constă din „raze” (muchii cu un vîrf în  $B'$ ) și „inel” (format din restul muchiilor). Unul dintre vîrfurile inelului este punctul  $B$ . După presupunerea de inducție există trei drumuri  $l_1, l_2, l_3$  de la  $A$  la  $B'$  care nu au două cîte două puncte comune cu excepția capetelor.



Evident că fiecare dintre aceste trei drumuri trece cel puțin printr-unul dintre virfurile inelului. Aceste virfuri ale inelului le vom numi ocupate. Ne vom deplasa acum de la punctul  $B$  după inel într-o direcție pînă cînd ajungem la primul punct ocupat și apoi în cealaltă direcție. Să considerăm cele două virfuri ocupate obținute  $A_1$  și  $A_2$  (unul dintre ele poate fi virful  $B$ ). Sînt posibile două cazuri.

**Cazul 1.** Virfurile ocupate  $A_1$  și  $A_2$  aparțin unor drumuri diferite, să zicem  $l_1$  și  $l_2$ . Atunci vom construi trei drumuri de la  $A$  la  $B$  în felul următor. Primul drum de la  $A$  la  $A_1$  după  $l_1$  apoi de la  $A_1$  la  $B$  după inel (observăm că prin alegerea punctului  $A_1$  pe ultima parte nu ne-am intersectat cu drumurile  $l_3$  și  $l_2$ ). Al doilea drum: de la  $A$  la  $A_2$  după  $l_2$ , apoi de la  $A_2$  la  $B$  după inel. Al treilea drum: de la  $A$  la  $B'$  după  $l_3$ , apoi după muchia  $BB'$ . Evident că cele trei drumuri construite nu au două cîte două puncte comune, afară de capete.

**Cazul 2.** Virfurile ocupate  $A_1$  și  $A_2$  aparțin aceluiași drum, să zicem  $l_2$ . Vom vedea atunci care dintre aceste virfuri se întîlnește primul în deplasarea de la  $A$  la  $B'$  după  $l_1$  și vom lua porțiunea  $l'_1$  a drumului  $l_1$  de la  $A$  pînă la primul dintre aceste virfuri. După aceasta considerăm cele trei drumuri  $l'_1$ ,  $l_2$ ,  $l_3$  considerăm mulțimea virfurilor inelului ocupate de drumurile  $l'_1$ ,  $l_2$ ,  $l_3$ , și facem din nou raționamentul precedent relativ la aceste trei drumuri. Dacă dăm peste cazul 1, atunci construim cele trei drumuri prin procedeul descris mai sus, dacă din nou dăm peste cazul 2, atunci vom considera un nou triplet de drumuri  $l''_1$ ,  $l_2$ ,  $l_3$ . Dacă și pentru acest triplet apare cazul 2, atunci mai considerăm un nou triplet ș.a.m.d. Întrucît în modul acesta avansăm pe inel tot mai departe și pe inel sînt virfuri care aparțin drumurilor  $l_2$  și  $l_3$ , atunci după un număr de pași obținem cazul 1, și drumurile cerute de la  $A$  la  $B$  vor fi construite. Problema d) este rezolvată. Este adevărată o afirmație mai puternică: Pentru orice două virfuri  $A$  și  $B$  se pot găsi trei lanțuri de fețe, care nu au fețe comune, astfel încît prima față conține virful  $A$ , ultima virful  $B$  și fețele vecine au o muchie comună.

A.G. Kušnirenko

**M 76.** Într-o societate formată din  $n$  persoane, oricare două persoane care nu se cunosc între ele au exact cîte două cunoștințe comune, iar oricare două persoane care se cunosc nu au alte cunoștințe comune. Să se demonstreze că în această societate fiecare persoană se cunoaște cu același număr de oameni.

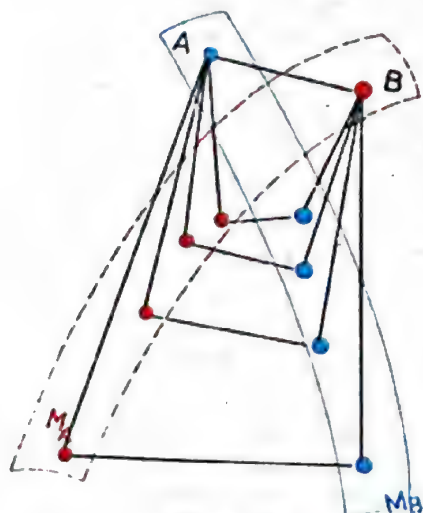


Fig. 103

Pentru fiecare persoană  $X$ , vom nota prin  $m_X$  numărul cunoștințelor sale.

Fie  $A$  și  $B$  două persoane care se cunosc între ele (fig. 103). Vom nota prin  $M_A$  mulțimea cunoștințelor lui  $A$  și prin  $M_B$ , mulțimea cunoștințelor lui  $B$ . Vom demonstra că:

- (1)  $M_A$  și  $M_B$  nu au elemente comune.
- (2) fiecare persoană din  $M_A$  are exact o cunoștință în  $M_B$  și
- (3) fiecare persoană din  $M_B$  are exact o cunoștință în  $M_A$ .

Afirmația (1) rezultă direct din ipoteza problemei:  $A$  și  $B$  nu pot să aibă cunoștințe comune. Demonstrăm pe (2); (3) se demonstrează analog. Fie  $X \in M_A$  (această

scriere înseamnă „ $X$  aparține mulțimii  $M_A$ “. Fie  $X$  este  $B$  și atunci conform lui (1) el are în  $M_B$  numai o cunoștință, chiar pe  $A$ , fie  $X \neq B$  și atunci conform lui (1),  $X$  nu se cunoaște cu  $B$ , și deci  $X$  și  $B$ , trebuie să aibă în afară de  $A$  încă o singură cunoștință comună, adică  $X$  are exact o cunoștință în  $M_B$ , ceea ce trebuia demonstrat. Din (2) și (3) rezultă că între mulțimile  $M_A$  și  $M_B$  poate fi stabilită o corespondență biunivocă, de aceea  $m_A = m_B$ .

Astfel, dacă  $A$  și  $B$  se cunosc între ele, atunci  $m_A = m_B$ . Dacă însă  $A$  și  $B$  nu se cunosc, atunci ele au o cunoștință  $C$  și deci  $m_A = m_B = m_C$ .

Mulți cititori au rezolvat problema altfel. Pentru fiecare persoană fie  $M_A$  mulțimea tuturor cunoștințelor sale și  $N_A$  mulțimea celor ce nu se cunosc cu  $A$ . Atunci, fiecărui element din  $N_A$  i se poate pune în corespondență o pereche de elemente din  $M_A$  (acele cu care el se cunoaște) și nu e greu de demonstrat că această corespondență dintre mulțimea  $N_A$  și mulțimea tuturor perechilor posibile din  $M_A$  va fi biunivocă. Prin urmare dacă  $M_A$  va conține  $m_A$  elemente, atunci în  $N_A$  vor fi  $m_A(m_A - 1)/2$  elemente și în total în societate vor fi  $n = 1 + m_A + m_A(m_A - 1)/2$  persoane. Această egalitate este valabilă pentru orice persoană  $A$ . Dar ecuația

$$n = 1 + x + \frac{x(x - 1)}{2}$$

are (pentru  $n > 1$ ) numai o rădăcină pozitivă, prin urmare  $m_A$  este unul și același pentru toți  $A$ .

Este interesant de stabilit pentru ce  $n$ , astfel de societăți există în realitate. Răspunsul complet la această chestiune nu îl știm. Am văzut că  $n = 1 + m(m + 1)/2$  unde  $m$  este numărul cunoștințelor unei persoane dar nu pentru orice astfel de  $n$  există societatea respectivă. De exemplu, nu e greu de demonstrat că nu există pentru  $m = 3$ ,  $m = 4$  și în general pentru  $m = 4k + 3$ . În afară de cazurile evidente,  $m = 1$ ,  $n = 2$  și  $m = 2$ ,  $n = 4$  mai cunoaștem numai unul. El este reprezentat în figura 104 și într-un alt mod în figura 105. Aici  $m = 5$ ,  $n = 16$ .

Această configurație din 16 puncte și 40 de segmente poate fi descrisă astfel: mulțimea muchiilor, vîrfurilor și diagonalelor mari ale unui cub cvadridimensional. Să se demonstreze că există 1920 de moduri de a se transforma în ea însăși, astfel încît punctele să treacă în puncte și segmentele în segmente.

N.V. Vasiliev

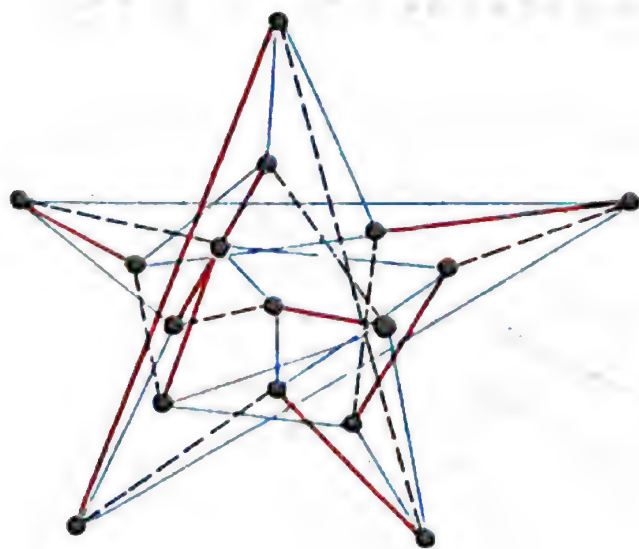


Fig. 104

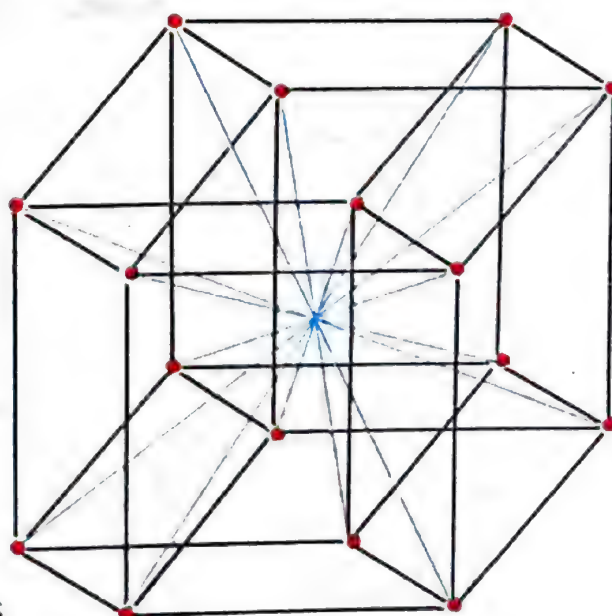


Fig. 105



**M 77.** Lungimile a două laturi ale unui triunghi sînt de 10 și 15. Să se demonstreze că bisectoarea unghiului dintre ele nu e mai mare decît 12.

N.B. Vasiliev

Vom prezenta numai trei rezolvări din multele primite.

I. Ducem  $DE \parallel BC$  (figura 106). Atunci triunghiul  $CDE$  este isoscel, de aceea  $CE = ED = x$ , iar  $x$  se poate găsi din asemănarea triunghiurilor  $ABC$  și  $ADE$ ;  $\frac{15-x}{15} = \frac{x}{10}$ , deci  $x = 6$  și  $CD < CE + ED = 2x = 12$ .

II. După proprietatea bisectoarei  $BD/DA = BC/CA = 2/3$ . Ducem  $BK \perp CD$  pînă la intersecția cu latura  $AC$  (fig. 107) și  $DL \perp CD$ . Atunci  $AK = AC - KC = AC - BC = 5$ , dar  $KL/LA = BD/DA = 2/3$ , de unde  $KL = 2$  și  $CD < CL = 12$ .

III. Prin metoda ariilor. Fie  $\sphericalangle BCD = \sphericalangle ACD = \alpha$ , atunci (fig. 108)  $S_{\triangle ACD} + S_{\triangle BCD} = S_{\triangle ABC} \Leftrightarrow al \sin \alpha + bl \sin \alpha = ab \sin 2\alpha$ , deci

$$l = \frac{2ab}{a+b} \cos \alpha = \frac{2 \cdot 10 \cdot 15}{25} \cos \alpha = 12 \cos \alpha < 12.$$

Mulți rezolvatori au folosit și alte formule pentru lungimea bisectoarei:

$$l^2 = ab - mn = ab - \frac{abc^2}{(a+b)^2} = \frac{4abp(p-c)}{(a+b)^2}.$$

Prin oricare dintre aceste moduri se poate demonstra că bisectoarea  $l$  a triunghiului nu depășește valoarea  $2ab/(a+b)$  („media armonică a lungimilor  $a$  și  $b$  ale laturilor). Această evaluare nu mai poate fi îmbunătățită: pentru orice  $l < 2ab/(a+b)$  se poate construi un triunghi cu laturile  $a$  și  $b$  și bisectoarea  $l$  dintre ele (convingeți-vă de acest lucru!).

Încercați să demonstrați următoarele două afirmații care generalizează problema:

1) Dacă în triunghiul  $ABC$ , în care  $BC = a$ ,  $AC = b$ , punctul  $D$  împarte latura  $AB$  în raportul  $BD : DA = m : n$ , atunci  $|mb - na|/(m+n) < CD < mb + na/(m+n)$ . (În problema noastră  $m : n = a : b$ .)

2) Dacă segmentul  $CD$  împarte unghiul  $BCA$  în raportul  $\sphericalangle BCD : \sphericalangle DCA = p : q$  atunci  $CD < (p+q)ab/(pa+qb)$  (În problema noastră  $p : q = 1$ ; pentru demonstrație se poate folosi următoarea lemă: dacă  $0 < \alpha < \beta < \pi$ , atunci  $\sin \alpha/\alpha > \sin \beta/\beta$ ).

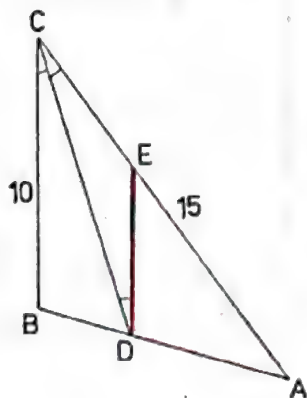


Fig. 106

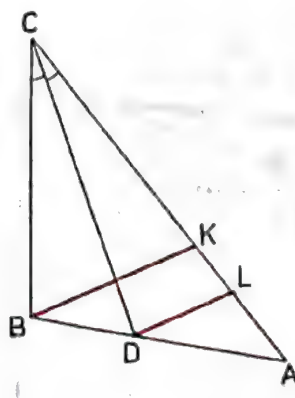


Fig. 107

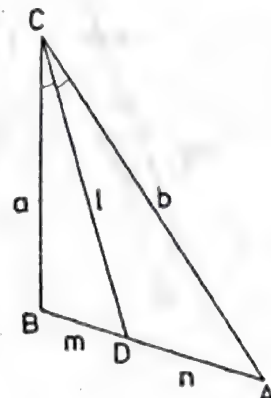


Fig. 108

**M 78.** Să se demonstreze că orice număr natural poate fi pus sub forma  $\frac{(x+y)^2 + 3x + y}{2}$  unde  $x$  și  $y$  sînt numere naturale și această reprezentare este unică.

Vom nota suma  $x + y$  prin  $s$  și vom transcrie formula dată astfel:

$$n = \frac{(x+y)^2 + 3x + y}{2} = \frac{s^2 + s}{2} + x. \quad (1)$$

Condiția că  $x$  și  $y$  sînt numere naturale este echivalentă cu  $x \geq 0$  și  $s \geq x$ ,  $x$  și  $s$  numere naturale. Pentru un  $s$  dat, mărimea  $x$  poate să ia valorile:  $0, 1, \dots, s$ ; în mod corespunzător, mărimea  $n$  determinată de formula (1) ia valorile:  $\frac{s^2 + s}{2}, \frac{s^2 + s}{2} + 1, \dots, \frac{s^2 + s}{2} + s$ . Astfel, fiecărui  $s = 0, 1, 2, \dots$  îi corespunde un segment format din  $s + 1$  numere naturale  $n$ . Să observăm că ultimul număr al segmentului corespunzător lui  $s$  este cu unu mai mic decît primul număr al segmentului corespunzător lui  $s + 1$ :

$\left(\frac{s^2 + s}{2} + 1 + s\right) = \frac{(s+1)^2 + (s+1)}{2}$ . De aceea, aceste segmente vor conține toate numerele naturale  $n$  și fiecare  $n$  va intra numai într-un segment, adică lui îi va corespunde o singură pereche de valori  $s$  și  $x$ .

Problema este rezolvată. Am demonstrat că formula (1) permite să se „numeroteze” toate punctele  $(x, y)$  cu coordonate naturale, cu numerele  $n = 0, 1, 2, \dots$ . În figura 109 se arată cum sînt aranjate aceste numere în ordine

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$s$	0	1	1	2	2	2	3	3	3	3
$x$	0	0	1	0	1	2	0	1	2	3
$y$	0	1	0	2	1	0	3	2	1	0

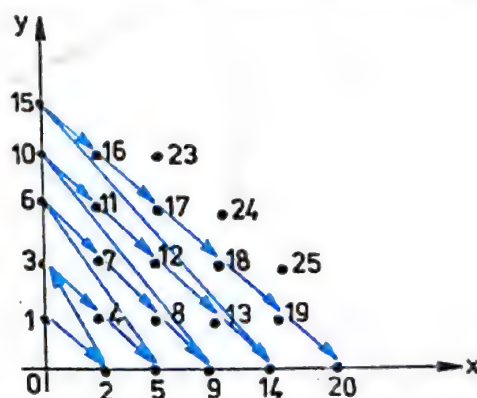


Fig. 109

E. Turkeyici a prezentat în rezolvarea sa o formulă analoagă cu (1) care permite să se numeroteze grupurile făcute nu din două ci din  $k$  numere naturale  $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ :

$$n = C_{s_k + k - 1}^k + C_{s_{k-1} + k - 2}^{k-1} + \dots + C_{s_2 + 1}^2 + C_{s_1}^1,$$

unde  $s_i = x_1 + x_2 + \dots + x_i$ .

De exemplu pentru  $k = 3$  se obține formula

$$n = \frac{s_3(s_3 + 1)(s_3 + 2)}{6} + \frac{s_2(s_2 + 1)}{2} + s_1 = \frac{1}{6} (x_1 + x_2 + x_3)^3 + 3(x_1 + x_2 + x_3)^2 + 3(x_1 + x_2)^2 + 11x_1 + 5x_2 + 2x_3.$$

Încercați să generalizați problema în altă direcție: să se găsească formula care stabilește corespondența dintre toate punctele din plan cu coordonate întregi și toate numerele întregi (sau întregi nenegative)  $n$ . Se poate scrie această formulă ca un polinom de gradul al doilea  $n = f(x, y)$  ca formula (1)?



**M 79.** Două puncte  $P$  și  $Q$  se mișcă pe două drepte concurente, cu aceeași viteză constantă  $v$ . Să se demonstreze că în plan există un punct fix  $A$  astfel încât, în orice moment, distanțele sale la punctele  $P$  și  $Q$  să fie egale.

I.F. Șarighin

Fie  $O$  punctul de intersecție a dreptelor date:  $P_0$  și  $Q_0$  pozițiile punctelor în momentul  $t_0$  în care ele se află la distanțe egale de  $O$  ( $t_0$  este media aritmetică a valorilor respective ale lui  $t$  în care cele două puncte au trecut prin  $O$ );  $A$  punctul de intersecție a perpendicularelor pe dreptele date, ridicate respectiv în punctele  $P_0$  și  $Q_0$ . Vom demonstra că punctul  $A$  este acel punct fix cerut de problemă.

Cazul particular în care  $P_0, Q_0$  (și  $A$ ) coincid cu  $O$ , este evident. În cazul general (figura 110) este clar că triunghiurile  $AP_0O$  și  $AQ_0O$  sînt congruente, de aceea  $AP_0 = AQ_0$ . Fie  $P$  și  $Q$  pozițiile punctului într-un moment arbitrar  $t$  (diferit de  $t_0$ ). Atunci  $PP_0 = QQ_0$  (punctele se mișcă cu aceeași viteză), triunghiurile  $PP_0A$  și  $QQ_0A$  sînt congruente după cele două catete, deci  $AP = AQ$ .

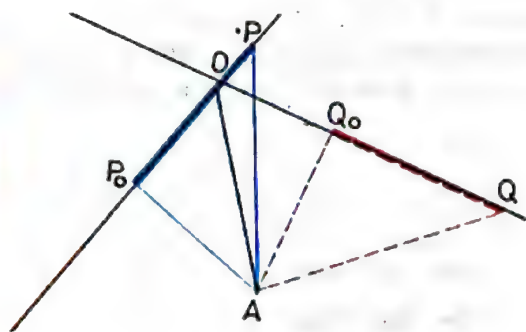


Fig. 110

Din rezolvarea dată rezultă că este adevărată o afirmație mai tare decît egalitatea distanțelor de la punctul  $A$  la respectivele puncte  $P$  și  $Q$ : dacă se rotește una dintre dreptele date în jurul punctului  $A$  (cu unghiul  $P_0AQ_0$ ), astfel încît ea să coincidă cu cealaltă, atunci în orice moment punctul  $P$  coincide cu punctul  $Q$ .

**M 80.** Într-un tablou de dimensiuni  $m \times n$  sînt scrise numere arbitrare. Se stabilește să se schimbe semnele tuturor numerelor de pe o coloană sau de pe o linie. Să se demonstreze că repetînd această operație de mai multe ori, se poate obține un tablou în care suma numerelor din orice coloană și suma numerelor de pe orice linie vor fi nenegative.

A.S. Șvarț

Vom schimba semnele numerelor de pe liniile și coloanele în care suma numerelor este negativă. La fiecare astfel de schimbare a semnelor, suma tuturor numerelor din tablou se mărește. Prin urmare nu se poate obține unul și același tablou de două ori. Dar în total numărul tablourilor diferite care se pot obține dintr-un tablou dat, prin schimbarea semnelor în liniile și coloanele sale, este finit (și anume  $2^{m+n}$ ). De aceea, după un număr oarecare de pași, ajungem la un tablou căruia nu i se mai poate face operația indicată, adică în care suma numerelor de pe fiecare coloană și de pe fiecare linie este nenegativă. Se poate demonstra că pentru un tablou  $m \times n$ , nu sînt necesare mai mult de  $\frac{m+n}{2}$  operații.

**M 81.** În interiorul unui pătrat  $A_1A_2A_3A_4$  se ia un punct arbitrar  $P$ . Din vârful  $A_1$  se duce o perpendiculară pe dreapta  $A_2P$ , din  $A_2$  una pe  $A_3P$ , din  $A_3$  pe  $A_4P$ , din  $A_4$  pe  $A_1P$ . Să se demonstreze că toate aceste patru perpendiculare (sau prelungirile lor) sînt concurente.

A.N. Vilenkin

Vom roti pătratul (vezi figura 111) în jurul centrului său cu  $90^\circ$ , astfel încît vârful  $A_2$  să treacă în  $A_1$ ,  $A_3$  în  $A_2$ ,  $A_4$  în  $A_3$  și  $A_1$  în  $A_4$ . Atunci fiecare dintre dreptele  $A_2P$ ,  $A_3P$ ,  $A_4P$ ,  $A_1P$  trece în perpendiculara respectivă (căci se rotește cu  $90^\circ$ !), deci e evident că cele patru perpendiculare vor trece prin punctul  $P'$ , imaginea punctului  $P$  prin rotația făcută.

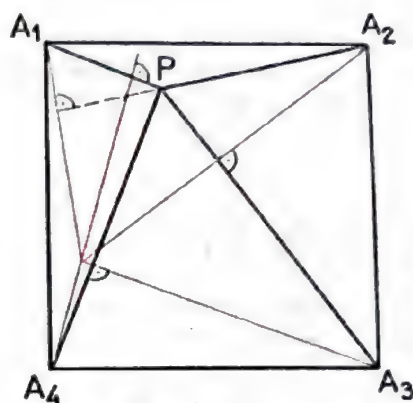


Fig. 111

**M 82.** Pe o pistă de automobile circulară, staționează (în puncte diferite) câteva mașini identice. Se știe că dacă toată benzina de care dispun, s-ar turna într-o singură mașină, atunci aceasta ar putea să parcurgă toată pista și să se ajungă în locul de plecare. Să se demonstreze că cel puțin una dintre mașinile aflate pe pistă poate să parcurgă întregul drum, luînd pe drum benzină de la celelalte mașini.

Rezolvarea cea mai directă se face prin inducție după numărul mașinilor. Cazul  $n = 1$  este evident. Să presupunem că pentru  $n$  mașini afirmația este demonstrată. Fie  $n + 1$  mașini. Atunci, printre ele se găsește o mașină  $A$  care poate, folosind numai benzina pe care o are ea, să ajungă pînă la mașina următoare  $B$  (acest lucru se demonstrează ușor prin reducere la absurd). Punem din mașina  $B$  benzina în  $A$  și scoatem mașina  $B$  de pe pistă. Printre cel  $n$  mașini rămase, după presupunerea de inducție, se găsește una care poate parcurge tot drumul, luînd pe traseu benzină de la celelalte mașini. E clar că această mașină poate să facă acest lucru și în situația inițială, cînd pe pistă sînt  $n + 1$  mașini; pe porțiunea de la  $A$  la  $B$  ea va lua benzină de la mașina  $A$ , iar pe restul porțiunilor ea are tot atîta benzină ca și în cazul a  $n$  mașini.

Mulți cititori au observat că problema se reduce la următoarea: pe o circumferință sînt scrise  $n$  numere a căror sumă este pozitivă; atunci se găsește un astfel de număr pozitiv, încît suma dintre el și următorul este pozitivă, suma dintre el și următorii doi este pozitivă ș.a.m.d., pînă la suma a  $n - 1$  numere. (E suficient ca lîngă fiecare mașină să se scrie un număr egal cu diferența dintre cantitatea de benzină pe care o are și cantitatea de benzină necesară ca să ajungă la mașina următoare.)

**M 83.** Să se demonstreze că pentru nici un  $n$ , numerele  $1, 2, \dots, n$  nu pot fi împărțite în două grupe, astfel încît produsul numerelor dintr-o grupă să fie egal cu produsul numerelor din cealaltă grupă.



Cerința problemei rezultă din următoarea teoremă:

Pentru orice  $x > 1$ , între  $x$  și  $2x$  există cel puțin un număr prim. (Prima demonstrație a acestei teoreme, numită postulatul lui Bertrand, a fost dată de P.L. Cebîșev.)

Vom lua numărul prim  $p$  astfel încît  $\frac{n}{2} < p < n$ . El poate să intre numai într-o grupă de numere și nu putem să-l „egalăm” cu cineva, pentru că  $2p > n$ . Acum cerința problemei rezultă din teorema unicității descompunerii în factori primi.

N.B. Vasiliev

M 84. Fie  $A$  piciorul perpendicularei coborîte din centrul unui cerc dat pe o dreaptă dată  $d$ . Pe această dreaptă se iau punctele  $B$  și  $C$ , astfel încît  $AB = AC$ . Prin punctul  $B$  respectiv  $C$  se duc două secante arbitrare dintre care una taie cercul în punctele  $P$  și  $Q$ , iar a doua în punctele  $M$  și  $N$ . Dreptele  $PM$  și  $QN$  intersectează dreapta  $d$  în punctele  $R$ , respectiv  $S$ . Să se demonstreze că  $AR = AS$ . (Această problemă — sau unele variante ale sale — se numește uneori problema „fluturelui”; proveniența denumirii rezultă clar din fig. 112.)

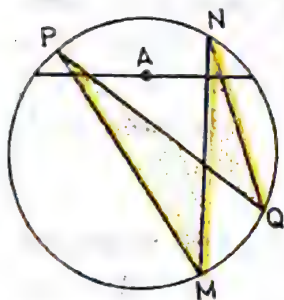


Fig. 112

Fie  $P'$ ,  $Q'$ ,  $M'$  și  $R'$  puncte simetrice cu punctele  $P$ ,  $Q$ ,  $M$  și  $R$  față de diametrul  $KL$  al cercului, ce trece prin punctul  $A$ , și  $E$  și  $E'$  punctele de intersecție ale dreptei  $d$  cu cercul. Trebuie să demonstrăm că punctele  $R'$  și  $S$  coincid. Vom demonstra că și punctul  $R'$  și punctul  $S$  sînt situate pe cercul care trece prin punctele  $C$ ,  $N$  și  $P'$ . Acest cerc este unic (cazul în care două dintre punctele  $C$ ,  $N$  și  $P'$  coincid este evident) și el intersectează dreapta  $d$  în afară de punctul  $C$  încă într-un singur punct în care trebuie să se afle și  $R'$  și  $S$ .

Punctele  $C$ ,  $N$ ,  $P'$  și  $S$  sînt situate pe un cerc întrucît (figura 113):

$$2 \angle CSN = \cup EN + \cup QE' = \cup Q'E + \cup EN = \cup Q'N = 2 \angle CP'N,$$

iar punctele  $C$ ,  $N$ ,  $P'$  și  $R'$  sînt situate pe un cerc, întrucît

$$\begin{aligned} 2 \angle CR'P' &= \cup EP' + \cup M'E' = \cup ME + \cup EP' = \\ &= 360^\circ - \cup ME'P' = 360^\circ - 2 \angle CNP'. \end{aligned}$$

Această rezolvare suferă de o defecțiune esențială: ea se bazează în mod explicit pe figura 113 și nu ține cont că configurația descrisă în problemă poate să aibă cu totul altă înfățișare; punctele de pe dreaptă pot să fie dispuse în altă ordine, unele dintre punctele  $B$  și  $R$  și chiar întreaga dreaptă  $d$  pot să fie în exteriorul cercului (vezi figura 114) etc. Cum se corectează această defecțiune? Trebuie sau să luăm în considerare într-un anumit mod toate cazurile de figură posibile sau să dăm o rezolvare care să fie valabilă pentru toate cazurile. Vom arăta cum se poate face acest lucru, folosind o anumită definiție a „unghiului dintre două drepte”.

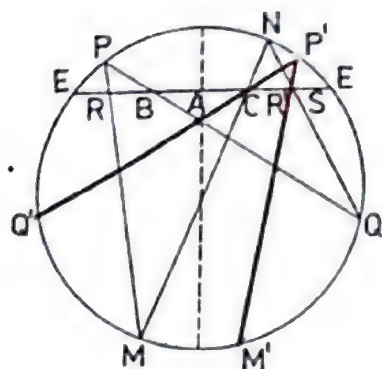


Fig. 113

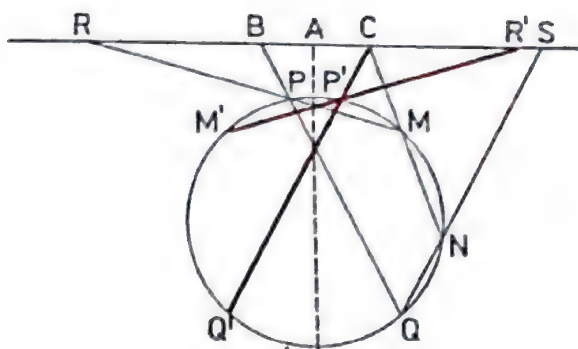


Fig. 114

Fie  $d_1$  și  $d_2$  două drepte din plan care se intersectează în punctul  $O$ . Vom nota prin  $\angle(d_1, d_2)$  unghiul cu care trebuie să rotim în jurul punctului  $O$ , în sens contrar acelor ceasului, dreapta  $d_1$  pentru ca ea să coincidă cu  $d_2$  ( $0^\circ < \angle(d_1, d_2) < 180^\circ$ ). Dacă dreptele  $d_1$  și  $d_2$  sînt paralele sau coincid, atunci, prin definiție  $\angle(d_1, d_2) = 0$ . Se verifică faptul că pentru orice două puncte date  $U$  și  $V$  și pentru un unghi dat  $\alpha$  ( $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ ) mulțimea punctelor  $X$  pentru care  $\angle(UX, VX) = \alpha$  va fi un cerc (strict vorbind cu excepția înseși a punctelor  $U$  și  $V$ ); cu alte cuvinte, patru puncte  $U, V, X_1$  și  $X_2$  sînt conciclice atunci și numai atunci cînd  $\angle(UX_1, VX_1) = \angle(UX_2, VX_2) \neq 0$  (figura 115, a; comparația figurilor  $a$  și  $b$  arată avantajul noului mod de definire a unghiului).

Să ne întoarcem la problemă. Acum afirmația că cinci puncte  $C, N, P', S, R'$  sînt situate pe același cerc (de unde va rezulta că  $R'$  coincide cu  $S$ ) rezultă din egalitățile

$$\angle(CS, NS) = \angle(Q'Q, NQ) = \angle(Q'P', NP') = \angle(CP', NP');$$

$$\angle(CR', P'R') = \angle(MM', P'M') = \angle(MN, P'N) = \angle(CN, P'N).$$

Aceste egalități se verifică ușor, în mod formal, fără a apela la figură, trebuie doar să știm care puncte sînt situate pe o dreaptă și care pe un cerc; afară de teorema menționată mai sus, s-a mai folosit faptul că  $Q'Q \parallel MM' \parallel d$ . (Desigur, mai trebuie analizate cazurile „degenerate” în care anumite două puncte care definesc în aceste egalități o dreaptă, coincid; acestea sînt suficient de evidente și nu ne vom opri asupra lor.) Acum problema este complet rezolvată.

Vom da o altă formulare, mai naturală, a acestei probleme (gîndiți-vă pentru ce această formulare este echivalentă cu problema).

Fie  $P$  și  $N$  două puncte diferite ale unui cerc cu centrul în  $O$ ;  $A$  piciorul perpendicularei duse din punctul  $O$  pe o dreaptă dată  $d$  și  $f$  transformarea care îi pune în corespondență fiecărui punct  $X$  de pe dreapta  $d$ , punctul  $f(X)$  de pe aceeași dreaptă după următoarea regulă: dacă  $X'$  este punctul de intersecție a dreptei  $PX$  cu cercul,  $X''$  punctul de intersecție a dreptei  $NX'$  cu  $d$ , atunci  $f(X)$  este punctul simetric cu  $X''$  față de  $A$ . Această transformare  $f$  coincide cu inversa sa, adică  $f(f(X)) = X$  pentru toți  $X$  (figura 116).

Celor care sînt familiarizați cu noțiunile de bază ale geometriei proiective, le propunem să încerce să găsească o demonstrație „proiectivă” simplă a acestei teoreme (obser-





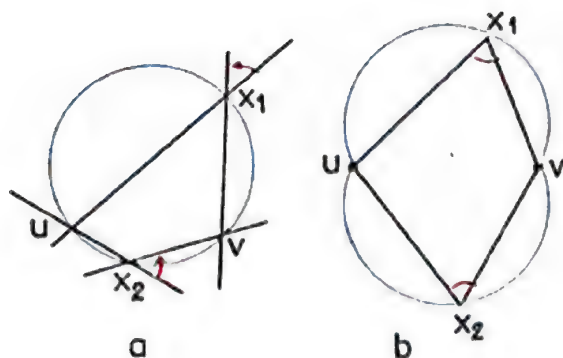


Figura 115. Cu arce de cerc s-au indicat mulțimile de puncte pentru care:  
a)  $\angle(UX, VX) = \alpha$  (stînga) și b)  $\angle UXV = \alpha$  (dreapta)

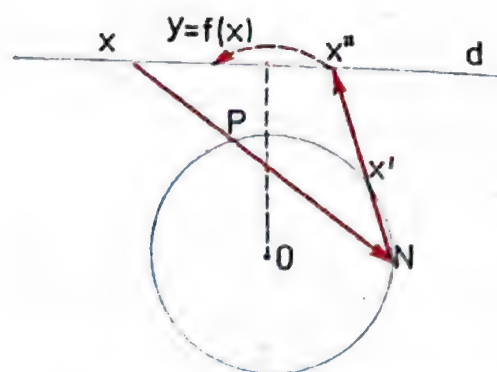


Figura 116. O altă formulare a problemei M 84: ca rezultat al celor trei transformări indicate pe desen, din punctul  $X$  se obține  $Y = f(X)$ ; dacă se efectuează aceleași pentru punctul  $Y$ , se obține  $f(Y) = X$ .

văm că chiar în formulare trebuie să considerăm dreapta  $d$  extinsă, adică să adăugăm la  $d$  punctul de la infinit căci atunci transformările de care e vorba vor fi bijectii). Iată planul rezolvării „fără calcule”.

Dreapta proiectivă completată cu punctul de la infinit, este natural să ne-o închipuim ca un cerc (cînd punctul  $X$  parcurge dreapta, punctul  $X'$  parcurge o rotație completă pe cerc).

... Dacă punctul  $X$  se mișcă într-un sens, atunci  $Y = f(X)$  se mișcă în sens contrar, de aceea transformarea  $f$  are două puncte fixe  $Z_1$  și  $Z_2$ , astfel încît  $f(Z_1) = Z_1$ ;  $f(Z_2) = Z_2$  (acest lucru este adevărat pentru orice transformare continuă bijectivă  $f$  a unui cerc pe el însuși, care schimbă sensul deplasării).

Dacă  $L$  este punctul de la infinit al dreptei  $d$ , atunci se verifică ușor că  $f(f(L)) = L$  și  $f(L) \neq L$ . Transformarea  $X \rightarrow f(f(X))$  este proiectivă și are trei puncte fixe:  $Z_1$ ,  $Z_2$  și  $L$ , de aceea  $f(f(X)) = X$  pentru toți  $X$ .

N.B. Vasiliev

**M 85.** Să se demonstreze că dacă  $a_1, a_2, \dots, a_m$  sînt numere naturale două cîte două diferite, nici unul dintre ele nefiînd pătratul unui număr întreg mai mare decît unu, și  $b_1, b_2, \dots, b_m$  numere întregi nenule, atunci

$$b_1 \sqrt{a_1} + b_2 \sqrt{a_2} + \dots + b_m \sqrt{a_m} \neq 0.$$

L.N. Vaserstein

Pînă la  $n = 4$ , se demonstrează ușor prin reducere la absurd, ridicînd de cîteva ori la pătrat ambele părți (grupate într-un mod convenabil). În cazul general, vom face o demonstrație prin inducție după numărul factorilor primi diferiți  $p_1, p_2, \dots, p_N$  care divid cel puțin pe unul dintre numerele  $a_i$ . Așa cum se întîmplă adeseori este mai util să se demonstreze prin inducție o afirmație mai tare (interesantă în ea însăși):

există numerele întregi  $c_1, d_1, c_2, d_2, \dots, c_e, d_e$ , astfel încît  $d_i \neq 0$ ,  $c_i \geq 1$ , toți divizorii primi ai numerelor  $c_i$  fac parte dintre  $p_1, \dots, p_N$  și produsul  $(d_1 \sqrt{c_1} + \dots + d_e \sqrt{c_e})(b_1 \sqrt{a_1} + \dots + b_n \sqrt{a_n})$  este un număr întreg nenul.

Vom nota  $S = b_1 \sqrt{a_1} + \dots + b_n \sqrt{a_n}$  și  $S' = d_1 \sqrt{c_1} + \dots + d_e \sqrt{c_e}$ . Dacă  $N = 1$ , atunci  $S$  are forma  $b_1 \sqrt{p_1} + b_2 \sqrt{1}$  și se poate lua  $S' = b_1 \sqrt{p_1} - b_2$ , atunci  $SS' = b_1^2 p_1 - b_2^2 \neq 0$ . Presupunem acum că  $N \geq 2$  și că afirmația noastră este adevărată pentru toate valorile mai mici decât  $N$ .

Vom nota prin  $S_1, S_2, \dots, S_8$  sumele de forma  $\beta_1 \sqrt{\alpha_1} + \dots + \beta_m \sqrt{\alpha_m}$  unde  $\beta_i$  sînt numere întregi,  $\alpha_i$  sînt numere întregi pozitive libere de pătrate, cu divizorii primi cuprinși între numerele  $p_1 \dots p_{N-1}$ .  $S_1, S_2, \dots, S_8$  dacă nu se precizează contrariul, se pot egala cu zero.

Suma  $S$  poate fi scrisă în forma  $S = S_1 + S_2 \sqrt{p_N}$ , unde  $S_2 \neq 0$ . După presupunerea de inducție, există o astfel de sumă  $S_3$  încît  $f = S_3 S_2$  este un număr întreg nenul. Produsul  $S_2 S$  are forma

$$S_3 S = S_2 S + f \sqrt{p_N} = S_4 + f \sqrt{p_N}$$

cu  $f \neq 0$ . Rămîne să se demonstreze că

$$S_5 = (S_3 S_4 - S_3 f \sqrt{p_N}) S = S_4^2 - f^2 p_N \neq 0.$$

Dacă  $S_4 = 0$ , atunci este evident. Presupunem acum că  $S_4 \neq 0$ . Fie  $S_4 = \beta_1 \sqrt{\alpha_1} + \dots + \beta_m \sqrt{\alpha_m}$ ; dacă  $m = 1$ , atunci  $S_4 \beta_1 \sqrt{\alpha_1}$ ; atunci  $S_4^2 - f^2 p_N = \beta_1^2 \alpha_1 - f^2 p_N \neq 0$  (într-adevăr  $\beta_1^2 \alpha_1$  se divide printr-o putere pară a lui  $p_N$ , iar  $f^2 p_N$  printr-una impară).

Dacă  $m > 1$ , atunci se poate scrie  $S_4$  sub forma  $S_6 + S_7 \sqrt{p}$  unde  $p$  este unul dintre numerele prime  $p_1, \dots, p_{N-1}$ ,  $S_6 S_7 \neq 0$  și numerele de sub semnul radicalului din sumele  $S_6 S_7$  nu se divid prin  $p$ . Atunci

$$S_5 = S_6^2 + S_7^2 p - f^2 p_N + 2 S_6 S_7 \sqrt{p} \neq 0$$

datorită ipotezei de inducție, întrucît  $2 S_6 S_7 \neq 0$ .

Din nou, după ipoteza de inducție, se găsește un  $S_8$  astfel încît  $S_5 S_8$  este un număr nenul  $g$ . Vom lua  $S' = S_8 (S_3 S_4 - S_3 f \sqrt{p_N})$ . Atunci  $SS' = S_5 S_8 = g$ .

Din teorema demonstrată, rezultă, în particular că dacă  $b_i$  sînt numere raționale oarecare și  $a_i$  numere naturale mai mari decît unu și libere de pătrate ( $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $n > 1$ ), atunci numărul  $b_1 \sqrt{a_1} + \dots + b_n \sqrt{a_n}$  este irațional.

L. M. Kamnev

**M 86.** Fundul unei cutii dreptunghiulare a fost acoperit complet cu plăcuțe de dimensiuni  $2 \times 2$  și  $1 \times 4$ . Plăcuțele au fost scoase din cutie și s-a pierdut o plăcuță  $2 \times 2$ . În locul ei s-a pus una  $1 \times 4$ . Să se demonstreze că acum nu se mai poate acoperi fundul cutiei.

L.G. Limanov

Împărțim fundul cutiei în pătrățele de dimensiune  $1 \times 1$  și marcăm pătrățelele situate pe locurile impare, în rîndurile impare (vezi figura 117). Observăm că fiecare plăcuță  $1 \times 4$  care acoperă patru pătrățele de pe fundul cutiei, va acoperi în mod obligatoriu un număr par de pătrățele marcate



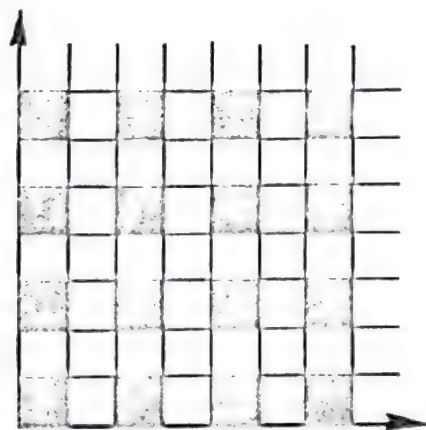


Fig. 117

(două sau nici unul), iar o plăcuță  $2 \times 2$  totdeauna va acoperi un singur pătrățel marcat. Acum, dacă plăcuțele acoperă complet fundul cutiei rezultă că numărul plăcuțelor  $2 \times 2$  are aceeași paritate ca și numărul total de pătrate marcate de pe fundul cutiei. De aceea, dacă numărul plăcuțelor  $2 \times 2$  se modifică cu o unitate (sau, în general cu un număr impar) atunci nu se mai poate acoperi fundul cutiei.

Gândiți-vă dacă rămâne adevărată afirmația problemei, dacă în locul plăcuțelor  $1 \times 4$  și  $2 \times 2$  (fig. 118) se utilizează plăcuțe formate din trei pătrățele: dreptunghiulare  $1 \times 3$  și „unghiulare” (fig. 119).

*Afirmația nu mai e adevărată. În desenul din stînga sînt patru plăcuțe unghiulare, în cel din dreapta, cinci (fig. 120).*

L.G. Limanov



Fig. 118



Fig. 119

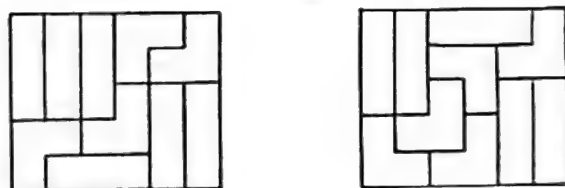


Fig. 120

**M 87.** Să se demonstreze că dacă trei cercuri de aceeași rază trec prin același punct, atunci celelalte trei puncte de intersecție ale cercurilor, două cîte două, sînt situate pe un cerc de aceeași rază.

Presupunem că cele trei cercuri de rază  $r$  și de centre  $O_1, O_2, O_3$  se intersectează în punctul  $A$  și că două cîte două se mai intersectează în punctele  $B_1(O_2$  și  $O_3)$ ,  $B_2(O_3$  și  $O_1)$ ,  $B_3(O_1$  și  $O_2)$ . Este evident că mijloacele  $C_1, C_2, C_3$ , ale segmentelor  $AB_1, AB_2, AB_3$  sînt în același timp mijloacele segmentelor  $O_2O_3, O_3O_1, O_1O_2$  (figura 121). De aceea fiecare dintre triunghiurile  $B_1B_2B_3$  și  $O_1O_2O_3$  are laturile respectiv de două ori mai mari decît laturile triunghiului  $C_1C_2C_3$  (și paralele cu ele). Prin urmare  $\triangle B_1B_2B_3 = \triangle O_1O_2O_3$ . Dar este clar că raza cercului circumscris triunghiului  $O_1O_2O_3$  este egală cu  $r$  (într-adevăr,  $AO_1 = AO_2 = AO_3 = r$ ), de aceea și raza cercului circumscris triunghiului  $B_1B_2B_3$  este tot egală cu  $r$ , ceea ce și trebuia dovedit.

Nota trad. l. rom. Problema de mai sus este cunoscută în literatura românească sub numele „problema piesei de cinci lei” și este atribuită marelui geometru român G. Tițeica, care ar fi descoperit-o trăsînd pe o hîrtie, în timpul unui concurs, cercuri cu ajutorul unei monede.

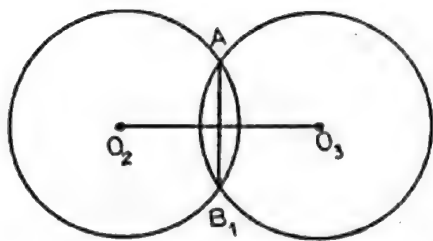


Fig. 121

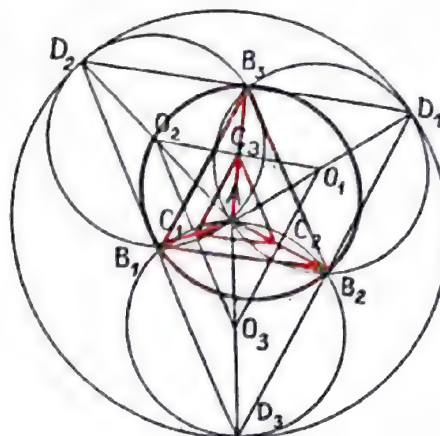


Fig. 122

Mulți rezolvitori au demonstrat că triunghiurile  $B_1B_2B_3$  și  $O_1O_2O_3$  sînt congruente în diferite alte moduri mai complicate în care s-a ținut cont de diferitele cazuri de figură (anume în rezolvarea noastră nu ne-am referit la o figură pentru ca să subliniem că ea nu depinde de figură). O rezolvare asemănătoare cu a noastră se poate obține dacă considerăm în locul triunghiului  $C_1C_2C_3$ , triunghiul  $D_1D_2D_3$ , unde  $D_1, D_2, D_3$  sînt puncte diametral opuse punctului  $A$  în cercurile  $O_1, O_2, O_3$ ; să se demonstreze că  $B_1, B_2, B_3$  sînt mijloacele laturilor triunghiului  $D_1D_2D_3$ . În configurația pe care am obținut-o (figura 122) mai este interesant faptul că punctul  $A$  este centrul cercului circumscris triunghiurilor  $O_1O_2O_3$  și  $D_1D_2D_3$  și totodată punctul de intersecție a înălțimilor triunghiurilor  $B_1B_2B_3$  și  $C_1C_2C_3$ ; acest lucru nu s-a utilizat în demonstrația noastră.

Este interesant că G. Polya a utilizat cu totul altă idee în rezolvarea acestei probleme (vezi G. Polya. Descoperirea în matematică ed. șt. București 1971, pag. 241–245).

V.N. Berezin

M. 88. Ce condiție trebuie să îndeplinească coeficienții  $a, b, c$  ai ecuației  $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ , pentru ca cele trei rădăcini ale sale să formeze o progresie aritmetică?

M.F. Bezborodnikov

Dăm răspunsul dintr-o dată. Relația căutată este:  $c = \frac{ab}{3} - \frac{2}{27}a^3$  (sau, ceea ce este același lucru, una dintre rădăcini trebuie să fie egală cu  $-\frac{a}{3}$ ). Într-adevăr, fie  $x_1, x_2$  și  $x_3$  rădăcinile ecuației date, atunci, după teorema lui Viète

$$x_1 + x_2 + x_3 = -a.$$

Pe de altă parte, pentru ca  $x_1, x_2, x_3$  să formeze o progresie aritmetică e necesar și suficient ca

$$x_1 + x_3 = 2x_2.$$

De aceea  $x_1 + x_2 + x_3 = 3x_2$ , de unde  $x_2 = -\frac{a}{3}$ .



*Încercați să găsiți condiția pentru care rădăcinile unei ecuații de gradul al patrulea formează o progresie aritmetică.*

L.I. Moskviciute

**M 89.** *Să se demonstreze că la orice poligon convex, în afară de paralelogram, se pot găsi trei laturi astfel încît prin prelungirea lor să se formeze un triunghi care să includă poligonul dat (de exemplu, pe figura 123 unde poligonul este marcat cu negru, cele trei linii roșii satisfac cerința, cele trei albastre, nu).*

I. M. Iaglom

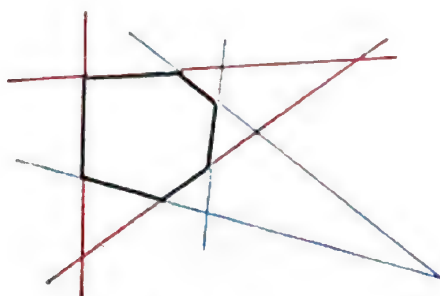


Fig. 123

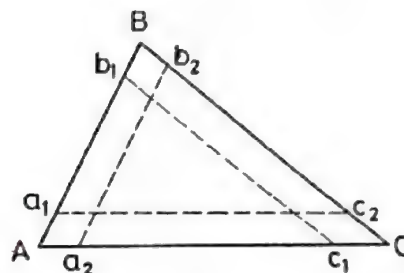


Fig. 124

Această problemă are multe rezolvări diferite. Înainte de a da rezolvarea ei să arătăm de ce este interesantă.

În figura 124 se vede un triunghi  $ABC$  și trei triunghiuri mai mici  $Ab_1c_1$ ,  $Ba_1c_2$  și  $Ca_2b_2$  asemenea cu  $ABC$  și obținute din acesta printr-o contracție spre punctele  $A$ ,  $B$ ,  $C$  virfurile triunghiului. Triunghiurile  $Ab_1c_1$ ,  $Ba_1c_2$  și  $Ca_2b_2$  nu numai că sînt asemenea cu  $ABC$  dar ele sînt o m o t e t i c e cu  $ABC$  adică sînt asemenea cu  $ABC$  și sînt dispuse paralel cu el. (Ultima afirmație înseamnă că laturile care se corespund în triunghiurile asemenea sînt paralele între ele.) E clar că dacă triunghiurile  $Ab_1c_1$ ,  $Ba_1c_2$ ,  $Ca_2b_2$  sînt cu puțin mai mici decît triunghiul inițial  $ABC$  atunci ele acoperă complet triunghiul  $ABC$ .

În figura 125 este reprezentat un paralelogram  $ABCD$  și patru paralelograme mai mici  $Ab_1c_1d_1$ ,  $Ba_1d_2c_2$ ,  $Cb_2a_2d_3$  și  $Da_3b_3c_3$  care se obțin din  $ABCD$  prin contracții spre virfurile sale  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ . E clar că dacă aceste patru paralelograme  $Ab_1c_1d_1$ ,  $Ba_1d_2c_2$ ,  $Cb_2a_2d_3$  și  $Da_3b_3c_3$  sînt numai puțin mai mici decît paralelogramul inițial, atunci ele îl acoperă complet. Astfel, fiecare triunghi poate fi acoperit complet de trei triunghiuri mai mici decît ele și omotetice cu el și fiecare paralelogram poate fi acoperit complet de patru paralelograme mai mici decît el și omotetice cu el.

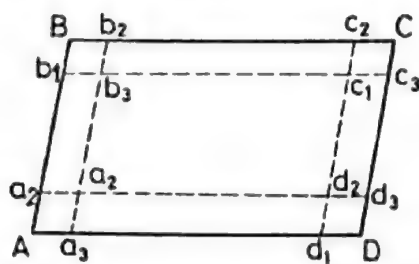


Fig. 125

Dar mai mult decît atît, nu e greu de văzut că 3 este cel mai mic număr de triunghiuri omotetice cu triunghiul dat  $ABC$  cu care se poate acoperi triunghiul  $ABC$  și 4 este cel mai mic număr de paralelograme omotetice cu paralelogramul dat  $ABCD$  cu care se poate acoperi paralelogramul dat  $ABCD$ . Într-adevăr, dacă latura  $AB$  a paralelogramului  $ABCD$  este egală cu  $c$ , atunci și orice segment paralel cu  $AB$  și care aparține lui  $ABCD$  nu depășește

pe  $c$ ; de aceea într-un paralelogram omotetic cu  $ABCD$  și mai mic decât  $ABCD$  orice segment paralel cu  $AB$  este mai mic decât  $c$ . De aici rezultă că ambele vîrfuri  $A$  și  $B$  ale paralelogramului  $ABCD$  nu pot fi acoperite de un singur paralelogram omotetic cu  $ABCD$  și mai mic decât el. În modul acesta s-a stabilit că fiecare vîrf al paralelogramului  $ABCD$  trebuie să-l acoperim cu paralelogramul „său” mai mic decât  $ABCD$  și omotetic cu  $ABCD$ ; de aceea numărul total al paralelogramelor mai mici decât  $ABCD$  și care-l acoperă, trebuie să fie neapărat nu mai mic decât 4 (după numărul vîrfurilor lui  $ABCD$ ). La fel se stabilește faptul că numărul triunghiurilor mai mici decât  $ABC$  și omotetice cu el care îl acoperă nu poate fi mai mic decât 3 (căci fiecare vîrf trebuie acoperit de triunghiul „său”).

Problema numărului de poligoane omotetice cu un poligon convex dat  $M$  și mai mici decât el, care să-l acopere pe  $M$ , a fost pusă în 1960 de matematicienii din Chișinău, I.T. Gohberg și A.S. Marcus (ceva mai devreme, la mijlocul anilor 50, problema generică a fost formulată de geometrul german F. Levi).

I.T. Gohberg și A.S. Marcus au formulat această problemă nu pentru poligoane convexe ci pentru figuri convexe arbitrare  $F$  — adică o figură  $F$ , astfel încît prin fiecare punct al frontierei sale se poate duce o dreaptă  $d$  astfel încît  $F$  să rămînă de o singură parte a lui  $d$  — (comparați figurile 126,  $a$  și  $b$ ). E clar că astfel pusă problema e mai generală decît cea de care ne ocupăm noi, căci poligonul convex este un caz particular de figură convexă. Totuși se poate demonstra că rezolvarea problemei generale care se referă la figuri convexe, se poate reduce la rezolvarea problemei pentru poligoane convexe (aceasta rezultă din faptul că orice figură convexă  $F$  poate fi înlocuită cu un poligon convex „foarte apropiat de ea”, de exemplu, cu poligonul înscris în  $F$  cu un foarte mare număr de laturi).

Ei au demonstrat următoarea teoremă numită adesea astăzi teorema lui Gohberg-Marcus:

Orice poligon convex  $M$  diferit de paralelogram, poate fi acoperit cu trei poligoane mai mici decît  $M$  și omotetice cu  $M$ ; pentru paralelogram, numărul cel mai mic de paralelograme mai mici decît cel dat și omotetice cu el, care-l acoperă, este patru.

Demonstrația originală a teoremei lui Gohberg-Marcus (pentru o figură convexă oarecare) cititorul o poate găsi în cartea: V.G. Boltianski, I.T. Gohberg: Descompunerea figurilor în părți mai mici (l. rusă), Moscova, „Nauka”, 1971, aici vom arăta cum se poate deduce această teoremă din rezultatul problemei M 89. Într-adevăr, fie  $ABC$  triunghiul din ipoteza problemei,

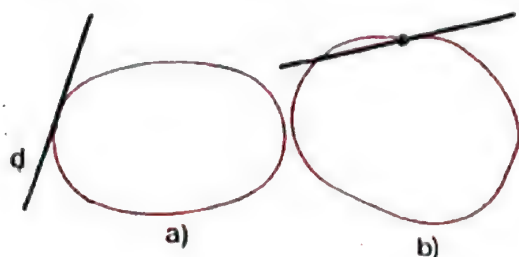


Fig. 126

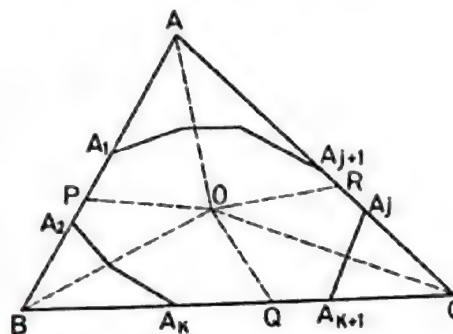


Fig. 127



care conține în interiorul său poligonul convex (diferit de paralelogram)  $M = A_1A_2A_3 \dots A_n$ , iar latura  $AB$  a triunghiului conține segmentul  $A_1A_2$ , latura  $BC$ , segmentul  $A_kA_{k+1}$ , și latura  $CA$ , segmentul  $A_jA_{j+1}$  (figura 127). Luăm acum în interiorul lui  $M$  un punct oarecare  $O$  și-l unim cu niște puncte  $P, Q, R$  respectiv de pe segmentele  $A_1A_2, A_kA_{k+1}$  și  $A_jA_{j+1}$ . Cele trei segmente  $OP, OQ$  și  $OR$  împart pe  $M$  în trei părți  $m_1, m_2$  și  $m_3$ . Să comprimăm acum poligonul  $M$  spre  $A$ . Dacă poligonul  $M_1$  obținut din  $M$  în acest mod, diferă puțin de  $M$ , atunci el trebuie să acopere complet pe  $m_1$  — pentru demonstrația acestui fapt este suficient să comparăm granițele poligoanelor  $M_1$  și  $m_1$  (efectuați singuri, riguros acest raționament). Analog se demonstrează că poligoanele  $M_2$  și  $M_3$  mai mici decât  $M$  și omotetice cu  $M$  obținute prin comprimarea spre punctele  $B$  și  $C$  a lui  $M$ , vor acoperi complet părțile  $m_2$  și  $m_3$  ale poligonului  $M$ . Astfel  $M$  poate fi acoperit complet de trei poligoane (poligoanele  $M_1, M_2$  și  $M_3$ ) omotetice cu  $M$  și mai mici decât  $M$ . Am demonstrat că numărul respectivelor poligoane nu e mai mare decât 3. Se poate demonstra că acest număr este chiar 3.

Să ne întoarcem acum la problema M 89. Iată una dintre cele mai simple rezolvări ale ei. Să observăm că dacă poligonul convex  $M$ , nu este triunghi sau paralelogram, atunci are două laturi neparalele care nu au un vîrf comun. Prelungindu-le pînă la punctul de intersecție, obținem un poligon convex  $M_1$  (vezi figura 128) cu un număr de laturi mai mic decât  $M$  și care-l conține pe  $M$ . Dacă acest poligon  $M_1$ , nu este triunghi sau paralelogram, putem proceda cu el ca și cu  $M$  și așa mai departe pînă cînd obținem un triunghi sau un paralelogram care-l conține pe  $M$  și ale căror laturi sînt obținute prin prelungirea laturilor lui  $M$ .

Dacă ultimul poligon la care ajungem în procesul transformării poligonului inițial  $M$  este un triunghi, atunci problema este rezolvată (vezi figura 129). Dacă la sfîrșit ajungem la un paralelogram  $ABCD$  dar poligonul inițial nu este paralelogram, atunci unul oarecare dintre vîrfurile paralelogramului  $ABCD$  nu este vîrf al lui  $M$ . Presupunem că vîrfurile  $A$  nu este vîrf al lui  $M$  (vezi figura 130). Considerăm atunci, cel mai apropiat vîrf  $K$

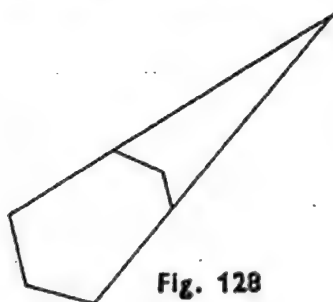


Fig. 128

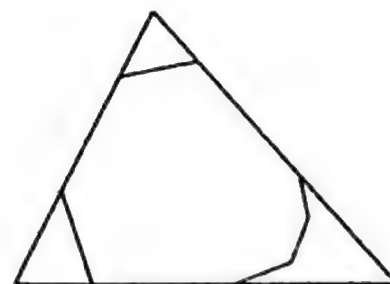


Fig. 129

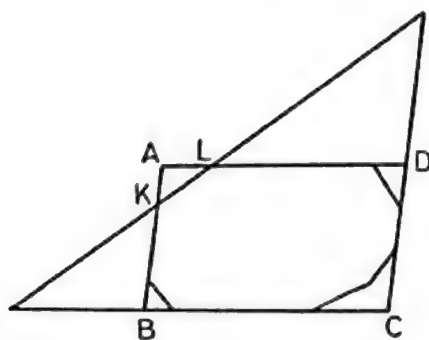


Fig. 130

de  $A$  care aparține segmentului  $AB$  și latura care pleacă din acest vîrf,  $KL$  care nu aparține dreptei  $AB$ . Fiindcă poligonul  $M$  este convex și una dintre laturile sale aparține segmentului  $AD$ , atunci latura  $KL$  poate să fie situată numai așa cum este reprezentată în figura 130 (căci tot poligonul  $M$  trebuie să fie situat de o aceeași parte a lui  $KL$ ). Dar în acest caz

cele trei drepte  $BC$ ,  $CD$  și  $KL$  se suprapun peste cele trei laturi ale poligonului  $M$  și determină triunghiul cerut de problemă.

Aceiași autori au pus și problema analoagă în spațiu. Pentru orice poliedru convex  $M$  să se determine numărul minim de poliedre mai mici decât  $M$  și omotetice cu el cu care se poate acoperi  $M$ . Această problemă este incomparabil mai grea decât problema plană. E ușor de văzut că pentru un tetraedru  $T$ , numărul minim este 4; pentru un cub  $C$ , numărul minim este 8 (demonstrații). Există ipoteza că alte numere în afară de cele cuprinse între 4 și 8 (8 numai pentru paralelipiede) nu pot să fie. Deocamdată nu s-a putut demonstra această ipoteză decât numai într-un sens (4 este minim). Capitolul de geometrie la care se referă astfel de probleme se numește geometrie combinatorie și a apărut relativ recent (în anii 50).

I.M. Iaglom

**M 90.** Să se demonstreze că dacă  $x_1 < x_2 < x_3 \dots$  sînt numere naturale, atunci

$$\frac{\sqrt{x_2 - x_1}}{x_2} + \frac{\sqrt{x_3 - x_2}}{x_3} + \dots + \frac{\sqrt{x_n - x_{n-1}}}{x_n} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n^2 - 1} + \frac{1}{n^2}$$

G.I. Natanson

Să presupunem la început că  $x_n \leq n^2$ . Atunci

$$\frac{\sqrt{x_i - x_{i-1}}}{x_i} \leq \frac{x_i - x_{i-1}}{x_i} = \underbrace{\frac{1}{x_i} + \frac{1}{x_i} + \dots + \frac{1}{x_i}}_{x_i - x_{i-1} \text{ termeni}}$$

Ultima sumă, evident că nu depășește următoarea sumă cu tot atîția termeni

$$\frac{1}{x_{i-1} + 1} + \frac{1}{x_{i-1} + 2} + \dots + \frac{1}{x_i - 1} + \frac{1}{x_i}.$$

Dar atunci

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{\sqrt{x_i - x_{i-1}}}{x_i} &< \frac{1}{x_0 + 1} + \dots + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_1 + 1} + \dots + \frac{1}{x_i} + \dots + \\ &+ \frac{1}{x_{n-1} + 1} + \dots + \frac{1}{x_n} < \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n^2}. \end{aligned}$$

Să presupunem acum că printre numerele  $x_0, x_1, \dots, x_n$  sînt unele mai mari decât  $n^2$ . Dacă  $x_i > n^2$ , atunci

$$\frac{\sqrt{x_i - x_{i-1}}}{x_i} < \frac{\sqrt{x_i}}{x_i} = \frac{1}{\sqrt{x_i}} < \frac{1}{n}.$$

Astfel, fiecare termen cu numitorul  $x_i$  mai mare decât  $n^2$ , este mai mic decât  $\frac{1}{n}$ . Prin urmare suma tuturor acestor termeni (nu sînt mai mulți decât  $n$ ) este mai mică decât 1. Dar suma restului termenilor, așa cum s-a demonstrat mai sus este mai mică decât  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n^2}$ , ceea ce și termină demonstrația inegalității cerute.

Iu. I. Ionin

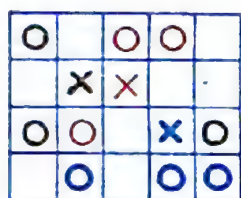


**M 91.** Două persoane se joacă cu „cruciulițe” și „zerouri” pe o foaie cu pătrățele infinită. Cel care începe pune o cruciuliță într-un pătrățel oarecare. La fiecare mișcare următoare a sa, el trebuie să pună o cruciuliță în orice pătrățel liber, vecin cu unul dintre pătrățele în care este deja o cruciuliță: se consideră pătrățelele vecine cele care au o latură comună sau un vîrf comun. Al doilea jucător, la fiecare mișcare a sa poate să pună deodată trei cerculețe în oricare trei pătrățele libere (nu e obligatoriu să fie una lîngă cealaltă). Să se demonstreze că oricum ar juca primul, al doilea poate să-l „încidă”: se ajunge la o situație în care primul nu are unde să pună cruciulița.

Să se cerceteze jocurile analoage, în care al doilea jucător la o mișcare nu pune trei, ci numai două sau un cerculeț. Care va fi în acest caz rezultatul, la un joc corect al partenerilor: reușesc cerculețele să „încidă” cruciulițele (și care este numărul maxim de mișcări cît „rezistă” cruciulițele) sau jocul se continuă la infinit?

Încercați să studiați alte variante ale acestui joc: cînd se consideră vecine numai pătrățelele care au o latură comună: cînd planul este împărțit nu în pătrate ci în hexagoane regulate; cînd primul poate să pună deodată  $p$  cruciulițe, iar al doilea  $q$  cerculețe.

A.P. Savin



← Fig. 131. Aici e reprezentată una dintre pozițiile la care se poate ajunge după trei mișcări (cu albastru sînt desenate cruciulițele și cerculețele de la prima mișcare, cu roșu cele de la a doua mișcare, cu negru de la a treia).

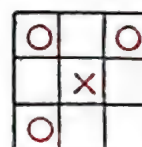
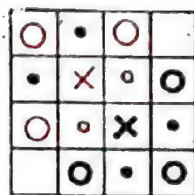


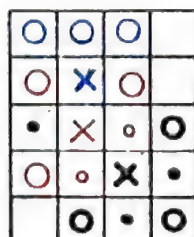
Fig. 132

Manevrele cruciulițelor sînt foarte asemănătoare cu manevrele unui desant aerian care încearcă să evite încercuirea, de aceea și jocul se numește „Încercuirea desantului”. În varianta de bază, se demonstrează că primul jucător nu poate pune mai mult de 7 cruciulițe. În fig. 132 se arată strategia cerculețelor la prima mutare, ca să se obțină acest rezultat. Într-adevăr, după aceasta, primul jucător poate să pună o cruciuliță în unul din cele cinci pătrățele. E ușor de văzut că numai punînd-o pe cîmpul de sud-est, primul jucător poate să spere că la un joc corect va putea să pună 7 cruciulițe, pentru că la răspunsul cerculețelor reprezentat pe fig. 133, a el poate să spere să pună cruciulițele pe cîmpurile marcate cu puncte, iar dintre cele două cîmpuri marcate cu puncte roșii, nu va putea pune cruciulițe decît pe unul. Cum trebuie să plaseze cerculețele, cel de-al doilea se vede din fig. 133, b.



a

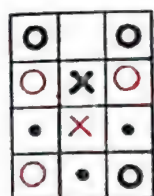
Fig. 133, a



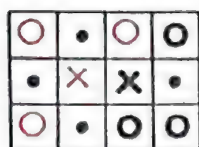
b

Fig. 133, b

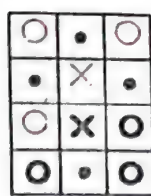
Dacă primul, pune a doua cruciuliță pe alt cîmp, atunci după mutarea celui de-al doilea se obține una dintre situațiile reprezentate în figura 134 în care mai sînt numai 4 cîmpuri (marcate de asemenea cu puncte) pe care primul poate să pună o cruciuliță la un joc corect al celui de-al doilea. Acesta constă în tăierea tuturor cîmpurilor de deplasare de la o cruciuliță pusă în locul unui punct, analog cum s-a făcut aceasta și în cazul anterior (figura 133, b).



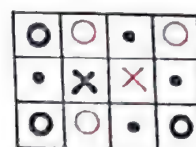
a



b



c



d

Fig. 134

Să încercăm acum să îngreunăm sarcina cerculețelor. Hotărîm ca al doilea jucător să nu mai pună 3 cerculețe la fiecare mișcare, ci numai 2. E interesant că dacă de la bun început se încearcă să se pună cerculețele pe cîmpuri vecine cu cruciulițele, atunci al doilea nu poate să stăvilească mișcarea cruciulițelor. Priviți la figura 135. Aici cerculețele nu pot împiedica mișcarea cruciulițelor în sus (linie subțire, prima mișcare, linie îngroșată, a doua linie dublă, a treia). Aceasta e evident pentru că cu fiecare mișcare, cerculețele acoperă doar două din cele trei cîmpuri care merg în sus.

S-ar părea că acum cerculețele nu pot să înconjure cruciulițele și cu atât mai mult dacă al doilea pune numai cîte un cerculeț.

Dar dacă al doilea încearcă să realizeze o încercuire departe de prima cruciuliță? Ar putea el, cel puțin să stăvilească deplasarea cruciulițelor în sus? Se va vedea că da! Și chiar în cazul în care pentru fiecare cruciuliță a primului, al doilea pune un singur cerculeț. Această strategie a celui de-al doilea o vom numi „înfîngerea atacului frontal”.

Astfel, vom încerca să stăvilim mișcarea cruciulițelor în sus. Priviți la figura 136. S-ar părea că este imposibil ca să nu pătrundă cruciulițele dincolo

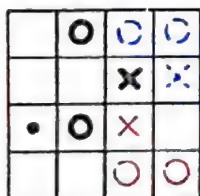


Fig. 135

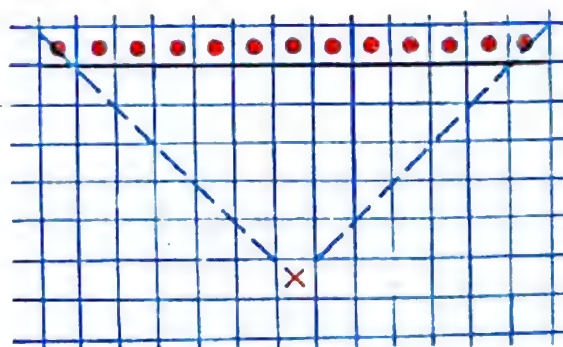


Fig. 136

de linia orizontală, căci după 6 mișcări cruciulițele pot să fie pe oricare dintre cele 13 pătrățele marcate cu puncte, iar al doilea poate pune în acest timp doar 6 cerculețe. Acum să privim figura 137. Jocul a început, și cu

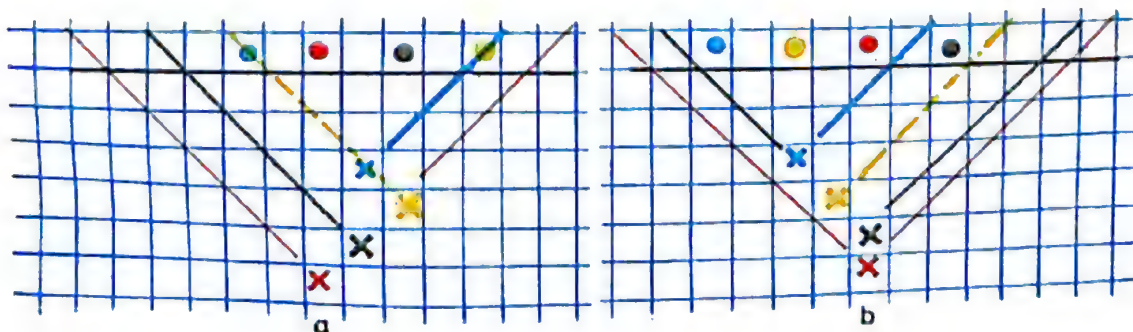


Fig. 137



fiecare mutare cruciulițele amenință un număr tot mai mic de cîmpuri de pe orizontala marcată. După a două mișcare, 11 cîmpuri, după a treia, 9, după a patra, 7. Dar al doilea reușește să pună în patru mișcări cerculețele astfel încît în cîmpurile amenințate ele să fie puse, unul da, unul nu. (Încercați să demonstrați că la orice joc al primului, al doilea poate să facă acest lucru.) Acum după a cincia mișcare a cruciulițelor se obține una din cele două situații reprezentate în fig. 138. În cazul a), al doilea poate să pună cerculețele în cele două cîmpuri necomplete în orice ordine, iar în cazul b) el trebuie să pună cerculețul întîi în cîmpul din mijloc și apoi în funcție de mișcarea primului în stînga sau în dreapta și deplasarea cruciulițelor este stăvilită.

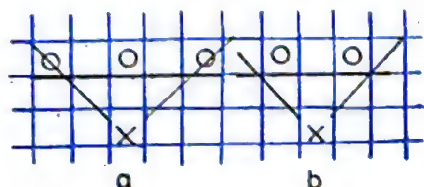


Fig. 138

Astfel „atacul frontal” este respins! Al doilea poate să nu permită cruciulițe dincolo de a șasea orizontală (față de locul primeia).

S-ar părea că problema este rezolvată. Doar în acest mod, putem să oprim cruciulițele, pe oricare dintre direcții, adică să limităm cruciulițele de exemplu, în interiorul unui pătrat. Totuși această concluzie este prematură, ne-am luat în considerare posibilitatea „atacului la colț”.

Dacă cruciulița este situată pe diagonala pătratului, atunci ea amenință aproape de două ori mai multe cîmpuri de pe marginea pătratului decît în cazul „atacului frontal” pe latura acestui pătrat, de exemplu, în figura 139 ea amenință ca și mai sus (fig. 137) 13 cîmpuri de pe fiecare latură și în total 25 de cîmpuri.

Vor putea cerculețele să reziste acestui atac? În ajutorul cerculețelor vine posibilitatea de a lua drept cîmp de luptă laturile unui pătrat atît de mare cît e necesar. Vom lua un pătrat mare (cu mult mai mare decît cel din fig. 140) și vom trasa în el un pătrat la șase pătrățele de laturile primului. Centrul pătratului îl luăm în pătrățul unde a fost pusă prima cruciuliță. Pînă cînd cruciulițele se află în interiorul pătratului mic, laturile pătratului mare nu sînt amenințate de atacul frontal și în acest timp pînă cînd cruciulițele se vor mișca în spre o latură sau un colț al pătratului interior, cerculețele pot să-și întărească pozițiile lor din colțurile pătratului mare, de exemplu,

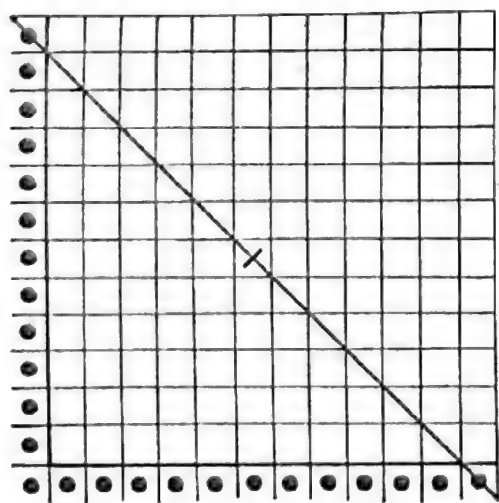


Fig. 139

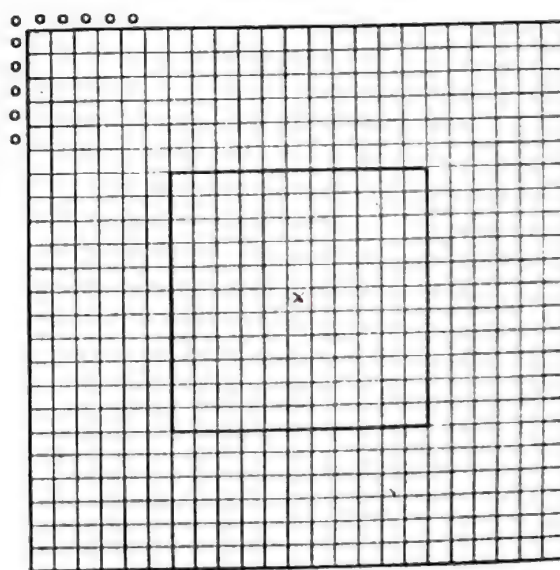


Fig. 140

punând în fiecare colț câte 11 cerceulețe (figura 140) astfel că „atacul la colț” nu mai are sens, iar atacul pe o latură știm să-l oprim dacă el începe la distanța de șase pătrățele de latură. Pentru ca să plasăm în fiecare colț câte 11 cerceulețe (de fapt se poate și un număr mai mic) e necesar un pătrat interior cu latura 87 de pătrățele și deci pătratul exterior va avea latura de 99 pătrățele.

*Formularea exactă a strategiei „cîștigătoare” a cerceulețelor și cercetarea celorlalte variante ale acestui joc o lăsăm cititorilor.*

A.P. Savin

**M 92.** *Petre a petrecut cele 90 de zile de vacanță la țară și a respectat următorul program: fiecare a doua zi (adică după câte o zi) a mers să înoate în lac, fiecare a treia zi a mers la magazin după cumpărături, și fiecare a cincea zi a rezolvat probleme de matematică. (În prima zi el a făcut de toate și a obosit foarte tare.) Cîte zile „fericite” va avea Petre, în care se va duce să înoate dar nu va merge la magazin și nici nu va rezolva problema? Cîte „plicticoase” cînd nu va avea nici o treabă de făcut?*

Iată rezolvarea amănunțită. Să numerotăm toate zilele: 1, 2, 3, ..., 90. Să vedem de cîte ori Petre se va duce să înoate. El a făcut acest lucru în prima zi și apoi din două în două zile. Înseamnă că el se va duce să înoate în zilele cu numere impare (figura 141). Aceste zile sînt în număr de  $90 : 2 = 45$ . La fel se poate afla în cîte zile s-a dus la magazin și în cîte a rezolvat probleme. S-a dus la magazin în zilele al căror număr dă rest 1 la împărțirea prin 3. (Sînt  $90 : 3 = 30$  astfel de zile; fig. 142.) A rezolvat probleme în zile al căror număr dă restul 1 prin împărțirea la 5 (sînt  $90 : 5 = 18$  figura 143).

Evident că aceasta nu-i de ajuns pentru ca să știm cîte zile „fericite” și cîte zile „plicticoase” a avut Petre. Trebuie să mai știm cîte zile au fost în care Petre a înotat și s-a dus la magazin (a), a înotat și s-a ocupat de matematică (b), s-a dus la magazin și s-a ocupat de matematică (c) și a făcut toate aceste lucruri (d). Pentru ca să rezolvăm fiecare dintre aceste probleme vom demonstra următoarea leamnă generală.



Fig. 141



Fig. 142



Fig. 143

**L e m ă.** *Dintre toate numerele naturale mai mici decît  $N$ , dau restul  $q$  la împărțirea prin  $n$  un număr de  $\left[ \frac{N-1-q}{n} \right] + 1$  numere ( $q \neq 0$ ). (Amintim că prin  $[x]$  înțelegem cel mai mare întreg cuprins în  $x$ .)*

**Demonstratia lemei.** Dau restul  $q$  la împărțirea prin  $n$ , următoarele numere:  $q, q + 1 \cdot n, q + 2 \cdot n, \dots, q + kn$ . Întrucît ne interesează



numai numerele mai mici decât  $N$ , trebuie să găsim acel întreg  $k$ , astfel încât  $q + k \cdot n \leq N < q + (k + 1)n$ . Transcriem această inegalitate astfel:

$$kn \leq N - 1 - q < (k + 1)n$$

și în sfârșit așa:

$$k \leq \frac{N - 1 - q}{n} < k + 1.$$

De aici rezultă  $k = \left\lfloor \frac{N - 1 - q}{n} \right\rfloor$ , iar în total numere mai mici decât  $N$  și dînd restul  $q$  la împărțirea prin  $n$  sînt  $\left\lfloor \frac{N - 1 - q}{n} \right\rfloor + 1$  (considerînd și numărul  $q = q + 0 \cdot n$ ).

Acum se obțin ușor răspunsurile la chestiunile  $a, b, c$  și  $d$ . Într-adevăr, fiecare dintre aceste chestiuni poate fi reformulată astfel: cite numere naturale mai mici decât 91 dau restul 1 la împărțirea cu  $n_i$ , unde  $n_i$  depinde de problemă:  $n_a = 6$ ,  $n_b = 10$ ,  $n_c = 15$  și  $n_d = 30$ . Înlocuind aceste numere în formula noastră obținem:

15 zile în care Petre înoată și se duce la magazin;

9 zile în care înoată și rezolvă probleme;

6 zile în care merge la magazin și rezolvă probleme;

3 zile în care face de toate;

Acum putem calcula cite zile „plictisitoare” și cite zile „plăcute” au fost. În total, Petre a petrecut la țară 90 de zile. În 3 zile a făcut toate cele trei activități, în  $15 + 9 + 6 = 30$  zile a făcut cite două și în  $45 + 30 + 18 = 93$  a făcut cite una. De aceea (vezi figurile 144, 145) în  $90 - 93 + 30 - 3 = 24$  zile nu s-a ocupat cu nimic. Deci zile „plictisitoare” au fost 24. Analog se calculează numărul zilelor „plăcute”. În total Petre a înotat în 45 de zile, a înotat și s-a mai ocupat încă de ceva în  $15 + 9 = 24$  zile și s-a ocupat de toate trei activitățile în 3 zile. În final, zile „plăcute” au fost  $45 - 24 + 3 = 24$ .

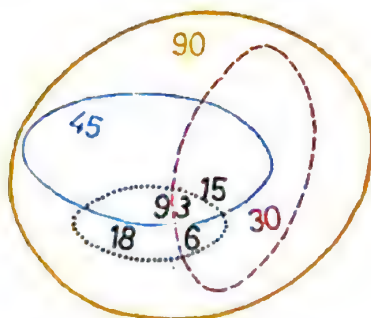


Fig. 144

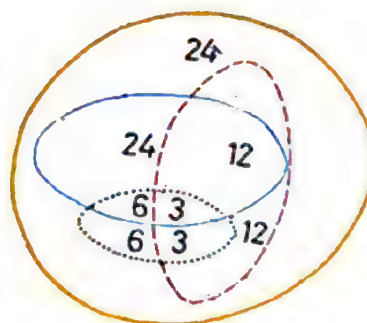


Fig. 145

**M 93.** Fiecare dintre numerele  $x_1, x_2, \dots, x_n$  este egal cu plus sau cu minus unu. Se știe că

$$x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n + x_nx_1 = 0.$$

Să se demonstreze că  $n$  se divide la patru.

A.M. Leontovici

Intrucît în suma  $x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_nx_1$  sînt exact  $n$  termeni,  $n$  este par — numărul termenilor egali cu  $+1$  trebuie să fie egal cu numărul termenilor egali cu  $-1$ . Rămîne să demonstrăm că numărul de  $(-1)$  este par. Pentru aceasta, înmulțim toți acești termeni

$$x_1x_2 \cdot x_2x_3 \cdot x_3x_4 \dots x_nx_1 = x_1^2x_2^2 \dots x_n^2 = 1.$$

Deci numărul de  $(-1)$  este într-adevăr par și  $n$  se divide la 4.

**M 94.** Să se demonstreze că nu există un poliedru astfel încît în fiecare vîrf să intre cel puțin patru muchii și fiecare față să aibă cel puțin patru laturi.

A.G. Limanov

Să presupunem că un astfel de poliedru există. Fie  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  unghiurile plane ale fețelor sale. Vom calcula în două moduri diferite media aritmetică a măsurilor lor. Vom grupa unghiurile după fețe. Pentru că fiecare față are cel puțin patru laturi, rezultă că media aritmetică a unghiurilor nu e mai mică decît  $90^\circ$ . De aici rezultă că și media aritmetică a tuturor măsurilor unghiurilor nu e mai mică decît  $90^\circ$ . Grupăm acum unghiurile după vîrfuri. Intrucît în fiecare vîrf apar cel puțin patru unghiuri și suma măsurilor acestora este mai mică decît  $360^\circ$ , rezultă că media aritmetică a măsurilor unghiurilor dintr-un vîrf este mai mică decît  $90^\circ$  (aici am folosit proprietatea de convexitate a poliedrului; așa cum au remarcat unii rezolvitori, se poate construi un poliedru neconvex cu „o spărtură” care are toate fețele patru-laterale și în fiecare vîrf intră patru muchii (vezi figura 146). Dar atunci și media aritmetică a tuturor măsurilor unghiurilor este mai mică decît  $90^\circ$ . Contradicția obținută demonstrează că astfel de poliedre convexe nu există.

O altă rezolvare a problemei se poate obține bazîndu-ne pe formula lui Euler. Fie  $V$  numărul vîrfurilor,  $M$  a muchiilor și  $F$  a fețelor poliedrului. Atunci, pentru un poliedru convex (și în general pentru poliedre fără „spărturi pătrunse”) este adevărată egalitatea

$$V - M + F = 2.$$

În poliedrul nostru, în fiecare vîrf intră cel puțin cîte patru muchii. De aceea  $M \leq \frac{4V}{2}$  (trebuie împărțit la 2 pentru că fiecare muchie este luată în considerare în două vîrfuri). În mod analog, intrucît fiecare față are acel puțin patru laturi,  $M \geq \frac{4F}{2}$ . De aceea,  $2M \geq 2(V + F)$ , adică  $M \geq V + F$ , și după formula lui Euler  $V + F = M + 2$ . Astfel, din presupunerea de existență a poliedrului cu proprietățile menționate, ar rezulta că  $M \geq M + 2$ , contradicție.

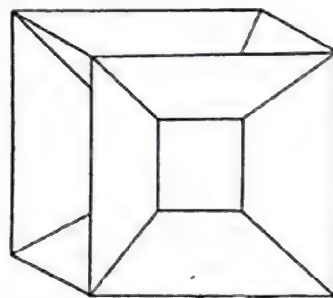


Fig. 146

**M 95.** Pe o tablă, s-a desenat un trapez, s-a dus în el linia mijlocie  $EF$  și s-a dus perpendiculara  $OK$  din punctul de intersecție a diagonalelor pe baza mare. Apoi, trapezul s-a șters. Cum se poate reconstitui desenul după segmentele rămase  $EF$  și  $OK$ ? (vezi figura 147).

Construcția trapezului. Ducem prin punctul  $K$  o dreaptă  $d$  paralelă cu segmentul  $EF$ . Căutăm mijlocul  $M$  al segmentului  $EF$ . Găsim punctul  $N$





Fig. 147

de intersecție a dreptei  $d$  și a dreptei  $OM$ . Vom construi un paralelogram cu vîrfurile  $E$ ,  $N$  și  $F$  pentru care segmentul  $EF$  este diagonală. Notăm al patrulea vîrf al său prin  $P$ . Ducem prin el dreapta  $d'$  paralelă cu  $d$ . Ducem prin punctul  $O$  drepte paralele cu laturile paralelogramului  $ENFP$ . Punctele în care aceste drepte intersectează dreptele  $d$  și  $d'$  sînt vîrfurile trapezului.

Construcția noastră se bazează pe faptul că dreapta  $OM$  împarte baza trapezului în jumătate. Demonstrația acestui fapt simplu și demonstrația justetei construcției o lăsăm cititorului.

O altă rezolvare a problemei se poate obține bazîndu-ne pe faptul că punctul  $Q$  de intersecție a laturilor neparalele ale trapezului este situat pe dreapta  $OM$  și rapoartele distanțelor pînă la dreptele  $d$  și  $d'$  ale punctelor  $O$  și  $Q$  sînt egale. Folosind aceste lucruri, după ce s-au construit dreptele  $d$  și  $d'$  se poate construi punctul  $Q$  și unindu-l cu punctele  $E$  și  $F$  se găsesc vîrfurile trapezului.

**Discuție.** Să analizăm diferite cazuri de așezare a segmentelor  $EF$  și  $OK$ .

1. Punctul  $O$  este situat pe segmentul  $EF$ . Atunci nu există soluție (dacă punctul  $O$  este mijlocul segmentului  $EF$ , atunci dreapta  $OM$  poate fi dusă aproape arbitrar, e bună orice dreaptă care intersectează segmentul  $EF$  în punctul  $O$ . Trapezul respectiv se transformă în paralelogram (fig. 148.)

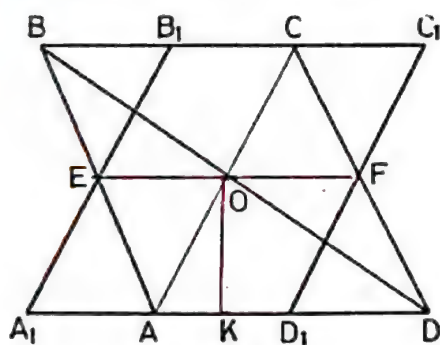


Fig. 148

2. Punctul  $O$  nu este situat pe segmentul  $EF$ . Atunci soluția este unică. Totuși, dacă segmentele perpendiculare  $EF$  și  $OK$  sînt desenate arbitrar (și nu s-au obținut prin „ștergere” unui trapez real) atunci construcția noastră nu duce totdeauna la trapez. Trapez se obține numai dacă segmentul  $OM$  este mai scurt decît  $MN$  (fig. 149, a și b). Dacă segmentele  $CM$

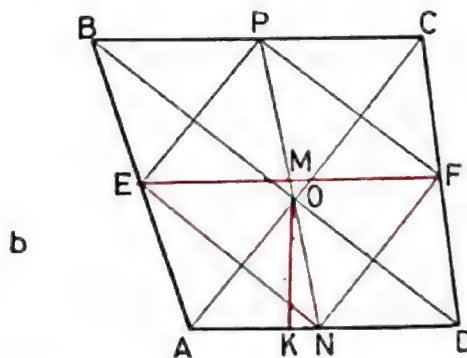
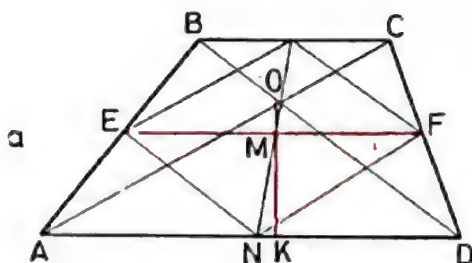


Fig. 149, a și b

și  $MN$  sînt congruente, atunci se obține un triunghi (figura 150). Dacă  $OM$  este mai mare decît  $MN$  atunci se obține un „trapez autointersectat” (figura 151, a și b).

L. Limanov

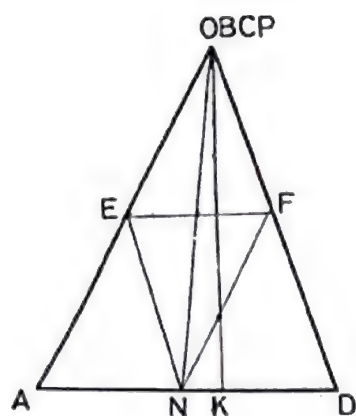


Fig. 150

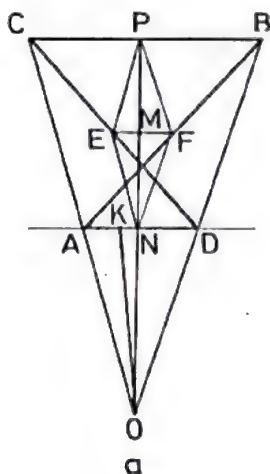
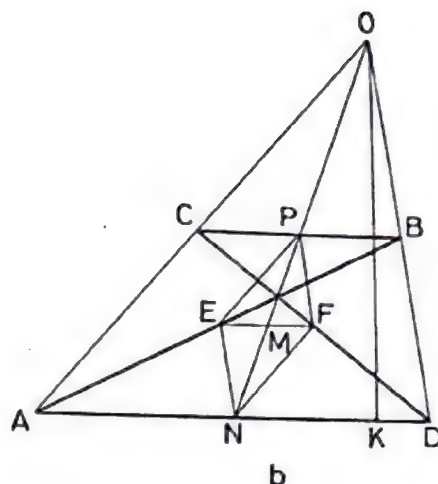


Fig. 151



M 96. Despre cinci numere pozitive se știe că dacă din suma oricăror trei dintre ele se scade suma celorlalte două, diferența va fi pozitivă. Să se demonstreze că produsul tuturor celor zece astfel de diferențe, nu e mai mare decât pătratul produselor numerelor date.

S.T. Berkolaiko

Fie  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  numerele date. Atunci

$$(a_1 + a_2 + a_5 - a_3 - a_4)(a_1 + a_3 + a_4 - a_2 - a_5) = a_1^2 - (a_2 + a_5 - a_3 - a_4)^2 \leq a_1^2.$$

Analog se demonstrează că:

$$\begin{aligned} (a_2 + a_3 + a_1 - a_4 - a_5) \cdot (a_2 + a_4 + a_5 - a_3 - a_1) &\leq a_2^2 \\ (a_3 + a_4 + a_2 - a_5 - a_1) \cdot (a_3 + a_5 + a_1 - a_4 - a_2) &\leq a_3^2 \\ (a_4 + a_5 + a_3 - a_1 - a_2) \cdot (a_4 + a_1 + a_2 - a_5 - a_3) &\leq a_4^2 \\ (a_5 + a_1 + a_4 - a_2 - a_3) \cdot (a_5 + a_2 + a_3 - a_1 - a_4) &\leq a_5^2. \end{aligned}$$

Rămâne să înmulțim aceste inegalități și problema este rezolvată.

Să se demonstreze o afirmație mai generală: dacă sînt date  $2n + 1$  numere pozitive, astfel încît diferența dintre suma oricăror  $n + 1$  numere și suma celorlalte  $n$  numere este pozitivă, atunci produsul  $P$  al celor  $C_{2n+1}^n$  diferențe și produsul  $A$  al celor  $2n + 1$  numere sînt legate prin relația

$$P^n \leq A^{C_{2n+1}^{n-1}}.$$

M 97. În trapezul  $ABCD$  cu bazele  $AB = a$  și  $CD = b$ , s-a dus segmentul  $A_1B_1$  care unește mijloacele diagonalelor. În trapezul obținut  $A_1B_1CD$  din nou s-a dus segmentul  $A_2B_2$  care unește mijloacele diagonalelor și așa mai departe (vezi figura 152). Se poate ca în șirul lungimilor segmentelor  $AB, A_1B_1, A_2B_2, \dots$  o valoare să se întâlnească de două ori? Va fi acest șir monoton (crescător sau descrescător)? Tinde el către o anumită limită?

A.L. Rozental



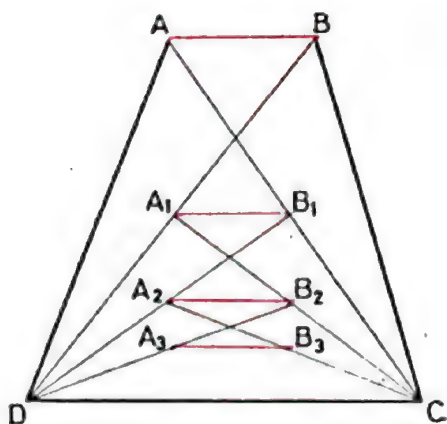


Fig. 152

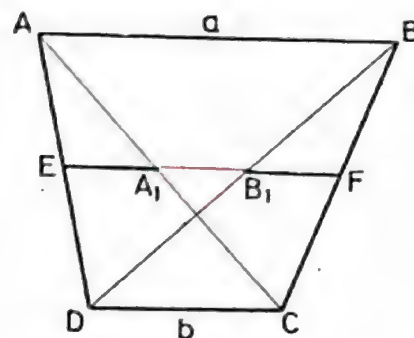


Fig. 153

Fie  $A_1$  și  $B_1$  mijloacele diagonalelor  $AC$  și  $BD$  ale trapezului,  $E$  și  $F$  mijloacele laturilor neparalele  $AD$  și  $BC$  (fig. 153). Întrucît  $A_1F$  este linia mijlocie a triunghiului  $ACB$ , iar  $B_1F$  este linia mijlocie a triunghiului  $DCB$ , punctele  $A_1$  și  $B_1$  sînt situate pe segmentul  $EF$  și

$$a_1 = A_1B_1 = |A_1F - B_1F| = \left| \frac{a-b}{2} \right|.$$

(Această formulă este adevărată indiferent care dintre numerele  $a$  sau  $b$  este mai mare.)

La fel se demonstrează că

$$a_{n+1} = \left| \frac{a_n - b}{2} \right| \quad (1)$$

unde  $a_n = A_nB_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) este termenul general al șirului care ne interesează. Astfel problema s-a redus la o problemă pur algebrică asupra unui șir definit de relația (1) cu termenul inițial  $a_0 = a > 0$ . Dacă  $a > b$ , fiecare termen al șirului va fi mai mic decît cel precedent, cel puțin cu  $b$  (dacă  $a_n > b$ , atunci  $a_{n+1} = \frac{a_n - b}{2} < a_n - b$ ) și acest lucru se va întîmpla pînă cînd se va întîlni un termen  $a_m$  astfel încît  $a_m \leq b$  (dacă  $a \leq b$ , atunci vom pune  $m = 0$ ,  $a_m = a_0 = a$ ).

Vom considera acum cazul  $n \geq m$ . Dacă  $a_n \leq b$ , atunci

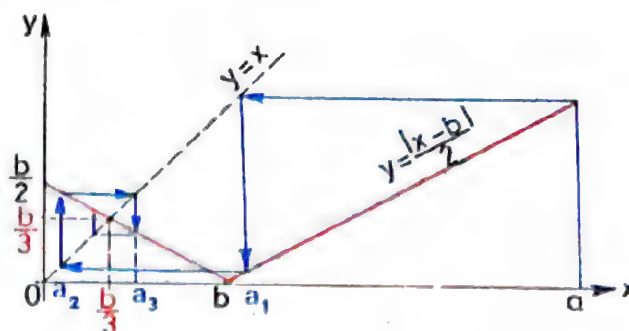
$$a_{n+1} = \frac{b - a_n}{2} \leq \frac{b}{2} < b.$$

Astfel, toți termenii următori lui  $a_m$  vor fi mai mici decît  $b$  și de aceea pentru toți  $n \geq m$ .

$$a_{n+1} = \frac{b - a_n}{2}. \quad (2)$$

Ecuția  $x = \frac{b-x}{2}$  are o soluție unică  $x = \frac{b}{3}$ . De aceea, dacă șirul  $\{a_n\}$  are limită, ea este egală cu  $b/3$ .

Fig. 154. Termenii șirului  $a_n$  definit de relațiile  $a_n = a$ ,  $a_{n+1} = \left| \frac{a_n - b}{2} \right|$  sînt abscisele vîrfurilor liniei frînte. Laturile acestora sînt în mod alternativ paralele cu axele  $Ox$  și  $Oy$ , iar vîrfurile sale sînt situate alternativ pe dreapta de ecuație  $y = x$  și pe graficul funcției  $y = \left| \frac{x - b}{2} \right|$ .



Fie  $a_m = \frac{b}{3}$ . Vom pune  $a_n = \frac{b}{3} + \delta_n$ . Atunci din (2), rezultă că

$$\frac{b}{3} + \delta_{n+1} = \frac{b}{3} - \frac{\delta_n}{2},$$

adică

$$\delta_{n+1} = -\frac{\delta_n}{2}; \quad (3)$$

— la trecerea de la  $n$  la  $n+1$ , diferența  $a_n - \frac{b}{3} = \delta_n$  își schimbă semnul și în valoare absolută se micșorează de două ori. Acum, totul e clar: în șirul  $a_n$  nici o valoare nu poate fi întîlnită de două ori, întrucît fiecare termen este mai apropiat de  $b/3$  decît precedentul. Acest șir nu este monoton dar tinde către limita  $b/3$  (figurile 154, 155).

Vom demonstra riguros, folosind definiția limităi că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{b}{3}. \quad (4)$$

Fie dat  $\varepsilon > 0$ . Atunci dacă  $n > N$ , unde  $N = N(\varepsilon)$  este cel mai mic număr natural pentru care  $2^N \varepsilon > 2^m |\delta_m|$ , atunci

$$\left| a_n - \frac{b}{3} \right| = |\delta_n| = \frac{|\delta_m|}{2^{n-m}} < \frac{|\delta_m|}{2^{N-m}} < \varepsilon.$$

Astfel (4) este demonstrată.

Desigur că limita este egală cu  $b/3$  și în cazul în care  $a_m = \frac{b}{3}$ . În acest caz toți termenii următori sînt egali tot cu  $\frac{b}{3}$ . Să precizăm în ce caz se întîmplă aceasta. Dacă  $m=0$ , atunci  $a = \frac{b}{3}$ . Dacă  $m=1$  și  $a_1 = \frac{a-b}{2} = \frac{b}{3}$ , atunci  $a = 5b/3$ . În general dacă  $a_m = \frac{b}{3}$ , atunci  $a = a_0$  se obține din valoarea lui  $a_m$  după aplicarea de  $m$  ori a formulei  $a_{n-1} = 2a_n + b$ . Astfel, cum se verifică ușor, valorile lui  $a$  pentru care  $a_m = b/3$  formează șirul  $\frac{b}{3}, \frac{5b}{3}, \frac{13b}{3}, \dots, \frac{(2^k - 3)b}{3}, \dots$ . Pentru aceste valori (și numai pentru acestea) ale lui  $a$ , șirul va fi monoton (și de la un moment dat constant).



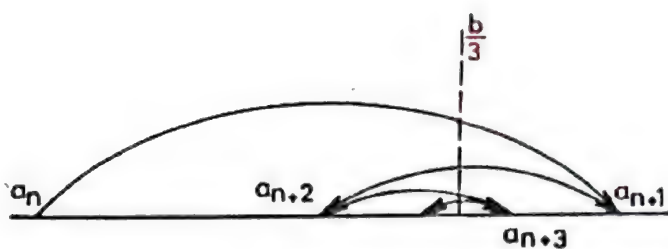


Fig. 155

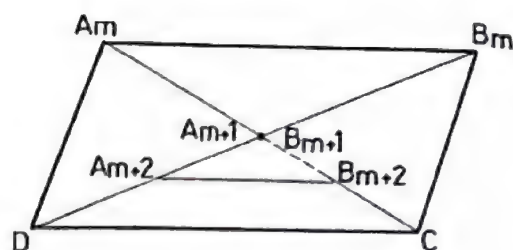


Fig. 156

Nu am distins cazul în care  $a_m = b$  (atunci  $a_{m+1} = 0$ ,  $a_{m+2} = \frac{b}{2} \dots$ ) din punct de vedere algebric, el nu e remarcabil prin nimic, dar trapezele corespunzătoare pentru  $n = m$  și  $n = m + 1$  devin paralelogram, respectiv triunghi (punctele  $B_{m+1}$  și  $C_{m+1}$  coincid, figura 156); începînd de la  $n = m + 2$  se obțin trapeze propriu-zise și ca mai sus  $a_n$  tinde către limita  $b/3$ .

M 98. Să se demonstreze că în tabloul

				1		
			1	1	1	
		1	2	3	2	1
	1	3	6	7	6	3

în care fiecare număr este egal cu suma celor trei aflate deasupra sa, în fiecare linie (începînd cu a treia) se află un număr par. Se află în fiecare linie (începînd cu a treia) un număr multiplu de trei?

Cercetăm întâi problema divizibilității prin doi. Vom scrie în tablou, în locul numerelor pare, 0, iar în locul celor impare, 1. Atunci tabloul format din 0 și 1 trebuie făcut după aceeași regulă (fiecare număr se obține ca suma celor trei numere de deasupra sa, în rîndul anterior), dar adunarea trebuie făcută „după modulul doi”, după regula  $0 + 0 = 0$ ,  $0 + 1 = 1$ ,  $1 + 0 = 1$ ,  $1 + 1 = 0$ .

Prima rezolvare este bazată pe următoarea considerație: ultimele patru numere ale fiecărui rînd depind de ultimele patru numere ale rîndului precedent și ca atare nu e de mirare că aceste cvartete se repetă (cu perioada 4, vezi figura 157).

O altă rezolvare se bazează pe reducerea la absurd. Să presupunem că un anumit rînd ar fi format în întregime din unități

1 1 1 ... 1 1 1.

Atunci rîndul precedent cum se constată ușor, poate fi numai astfel

1 0 0 1 0 0 ... 0 0 1 0 0 1

iar precedentul acestuia

1 1 0 0 0 0 1 1 0 0 0 0 ... 0 0 0 0 1 1 0 0 0 0 1 1.

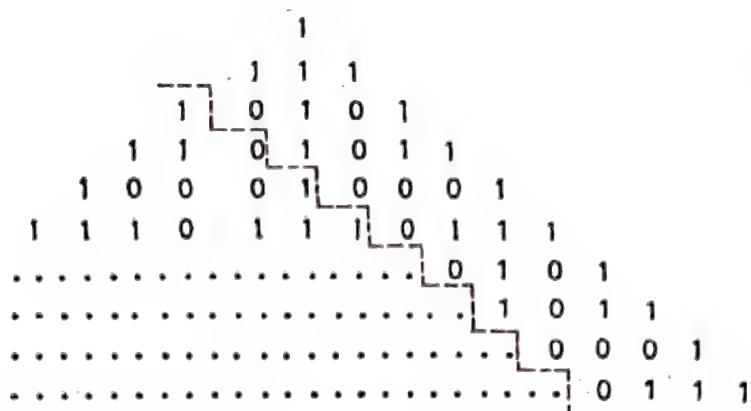


Fig. 157

Dar acesta nu poate exista, pentru că în fiecare rând există un număr impar de numere.

În ceea ce privește divizibilitatea prin trei, așa cum se verifică ușor, chiar următorul rând al tabloului, al patrulea, (rândul întâi format numai dintr-un 1, e bine să-l numerotăm cu 0).

1 4 10 16 19 16 10 4 1

nu are nici un număr divizibil prin 3 (și toate dau la împărțirea prin 3 restul 1). Analizînd structura tabloului „după modulul 3” (în figură numerele care dau la împărțirea cu trei resturile 0, 1 și 2 sînt marcate cu cerușe respectiv albastre, negre și roșii) se poate observa că de aceeași proprietate, se bucură și rîndurile cu numerele 1;  $1 + 3 = 4$ ,  $1 + 3 + 3^2 = 13$ ,  $1 + 3 + 3^2 + 3^3 = 40$  ș.a.m.d.

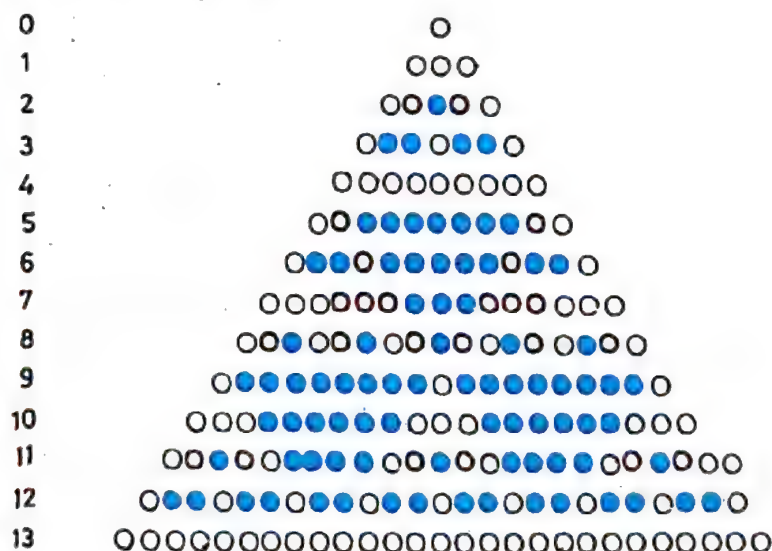


Fig. 158

Numerele acestui tablou au și alte proprietăți. Unele se pot deduce din faptul că pe rîndul al  $n$ -lea al tabloului sînt coeficienții polinomului

$$(1 + x + x^2)^n = \sum_{k=0}^{2n} B_n^k x^k.$$



De exemplu, este evident că  $\sum_{k=0}^{2n} B_n^k = 3^n$ ,  $\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k B_n^k = 1$  și nu e greu de demonstrat că  $\sum_{k=0}^n (B_n^k) = B_{2n}^{2n}$ . Verificați că dacă  $p$  este prim,  $s < p$  și  $r < p$ , atunci

$$B_{mp+q}^{ip+r} = B_m^i B_r^s + B_m^{i-1} B_r^{s+p} \pmod{p}$$

(dacă  $k > 2n$ , atunci  $B_n^k$  se consideră zero).

**M 99.** În triunghiul  $ABC$ , latura  $AC$  este cea mai mare. Să se demonstreze că pentru orice punct  $M$  al planului,  $AM + CM \geq BM$ . În ce cazuri e posibilă egalitatea?

N.B. Vasiliev

Vom demonstra la început următoarea leamnă.

**L e m ă .** Pentru orice patru puncte  $A, B, C, M$  din plan există relația

$$AC \cdot BM \leq AB \cdot CM + BC \cdot AM. \quad (1)$$

Egalitatea are loc atunci și numai atunci când  $ABCM$  este un patrulater convex inscriptibil (sau când unul dintre termenii din membrul drept este nul datorită faptului că două puncte coincid).

**Demonstrația lemei.** Alegem punctul  $P$  astfel încît  $\angle BAP = \angle CAM$  și  $\angle MAP = \angle CAB$ , iar  $PA = \frac{AB \cdot AM}{AC}$  (fig. 159). Atunci  $\triangle BAP \sim \triangle CAM$  (primul se obține dintr-al doilea printr-o comprimare de raport  $AB : AC$  și printr-o rotație de unghi  $BAC$ ) și  $\triangle MAP \sim \triangle CAB$  (primul se obține dintr-al doilea printr-o rotație de unghi  $CAM$  și printr-o comprimare de raport  $AM : AC$ ). Acum vom folosi inegalitatea triunghiului

$$BM \leq BP + PM. \quad (2)$$

Intrucît  $BP = \frac{AB}{AC} \cdot CM$  și  $PM = BC \cdot \frac{AM}{AC}$ , vom obține relația (1). Egalitatea se obține în (2) atunci când  $P$  este pe segmentul  $BM$ . Ne convingem

ușor de faptul că acest lucru se întimplă atunci când cele patru puncte  $A, B, C, M$  sînt situate pe un cerc (în ordine indicată, și două puncte vecine pot să coincidă).

Relativ la această demonstrație pot să apară îndoieli: este valabilă ea pentru orice așezare a punctelor  $A, B, C, M$  din plan; nu depinde de particularitățile figurii? Cel mai simplu este, ca să le risipim, să rezolvăm problema analitic, cu ajutorul numerelor complexe. Notînd numerele complexe prin litere mici corespunzătoare, avem egalitatea:

$$(c - a)(m - b) =$$

$$= (b - a)(m - c) + (c - b)(m - a)$$

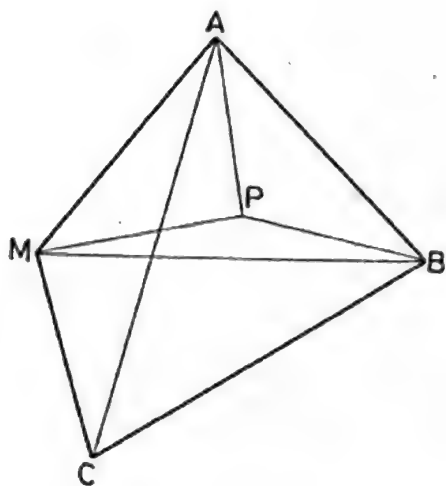


Fig. 159

care se verifică ușor prin calcul. Aplicând modulele și ținând cont de faptul că modulul sumei este mai mic sau egal cu suma modulelor, obținem chiar relația căutată.

Din lema rezultă imediat cerința problemei: dacă  $AB \leq AC$  și  $BC \leq AC$  atunci

$$AC \cdot BM \leq AB \cdot CM + BC \cdot AM \leq AC \cdot CM + AC \cdot AM$$

de unde

$$BM \leq AM + CM.$$

Totodată obținem că egalitatea se realizează în următoarele cazuri: dacă triunghiul  $ABC$  este isoscel ( $AC$  latură egală) și punctul  $M$  este în vârful său;

dacă triunghiul  $ABC$  este echilateral și punctul  $M$  este situat pe arcul  $AC$  al cercului său circumscris, care nu conține punctul  $B$ .

(Lema utilizată se numește „inegalitatea lui Ptolomeu“.)

**M 100.** Să se demonstreze că suma următoarelor 45 de numere:  $\operatorname{tg} 1^\circ + \operatorname{tg} 5^\circ + \operatorname{tg} 9^\circ + \dots + \operatorname{tg} 173^\circ + \operatorname{tg} 177^\circ$  este egală cu 45.

B.P. Beșkarev

Vom demonstra că

$\operatorname{ctg} 1^\circ + \operatorname{ctg} 5^\circ + \operatorname{ctg} 9^\circ + \dots + \operatorname{ctg} 173^\circ + \operatorname{ctg} 177^\circ = 45$  care este același lucru cu egalitatea cerută întrucît  $\operatorname{tg} 1^\circ = \operatorname{ctg} 89^\circ$ ,  $\operatorname{tg} 5^\circ = \operatorname{ctg} 85^\circ$ , ...  
 $\operatorname{tg} 89^\circ = \operatorname{ctg} 1^\circ$ ;  $\operatorname{tg} 93^\circ = \operatorname{ctg} 177^\circ$ ,  $\operatorname{tg} 97^\circ = \operatorname{ctg} 173^\circ$ , ...,  $\operatorname{tg} 177^\circ = \operatorname{ctg} 93^\circ$

Nu e greu de demonstrat prin inducție că

$$\operatorname{ctg} nx = \frac{p_n(\operatorname{ctg} x)}{q_n(\operatorname{ctg} x)}$$

unde  $p_n(y) = y^n - \frac{n(n-1)}{2} y^{n-2} + \dots$  și  $q_n(y) = ny^{n-1} - \dots$  sînt polinoame în  $y$ . (O formulă analoagă s-ar putea scrie pentru  $\operatorname{tg} nx$ , dar aspectul ei va fi diferit întrucîtva pentru  $n$  par și impar, de aceea am preferat să lucrăm cu cotangente. De fapt coeficienții polinoamelor  $p_n(y)$  și  $q_n(y)$  sînt coeficienții binomiali:

$$p_n(y) = y^n - C_n^2 y^{n-2} + C_n^4 y^{n-4} - \dots; \quad q_n(y) = C_n^1 y^{n-1} - C_n^3 y^{n-3} + C_n^5 y^{n-5} - \dots$$

Dealtfel, nouă ne trebuie numai primul coeficient al polinomului  $q_n$ .)

Întrucît, pentru fiecare dintre unghiurile

$1^\circ + 4^\circ k$ , unde  $k = 0, 1, 2, \dots, 44$ , avem  $\operatorname{ctg} 45(1^\circ + 4^\circ k) = \operatorname{ctg}(45^\circ + 180^\circ \cdot k) = 1$  rezultă

$$\frac{p_{45}(\operatorname{ctg}(1^\circ + 4^\circ k))}{q_{45}(\operatorname{ctg}(1^\circ + 4^\circ k))} = 1,$$

adică toate numerele  $y = \operatorname{ctg}(1^\circ + 4^\circ k)$  sînt rădăcinile ecuației

$$p_{45}(y) - q_{45}(y) = 0. \quad (*)$$

Este important coeficientul lui  $y^{44}$ , de aceea vom scrie pe (\*), astfel:

$$y^{45} - 45y^{44} + \dots = 0. \quad (**)$$



Acum a mai rămas să observăm că toate aceste 45 de numere  $\operatorname{ctg}(1^\circ + 4^\circ k)$  sînt diferite (întrucît  $\operatorname{ctg} 1^\circ > \operatorname{ctg} 5^\circ > \dots > \operatorname{ctg} 177^\circ$ ). Astfel, acestea sînt toate cele 45 de rădăcini diferite ale ecuației (\*). Prin urmare după relația lui Viète, suma lor este 45.

Iată și două rezolvări, trimise de cititori, care au încercat să facă direct calculele cerute. Dăm doar rezultatele intermediare ale rezolvărilor, pentru ca să arătăm cită artă trebuie dacă nu se folosește „știința”.

I. Utilizăm identitatea  $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}(\alpha + 60^\circ) + \operatorname{tg}(\alpha + 120^\circ) = 3 \operatorname{tg} 3\alpha$  (\*\*\*) de 15 ori, aplicată la  $\alpha = 1^\circ + 4^\circ k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, 14$ ) adunăm cele 15 egalități și aplicăm din nou (\*\*\*) și aducem suma inițială la forma:  $9(\operatorname{tg} 9^\circ + \operatorname{tg} 81^\circ - \operatorname{tg} 63^\circ - \operatorname{tg} 27^\circ) + 9$  după care rămîne de demonstrat că paranteza este egală cu 4.

$$\begin{aligned} \text{II. } \sum_{k=0}^{44} \operatorname{tg}(1^\circ + 4^\circ \cdot k) &= \sum_{k=1}^{45} \operatorname{tg}(45^\circ + 4^\circ \cdot k) = \sum_{k=1}^{45} \frac{1 + \operatorname{tg} 4^\circ \cdot k}{1 - \operatorname{tg} 4^\circ \cdot k} = 45 + \\ &+ \sum_{k=1}^{45} \operatorname{tg} 8^\circ \cdot k + \sum_{k=1}^{45} \operatorname{tg} 4^\circ k \cdot \operatorname{tg} 8^\circ \cdot k \end{aligned} \quad (****)$$

după care se demonstrează că

$$\sum_{k=1}^{45} \operatorname{tg} 4^\circ \cdot k = 0, \quad \sum_{k=1}^{45} \operatorname{tg} 8^\circ \cdot k = 0, \quad \sum_{j,k=1, j \neq k}^{45} \operatorname{tg} 4^\circ k \cdot \operatorname{tg} 8^\circ j = 0$$

de unde rezultă că ambele sume din (\*\*\*\*) sînt nule.

N.B. Vasiliev

**M 101.** Într-o colonie formată din  $n$  bacterii intră un virus. În primul minut el omoară o bacterie, apoi se divizează în doi noi viruși și concomitent fiecare dintre bacteriile rămase se divizează de asemenea în alte două. În minutul următor cei doi viruși omoară două bacterii, apoi cei doi viruși și toate bacteriile rămase din nou se divizează și așa mai departe.

Colonia va trăi nelimitat sau va fi omorîtă după un timp?

R.M. Kovtun

Este ușor de văzut că numărul bacteriilor și virușilor se modifică odată cu timpul în felul următor

Timpul (minute)	Numărul virușilor	Numărul bacteriilor
0	1	$n$
1	2	$2(n-1)$
2	$2^2$	$2^2(n-2)$
3	$2^3$	$2^3(n-3)$
...	...	...
$t$	$2^t$	$2^t(n-t)$
$t+1$	$2^{t+1}$	$2^{t+1}(n-t-1)$
...	...	...

De aici e clar că  $t = n$  numărul bacteriilor este zero — colonia a murit.

**M 102.** O mulțime din plan formată dintr-un număr finit de puncte are următoarea proprietate: pentru orice două puncte  $A$  și  $B$  ale mulțimii se găsește un punct  $C$  al mulțimii, astfel încât triunghiul  $ABC$  este echilateral.

Cite puncte poate să aibă această mulțime?

V. Gurvari

Vom demonstra că această mulțime poate să aibă numai trei puncte (bineînțeles presupunând că are mai mult decât unul).

Vom nota această mulțime prin litera  $G$ . Fie  $A$  și  $B$  două puncte ale mulțimii  $G$ , astfel încât distanța între ele să fie cea mai mare dintre toate distanțele reciproce ale punctelor mulțimii  $G$ . După ipoteză,  $G$  trebuie să conțină un astfel de punct  $C$  încât triunghiul  $ABC$  să fie echilateral:  $AB = BC = AC = d$ .

Fie  $P$  încă un punct al mulțimii  $G$ . Întrucât distanța dintre  $P$  și  $A$  nu depășește pe  $d$ , punctul  $P$  trebuie să se afle în interiorul cercului de rază  $d$  cu centrul în punctul  $A$ . La fel, el trebuie să se găsească în interioarele cercurilor de rază  $d$  cu centrele în punctele  $B$  și  $C$ . Astfel, mulțimea  $G$  este inclusă în partea comună a acestor trei cercuri care este „triunghiul” curbiliniu  $T$  din figura 160. Mai departe, împreună cu punctele  $P$  și  $A$ , mulțimea  $G$  trebuie să conțină unul dintre punctele  $Q$  și  $R$  care sînt vîrfurile triunghiurilor echilaterale  $APQ$  și  $APR$ , adică punctele care se obțin din  $P$  prin rotație cu  $60^\circ$  (într-o parte sau în cealaltă) în jurul lui  $A$  (fig. 161). Pentru ca punctul  $Q$  să fie situat în interiorul lui  $T$ , trebuie ca punctul  $P$  să fie situat în cuprinsul „petalei”  $AB$ ; într-adevăr, dacă rotim triunghiul  $T$  în jurul lui  $A$  cu  $60^\circ$  în sens contrar acelor ceasului, atunci punctele petalei  $AB$  și numai ele nu vor ieși dincolo de limitele lui  $T$ . La fel, pentru ca punctul  $R$  să fie situat în interiorul lui  $T$ , trebuie ca punctul  $P$  să fie situat în limitele „petalei”  $AC$ . Astfel, am demonstrat că orice punct  $P$  al mulțimii  $G$  trebuie să se găsească între limitele mulțimii  $T_A$  formată din două petale  $AB$  și  $AC$  cu vîrf comun  $A$ . Dar analog se demonstrează că  $G$  este cuprins între limitele mulțimilor  $T_B$  (fig. 162) și  $T_C$  și partea comună a acestor trei mulțimi  $T_A$ ,  $T_B$  și  $T_C$  constă numai din cele trei puncte  $A$ ,  $B$  și  $C$ . Prin urmare, nici un alt punct  $P$  nu aparține mulțimii  $G$ .

În figurile 160 – 163 sînt desenate domeniile mărginite de arce de cercuri de rază  $d = AB$  cu centrele în punctele  $A$ ,  $B$  sau  $C$ . Verificați că aceste domenii se intersectează numai în punctele  $A$ ,  $B$  și  $C$ .

În rezolvare am folosit numai faptul că în mulțimea  $G$  s-au putut găsi două puncte a căror distanță este maximă. Dacă mulțimea  $G$  este finită, atunci acest lucru se poate. Dar afirmația problemei rămîne adevărată și dacă supunem mulțimea  $G$  la o condiție

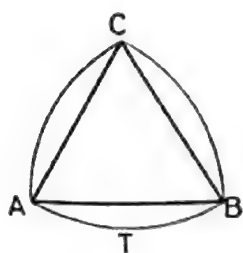


Fig. 160

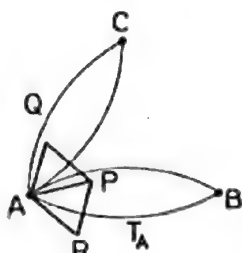


Fig. 161

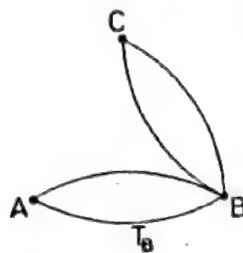


Fig. 162

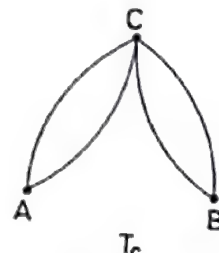


Fig. 163



mai slabă – condiția de mărginire. Pentru rezolvarea problemei, în acest caz sînt necesare considerații suplimentare pe care le poate face cel ce și-a însușit primele noțiuni de topologia mulțimilor din plan. Remarcăm că la condiția de mărginire nu se poate renunța.

**M 103.** Să se cerceteze cîte soluții are sistemul de ecuații

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = a \\ x^2 - y^2 = b \end{cases}$$

unde  $a$  și  $b$  sînt numere reale.

E.A. Iasinovii

Schimbăm variabilele cu formulele

$$\begin{cases} x + y = u \\ x - y = v \end{cases} \text{ adică } \begin{cases} x = \frac{u + v}{2} \\ y = \frac{u - v}{2} \end{cases} \quad (1)$$

Atunci sistemul inițial se scrie astfel:

$$\begin{cases} 3u^2 + v^2 = 4a \\ uv = b \end{cases} \quad (2)$$

Evident, că fiecărei perechi  $(x, y)$  îi corespunde o pereche  $(u, v)$  și reciproc, cu formulele (1) așa încît trebuie să stabilim cîte soluții  $(u, v)$  pentru diferite valori ale parametrilor  $a$  și  $b$ , are sistemul (2). (Dintr-o dată se vede că dacă  $a < 0$ , nu avem soluții, pentru  $a = 0$ ,  $b \neq 0$  de asemenea și pentru  $a = b = 0$ , o singură soluție,  $u = v = 0$ , dar acest lucru nu trebuie remarcat neapărat, întrucît raționamentele ulterioare se vor potrivi și pentru aceste cazuri.)

Scădem și adăugăm la prima ecuație a sistemului (2) a doua ecuație amplificată cu  $2\sqrt{3}$ . Obținem astfel sistemul:

$$\begin{aligned} (\sqrt{3}u - v)^2 &= 4a - 2\sqrt{3}b \\ (\sqrt{3}u + v)^2 &= 4a + 2\sqrt{3}b \end{aligned} \quad (3)$$

echivalent cu (2).

(Gîndiți-vă cum se obține (2) din (3).) Evident că fiecărei perechi  $\sqrt{3}u - v$  și  $\sqrt{3}u + v$  îi corespunde o singură soluție  $(u, v)$  a sistemului. Rămîne să mai ținem cont că (în real) ecuația  $z^2 = c$  are două rădăcini  $z_1 = \sqrt{c}$ ,  $z_2 = -\sqrt{c}$ , dacă  $c > 0$ , una dacă  $c = 0$  și nici una dacă  $c < 0$ .

**Răspuns.** Sistemul are soluții, atunci și numai atunci cînd sînt îndeplinite inegalitățile

$$-2a \leq b\sqrt{3} \leq 2a,$$

iar dacă ambele inegalități sînt stricte („mai mic“), atunci vor fi patru soluții; dacă una dintre ele se transformă în egalitate, vor fi două, dacă ambele se transformă în egalitate (acest lucru e posibil numai dacă  $a = b = 0$ ), atunci o singură soluție.

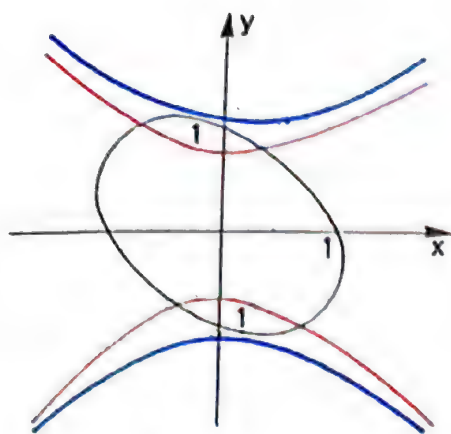


Fig. 164 Cu o rotație de  $45^\circ$  în sensul acelor ceasului se obține din acest desen, desenul alăturat.

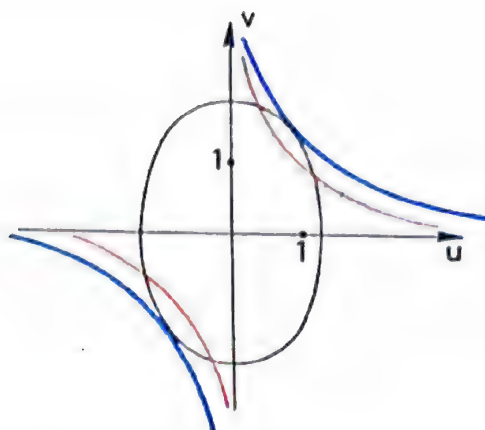


Fig. 165. Graficul hiperbolei roșii are ecuația  $uv = 1/2$ , al celei albastre  $uv = 2/3$ . Cu negru este desenată și elipsa de ecuație  $3u^2 + v^2 = 4$ .

S-ar putea da și formulele care să exprime soluțiile sistemului. Ele sînt destul de greoaie și nici nu sînt cerute de problemă. În locul acestora dăm interpretarea geometrică a ecuațiilor sistemului: prima reprezintă o elipsă, a doua o hiperbolă. În figurile 164, 165 hiperbolele roșii corespund la valorile parametrilor  $a$  și  $b$  pentru care curbele se intersectează (patru soluții), cele albastre, cînd hiperbola este tangentă la elipsă (două soluții).

Se poate cerceta situația și în cadrul numerelor complexe. Raționamentele anterioare dau răspunsul și aici: în numere complexe  $(x, y)$  sistemul are patru, două sau o soluție dacă dintre cele două egalități  $2a = b\sqrt{3}$ ,  $2a = -b\sqrt{3}$  respectiv nici una, una sau amîndouă sînt adevărate.

**M 104.** În interiorul triunghiului  $ABC$  sînt două puncte  $P$  și  $Q$ , astfel încît segmentele  $AP$  și  $AQ$  să formeze unghiuri congruente cu bisectoarea unghiului  $A$ , iar segmentele  $BP$  și  $BQ$  să formeze unghiuri congruente cu bisectoarea unghiului  $B$ .

Să se demonstreze că segmentele  $CP$  și  $CQ$  formează unghiuri congruente cu bisectoarea unghiului  $C$  (figura 166).

V.N. Berezin

După ipoteză  $\angle PAC = \angle QAB = \alpha$ ,  $\angle PBA = \angle QBC = \beta$ . Trebuie să demonstrăm că  $\angle PCA = \gamma_1$  și  $\angle QCB = \gamma_2$  sînt congruente.

Vom da rezolvarea propusă de E. Turkevici, care utilizează teorema sinusurilor:

Înmulțind egalitățile

$$\frac{AP}{BP} = \frac{\sin \beta}{\sin(A - \alpha)}; \quad \frac{CP}{AP} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma_1}; \quad \frac{BP}{CP} = \frac{\sin(C - \gamma_1)}{\sin(B - \beta)}; \quad \frac{AQ}{BQ} = \frac{\sin(B - \beta)}{\sin \alpha}$$

$$\frac{CQ}{AQ} = \frac{\sin(A - \alpha)}{\sin(C - \gamma_2)}; \quad \frac{BQ}{CQ} = \frac{\sin \gamma_2}{\sin \beta}.$$



vom obține

$$\sin(C - \gamma_1) \sin \gamma_2 = \sin(C - \gamma_2) \sin \gamma_1 \text{ sau } \sin C \sin(\gamma_1 - \gamma_2) = 0.$$

Întrucît  $0 < C < \pi$  și  $-\pi < \gamma_1 - \gamma_2 < \pi$ , rezultă că  $\gamma_1 = \gamma_2$ .

I. Berezin a dat o soluție geometrică. Fie  $P_A$ ,  $P_B$  și  $P_C$  simetricele punctului  $P$  față de laturile  $BC$ ,  $AC$  și  $AB$  ale triunghiului  $ABC$ . Observăm că pentru ca segmentul  $AQ$  să formeze cu  $AB$  și  $AC$  unghiurile  $\angle PAC = \alpha$  și  $\angle PAB = A - \alpha$ , e necesar și suficient ca el să fie așezat pe bisectoarea unghiului  $P_BAP_C$  (figura 167). Întrucît  $AP_B = AP_C$ , această condiție

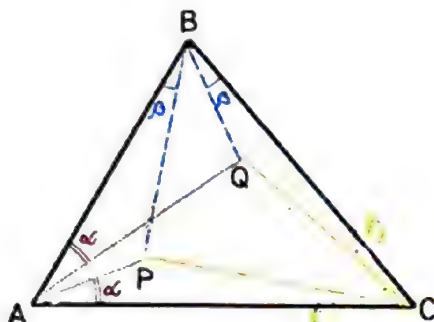


Fig. 166

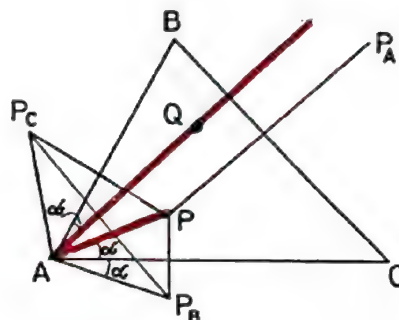


Fig. 167

poate fi formulată astfel: punctul  $Q$  trebuie să fie situat pe perpendiculara dusă prin mijlocul segmentului  $P_BP_C$ . Acum a mai rămas de demonstrat că dacă punctul  $Q$  este situat pe perpendicularele duse prin mijloacele segmentelor  $P_BP_C$  și  $P_CP_A$ , atunci  $Q$  este de asemenea situat pe perpendiculara dusă prin mijlocul segmentului  $P_BP_C$ . Acest lucru este evident: punctele  $P_A$ ,  $P_B$ ,  $P_C$  nu sînt coliniare iar  $Q$  este centrul cercului circumscris triunghiului  $P_AP_BP_C$  (figura 168).

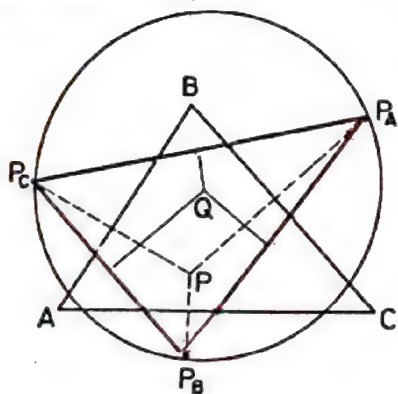


Fig. 168

Desigur, în mod analog se poate demonstra că  $P$  este centrul cercului circumscris triunghiului  $QAQBQC$  unde  $Q_A$ ,  $Q_B$ ,  $Q_C$  sînt simetricele lui  $Q$  față de laturile  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$ . Transformarea  $P \rightarrow Q$  coincide cu inversa sa. Prin această transformare, centrul cercului înscris trece în el însuși, iar centrul cercului circumscris trece în ortocentru și reciproc. (Verificați acest lucru!)

**M 105.** Suma cifrelor unui număr, după înmulțirea sa cu 8, se poate micșora:  $75 \cdot 8 = 600$  — suma cifrelor a fost  $7 + 5 = 12$  și a devenit 6. Dar ea nu se poate micșora de mai mult de 8 ori. Să se demonstreze aceasta.

Cu alte cuvinte, să se demonstreze că pentru orice număr natural  $N$

$$\frac{S(8N)}{S(N)} \geq \frac{1}{8}$$

unde  $S(A)$  este suma cifrelor numărului  $A$  (în scriere zecimală).

Pentru ce numere naturale  $k$  există un astfel de număr pozitiv  $c_k$  încît pentru orice număr natural  $N$  să existe relația

$$\frac{S(kN)}{S(N)} \geq c_k?$$

Să se găsească cea mai mare valoare admisă pentru  $c_k$ .

I.N. Bernștein

La început să observăm că  $S(8 \cdot 125) = S(1000) = 1$ .

Ne sînt necesare următoarele proprietăți ale funcției  $S(N)$ :

1°.  $S(A + B) \leq S(A) + S(B)$ ;

2°.  $S(A_1 + A_2 + \dots + A_n) \leq S(A_1) + S(A_2) + \dots + S(A_n)$

3°.  $S(nA) \leq nS(A)$ ;

4°.  $S(AB) \leq S(A)S(B)$ .

Pentru ca să ne convingem de justetea proprietății 1°, este suficient să ne închipuim că numerele  $A$  și  $B$  se adună scrise unul sub celălalt. Proprietatea 2° rezultă din 1° printr-o inducție simplă, 3° este un caz particular al lui 2°. Dacă ne închipuim că numerele  $A$  și  $B$  se înmulțesc scrise unul sub celălalt și la fiecare cifră a numărului  $B$  aplicăm 3° rezultă 4°.

Acum e ușor să demonstrăm inegalitatea cerută:  $S(N) = S(1000N) = S(125 \cdot 8N) \leq S(125)S(8N) = 8S(8N)$  adică  $S(8N)/S(N) \geq 1/8$ .

Același raționament este valabil pentru orice număr  $k = 2^r 5^q$ . Vom nota prin  $c_k$  numărul  $\frac{1}{S(2^q 5^r)}$ . Vom demonstra că pentru orice  $N$ , există relația  $S(kN)/S(N) \geq c_k$  (pentru  $N = 2^q 5^r$ , inegalitatea se transformă în egalitate, pentru că  $S(kN) = S(10^{r+q}) = 1$ ). Pentru orice  $N$  există relația

$S(N) = S(10^{r+q}N) \leq S(2^q 5^r)S(kN) = \frac{1}{c_k} S(kN)$  ceea ce trebuia demonstrat.

Vom demonstra acum că pentru numerele  $k$  de forma  $Q2^r 5^q$ , unde  $Q$  este prim cu 10, raportul  $S(kN)/S(N)$  poate fi mai mic decît orice număr  $\varepsilon > 0$ , adică nu există un număr pozitiv  $c_k$ .

Nu este necesară următoarea lemă:

Există numărul  $10^m - 1$  (format din  $m$  de nouă) care se divide prin  $Q$ .

Acest lucru se demonstrează ușor cu ajutorul „principiului lui Dirichlet”. Să considerăm resturile la împărțirea prin  $Q$  a numerelor 9; 99; 999; 9999;... Sigur două dintre acestea coincid și diferența respectivelor numere se divide prin  $Q$ ; zerourile de la sfîrșitul acestei diferențe se pot da deoparte (întrucît  $Q$  este prim cu 10).

Fie  $10^m - 1 = QR$  și  $n$  un număr natural. Atunci  $10^{mn} - 1$  este un număr format din  $mn$  de nouă și se împarte la  $Q$ , iar cîtlul este

$$R_n = R(10^{m(n-1)} + 10^{m(n-2)} + \dots + 10^m + 1).$$

Acum să remarcăm că numărul  $Q(R_n + 1) = QR_n + Q = 10^{mn} + Q - 1$  are suma cifrelor pentru orice  $n$  egală cu  $S(Q)$ , iar suma cifrelor numărului  $R_n + 1$  nu este mai mică decît  $(n-1)S(R)$ . Astfel, alegînd pe  $n$  suficient de mare și luînd  $N = R_n + 1$ , obținem că

$$\frac{S(kN)}{S(N)} = \frac{S[(R_n + 1)Q2^r 5^q]}{S(R_n + 1)} \leq \frac{S(2^r 5^q)S(Q)}{(n-1)S(R)} < \varepsilon.$$



Astfel am demonstrat că pentru  $k = 2^r 5^s$  numărul căutat  $c_k$  există și este egal cu  $1/S(2^r 5^s)$ , iar pentru alte valori ale lui  $k$ , un astfel de număr pozitiv  $c_k$  nu există.

N.B. Vasiliev

**M 106\*** Să se demonstreze că dacă numerele  $p_1, p_2, q_1, q_2$  satisfac inegalitatea

$$(q_1 - q_2)^2 + (p_1 - p_2)(p_1 q_2 - p_2 q_1) < 0,$$

atunci trinoamele de gradul al doilea

$$x^2 + p_1 x + q_1 \text{ și } x^2 + p_2 x + q_2$$

au rădăcini reale și între rădăcinile unuia se află o rădăcină a celuilalt.

I.F. Șarighin

Ne sînt utile următoarele proprietăți ale trinomului de gradul al doilea

$$f(x) = x^2 + px + q.$$

1. Dacă pentru un anumit număr  $c$ , este îndeplinită inegalitatea  $f(c) < 0$ , atunci ecuația  $f(x) = 0$  are două rădăcini reale diferite.

2. Dacă pentru două numere  $c$  și  $d$  este îndeplinită inegalitatea  $f(c)f(d) < 0$ , atunci ecuația  $f(x) = 0$  are două rădăcini reale și unul dintre numerele  $c$  și  $d$  este cuprins între aceste rădăcini iar celălalt, nu.

Aceste proprietăți sînt evidente, dacă ne uităm la graficul din figura 169, dar le vom demonstra riguros.

1. Întrucît  $f(c) = c^2 + pc + q = \left(c + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}(p^2 - 4q) < 0$  rezultă că  $p^2 - 4q > 0$  și ecuația  $f(x) = 0$  are două rădăcini  $\frac{1}{2}(-p \pm \sqrt{p^2 - 4q})$ .

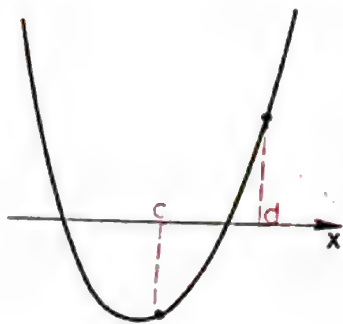


Fig. 169

2. Întrucît  $f(c)f(d) < 0$ , rezultă că  $f(c)$  sau  $f(d)$  este negativ. După proprietatea (1),  $f(x)$  are două rădăcini reale. Le notăm  $\alpha$  și  $\beta$ . Atunci  $f(x) = x^2 + px + q = (x - \alpha)(x - \beta)$ . Numărul  $x$  este situat între rădăcini, atunci și numai atunci cînd  $(x - \alpha)(x - \beta) < 0$  sau  $f(x) < 0$ . Întrucît unul dintre numerele  $f(c)$  și  $f(d)$  este negativ iar celălalt pozitiv, rezultă că unul și numai unul dintre numerele  $c$  și  $d$  este situat între rădăcini.

Trecem acum direct la rezolvarea problemei. Introducem notațiile  $f_1(x) = x^2 + p_1 x + q_1$  și  $f_2(x) = x^2 + p_2 x + q_2$ ,  $R = (q_1 - q_2)^2 + (p_1 - p_2)(p_1 q_2 - p_2 q_1)$ . Trebuie să demonstrăm că dacă  $R < 0$ , atunci fiecare dintre ecuațiile  $f_1(x) = 0$  și  $f_2(x) = 0$  admite cîte două rădăcini reale diferite și că între două rădăcini ale uneia există o singură rădăcină a celeilalte.

Considerăm diferența

$$f_1(x) - f_2(x) = f_3(x). \quad (1)$$

\* Problemele M106 – M115 au fost date la faza finală a Olimpiadei de matematică în 1971 (U.R.S.S.).

Remarcăm că  $p_1 - p_2 \neq 0$ , pentru că dacă  $p_1 - p_2 = 0$ , atunci  $R = (q_1 - q_2)^2 \geq 0$ , ceea ce contrazice ipoteza. De aceea ecuația  $f_3(x) = 0$  are rădăcina  $\gamma = -\frac{q_1 - q_2}{p_1 - p_2}$ , iar atunci desigur că  $f_3(x)$  poate fi scris

$$f_3(x) = (p_1 - p_2)(x - \gamma). \quad (2)$$

În plus, cum rezultă din (1)

$$f_1(\gamma) = f_2(\gamma). \quad (3)$$

Acum, trinomul  $f_2(x)$  (înmulțit cu coeficientul  $(p_1 - p_2)^2$  „il împărțim cu rest“ la  $f_3(x)$  adică scriem identitatea

$$(p_1 - p_2)^2 f_2(x) = f_3(x)g(x) + R. \quad (4)$$

Nu întâmplător am folosit pentru rest aceeași literă  $R$  ca și cea cu care am notat expresia dată în problemă. Într-adevăr,

$$\begin{aligned} (p_1 - p_2)^2 (x^2 + p_2 x + q_2) &= [(p_1 - p_2)x + (q_1 - q_2)][(p_1 - p_2)x + \\ &+ (p_1 - p_2)p_2 - (q_1 - q_2) + (q_1 - q_2)] + (p_1 - p_2)(p_1 q_2 - p_2 q_1). \end{aligned}$$

Înlocuind pe în (4), vom obține, ținând cont că  $f_3(\gamma) = 0$ ,

$$(p_1 - p_2)^2 f_2(\gamma) = R < 0. \quad (5)$$

De aceea,  $f_1(\gamma) = f_2(\gamma) < 0$ . Prin urmare (după proprietatea 1) ambele ecuații au câte două rădăcini reale. Le vom nota respectiv prin  $\alpha_1, \beta_1$ , și  $\alpha_2, \beta_2$ . Atunci

$$f_2(x) = (x - \alpha_2)(x - \beta_2). \quad (6)$$

Acum, folosind succesiv (1), (2), (6) și (5), obținem

$$\begin{aligned} f_1(\alpha_2)f_1(\beta_2) &= f_3(\alpha_2)f_3(\beta_2) = (p_1 - p_2)^2(\alpha_2 - \gamma)(\beta_2 - \gamma) = \\ &= (p_1 - p_2)^2 f_2(\gamma) = R < 0 \end{aligned} \quad (7)$$

de unde rezultă (după proprietatea 2) că rădăcinile ecuațiilor se separă între ele.

Utilizând graficul, rezultatul cerut de problemă și relația (5) se clarifică în două vorbe (fig. 170). Substratul algebric al rezolvării este mai adânc.

Din rezolvare, dar și din figură se vede că  $R = 0$ , atunci și numai atunci când trinoamele  $f_1$  și  $f_2$  au o rădăcină comună sau coincid. Această situație poate fi folosită în probleme de tipul următor: ce condiții trebuie să

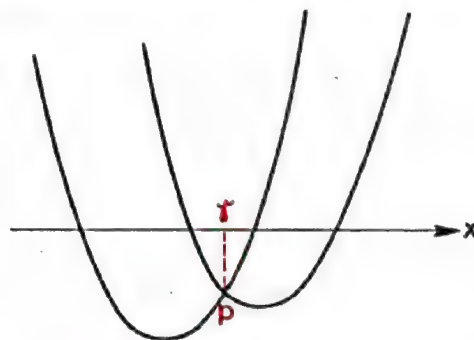


Fig. 170. Pentru ca rădăcinile trinoamelor  $f_1$  și  $f_2$  să fie reale și să se separe, este necesar și suficient ca punctul de intersecție a graficelor să fie sub axa absciselor adică numărul  $f_1(\gamma) = f_2(\gamma) = R/(p_1 - p_2)^2$  să fie negativ.



îndeplinească numerele  $\lambda$  și  $\mu$ , pentru ca ecuațiile  $x^2 + \lambda x - 1 = 0$  și  $x^2 + \mu x - \lambda x + \mu = 0$  să aibă o rădăcină comună? E suficient să introducem în expresia  $R$ , valorile  $p_1 = \lambda$ ,  $q_1 = -1$ ,  $p_2 = \mu - \lambda$ ,  $q_2 = \mu$  și condiția căutată este gata:

$$(\mu + 1)^2 + (2\lambda - \mu)(\mu - \lambda + \mu\lambda) = 0.$$

Se arată că pentru două polinoame de grad oarecare

$$f_1(x) = a_1x^n + b_1x^{n-1} + \dots + c_1$$

$$f_2(x) = a_2x^m + b_2x^{m-1} + \dots + c_2$$

se poate găsi un polinom  $R$  care depinde de  $a_1, a_2, b_1, b_2, \dots, c_1, c_2$ , încît condiția  $R = 0$  să fie îndeplinită atunci și numai atunci cînd  $f_1$  și  $f_2$  au un divizor comun (polinom în  $x$  de gradul 1 sau mai mare)  $R$  se numește rezultatul polinoamelor  $f_1$  și  $f_2$ .

Într-un curs de algebră superioară se dă scrierea pe scurt a rezultatului sub forma unui determinant format cu coeficienții lui  $f_1$  și  $f_2$ .

Noțiunea de rezultat devine foarte de înțeles în cazul în care  $f_1$  și  $f_2$  sint descompuse în factori

$$f_1 = a_1(x - \alpha_1)(x - \beta_1)\dots(x - \gamma_1), f_2 = a_2(x - \alpha_2)(x - \beta_2)\dots(x - \gamma_2)$$

(în mulțimea numerelor complexe acest lucru se poate face totdeauna căci un polinom are totdeauna rădăcini). Atunci, cum se poate arăta

$$R = R(f_1, f_2) = a_1^m a_2^n (\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 - \alpha_2)\dots(\gamma_1 - \gamma_2) \quad (8)$$

unde produsele se iau după toate perechile de rădăcini ale lui  $f_1$  și  $f_2$  (adică sint  $mn$  factori). Verificați că în problema noastră  $R = (\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \beta_2)(\alpha_2 - \beta_2)$  și gândiți-vă cum se poate cu ajutorul acestei expresii a lui  $R$  exprimată prin rădăcini, să se rezolve problema în alt mod (rădăcinile pot fi și complexe). Din egalitatea (8) rezultă următoarea egalitate pe care am și întâlnit-o într-un caz particular:

$$R = a_1^m f_2(\alpha_1) f_2(\beta_1) \dots f_2(\gamma_1) = (-1)^{mn} a_2^n f_1(\alpha_2) f_1(\beta_2) \dots f_1(\gamma_2).$$

Principala proprietate a rezultatului, ținînd cont și de rădăcini complexe poate fi formulată astfel:  $R = 0$  atunci și numai atunci cînd  $f_1$  și  $f_2$  au rădăcină comună.

**M 107.** a) Se dă un poligon convex  $A_1A_2\dots A_n$  (figura 171). Pe latura  $A_1A_2$  se iau punctele  $B_1$  și  $D_2$ , pe latura  $A_2A_3$  punctele  $B_2$  și  $D_3\dots$  pe latura  $A_nA_1$  punctele  $B_n$  și  $D_1$  astfel încît dacă se construiesc paralelogramele  $A_1B_1C_1D_1$ ,  $A_2B_2C_2D_2$ , ...,  $A_nB_nC_nD_n$ , atunci dreptele  $A_1C_1$ ,  $A_2C_2$ , ...,  $A_nC_n$  se intersectează într-un punct. Să se demonstreze că

$$A_1B_1 \cdot A_2B_2 \dots A_nB_n = A_1D_1 \cdot A_2D_2 \dots A_nD_n.$$

b) Să se demonstreze că pentru un triunghi este adevărată și afirmația reciprocă: dacă pe latura  $A_1A_2$  s-au ales punctele  $B_1$  și  $D_2$  pe latura  $A_2A_3$  punctele  $B_2$  și  $D_3$ , pe latura  $A_3A_1$  punctele  $B_3$  și  $D_1$  astfel încît

$$A_1B_1 \cdot A_2B_2 \cdot A_3B_3 = A_1D_1 \cdot A_2D_2 \cdot A_3D_3$$

atunci, dacă se construiesc paralelogramele  $A_1B_1C_1D_1$ ,  $A_2B_2C_2D_2$ ,  $A_3B_3C_3D_3$ , dreptele  $A_1C_1$ ,  $A_2C_2$  și  $A_3C_3$  sînt concurente.

V.L. Gutenmaher

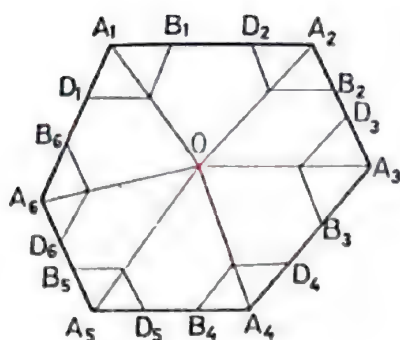


Fig. 171

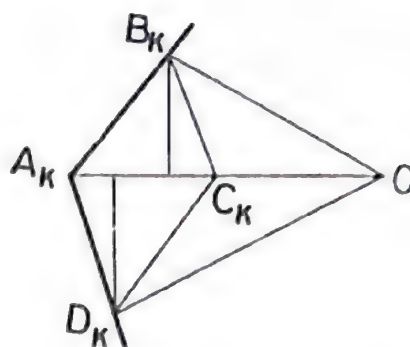


Fig. 172

a) Fie  $O$  punctul de concurență. Scriem egalitatea pe care trebuie să o demonstrăm astfel:

$$\frac{A_1B_1 \cdot A_2B_2 \dots A_{n-1}B_{n-1} \cdot A_nB_n}{A_2D_2 \cdot A_3D_3 \dots A_nD_n \cdot A_1D_1} = 1.$$

Acum observăm că rapoartele segmentelor  $\frac{A_1B_1}{D_2A_2}, \frac{A_2B_2}{D_3A_3}, \dots, \frac{A_nB_n}{D_1A_1}$  sînt respectiv egale cu rapoartele ariilor triunghiurilor următoare:

$$\frac{S(A_1B_1O)}{S(D_2A_2O)}, \frac{S(A_2B_2O)}{S(D_3A_3O)}, \dots, \frac{S(A_nB_nO)}{S(D_1A_1O)}$$

astfel încît relația căutată se poate scrie astfel,

$$\frac{S(A_1B_1O) \cdot S(A_2B_2O) \dots S(A_{n-1}B_{n-1}O) \cdot S(A_nB_nO)}{S(A_2D_2O) \cdot S(A_3D_3O) \dots S(A_nB_nO) \cdot S(A_1B_1O)} = 1$$

sau (aranjînd factorii numitorului)

$$\frac{S(A_1B_1O) \cdot S(A_2B_2O) \dots S(A_nB_nO)}{S(A_1D_1O) \cdot S(A_2D_2O) \dots S(A_nD_nO)} = 1.$$

Dar ultima egalitate este evidentă. Într-adevăr, ariile triunghiurilor  $A_iB_iO$  și  $A_iD_iO$  pentru orice  $i = 1, 2, \dots, n$  sînt egale întrucît ele au cîte o latură comună  $A_iO$  și înălțimi congruente (fig. 172). Înălțimile coborîte din vîrfurile  $B_i$  și  $D_i$  pe latura  $A_iO$  sînt congruente pentru că diagonala  $A_iC_i$  împarte paralelogramul  $A_iB_iC_iD_i$  în două triunghiuri congruente.

b) Teorema inversă se poate deduce din cea directă. Fie  $P$  punctul de concurență a dreptelor  $A_1C_1$  și  $A_2C_2$ . Să presupunem că dreapta  $A_3P$  nu trece prin punctul  $C_3$ . Atunci ea va intersecta una dintre laturile  $B_3C_3$  sau  $D_3C_3$  ale paralelogramului  $A_3B_3C_3D_3$  să zicem  $D_3C_3$  în punctul  $C'_3$  (figura 173). Luăm pe latura  $A_3A_1$  un punct  $B'_3$  astfel încît  $A_3B'_3C'_3D_3$  să fie paralelogram. Acum, conform teoremei directe  $A_1B_1 \cdot A_2B_2 \cdot A_3B'_3 = A_1D_1 \cdot A_2D_2 \cdot A_3D_3$  pe de o

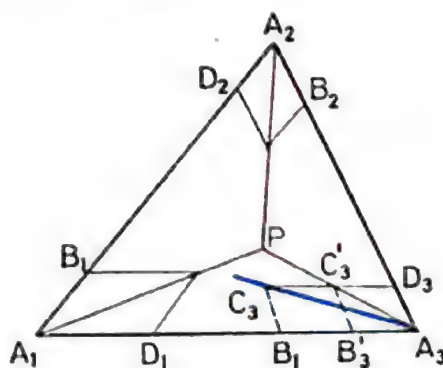


Fig. 173



parte, iar pe de altă după ipoteză  $A_1B_1 \cdot A_2B_2 \cdot A_3B_3 = A_1D_1 \cdot A_2D_2 \cdot A_3D_3$ , de aceea  $A_3B'_3 = A_3B_3$  prin urmare, presupunerea noastră că punctele  $C_3$  și  $C'_3$  și prin urmare  $B_3$  și  $B'_3$  nu ar coincide, nu e adevărată.

B.L. Gutenmaher

**M 108.** a) Să se demonstreze că dreapta care împarte un triunghi dat în două poligoane de arii egale și perimetre egale trece prin centrul cercului înscris în acest triunghi.

b) Să se demonstreze o afirmație analoagă pentru un poligon oarecare care admite un cerc înscris.

Iu. I. Ionin

Rezolvăm direct problema b). Presupunem că o dreaptă intersectează conturul unui poligon circumscris unui cerc cu centrul în  $O$ , în punctele  $P$  și  $Q$ , care separă perimetrul poligonului în două părți egale. Atunci segmentele  $OP$  și  $OQ$  împart acest poligon în două poligoane echivalente (pentru a ne convinge de acest lucru, este suficient să unim punctul  $O$  cu toate vîrfurile poligonului și să observăm că înălțimile tuturor triunghiurilor formate, duse din vîrfurile  $O$ , sînt razele cercului înscris). Dar dacă și dreapta  $PQ$  împarte poligonul în două părți echivalente, atunci punctul  $O$  trebuie să fie situat pe segmentul  $PQ$  (altfel apare triunghiul  $OQP$  „în plus”) (vezi figura 174).

Același raționament permite să se demonstreze un fapt ceva mai general: dreapta care intersectează un poligon circumscris, împarte aria sa și perimetrul său în același raport, atunci și numai atunci cînd trece prin centrul cercului înscris.

Iubitorilor inegalităților geometrice le propunem să studieze chestiunea: cite drepte care împart în două părți egale aria și perimetrul unui triunghi cu laturile  $a$ ,  $b$  și  $c$  există?

**Răspuns.** Fie  $a \geq b \geq c$ ,  $a + b + c = 2p$ . Atunci pentru  $2ab \geq p^2$  există o singură dreaptă cu proprietatea cerută, dacă  $2ab = p^2$ , atunci există două drepte, dacă  $2ab < p^2$ , sînt trei drepte.

**Indicație.** Ducem prin centrul  $O$  al cercului înscris o dreaptă, o rotim în jurul lui și vedem în ce parte a ei se află bucata cea mai mare din suprafață (sau, ceea ce este același lucru, din perimetru); în figură, 175, pentru cele șase poziții ale dreptei – după bisectoare și perpendiculare pe ele – săgeata arată în ce parte este bucata mai mare a triunghiului (înainte de a verifica acest lucru, demonstrați că bisectoarele împart totdeauna unghiul complet din jurul lui  $O$  în șase unghiuri ascuțite). Sînt importante aceste poziții întrucît

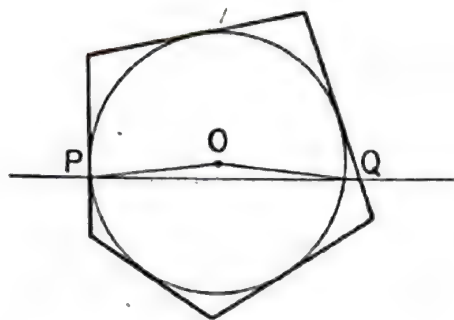


Fig. 174

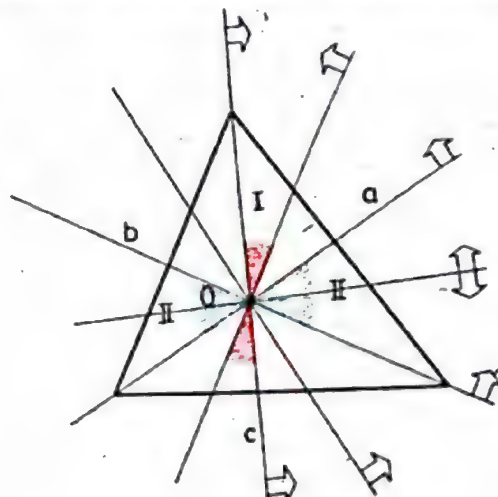


Fig. 175

în intervalele dintre ele, valoarea ariei (perimetrului) situată de o parte (într-un semiplan și deci și în cealaltă, variază monoton. După aceasta, se înțelege ușor că în sectorul (I) este o dreaptă cu proprietatea cerută (pentru orice  $a \geq b \geq c$ ) și în fiecare dintre celelalte notate cu (II), încă cite una, dacă  $2ab < p^2$ .

În ceea ce privește un poligon cu  $n > 3$ , numărul dreptelor poate să fie chiar infinit, iar dacă poligonul nu admite un cerc înscris, se poate întâmpla ca ele să nu treacă prin același punct (de exemplu, într-un trapez isoscel cu bazele  $a$  și  $b$  se poate alege lungimea laturilor neparalele astfel încât să existe o dreaptă paralelă cu bazele care să împartă în două și aria și perimetrul; în afară de aceasta, de aceeași proprietate se bucură toate dreptele care trec prin mijlocul liniei mijlocii și intersectează bazele trapezului).

Se poate demonstra, bazându-ne pe considerente „de continuitate” că pentru orice poligon convex (și în general pentru orice figură convexă) există cel puțin o dreaptă care împarte în două părți egale aria și perimetrul său. La început, e evident că, dacă mișcăm o dreaptă perpendiculară pe o direcție fixată  $Ox$ , va exista un moment (unic) când ea va împărți în două părți egale aria și alt moment în care va împărți în părți egale perimetrul. Fie  $x_s$  și  $x_p$  coordonatele respectivelor puncte pe axa  $Ox$ . Acum, păstrind punctul  $O$  fix, vom roti în jurul său axa  $Ox$  de unghi  $\varphi$  ( $0 < \varphi < \pi$ ) (figura 176). Pentru fiecare poziție a axei  $Ox$ , deci pentru fiecare valoare a unghiului  $\varphi$  putem să determinăm numerele  $x_s(\varphi)$  și  $x_p(\varphi)$ . Este evident că fiecare dintre funcțiile  $x_s$  și  $x_p$  depinde de  $\varphi$  „continuu”, iar pentru  $\varphi = 0$  și  $\varphi = \pi$ , fiecare dintre ele ia valori egale în valoare absolută dar de semne contrare (pentru că axa  $Ox$  în aceste situații apare în sensuri diferite). Prin urmare pentru o anumită valoare intermediară  $\varphi = \varphi_0$  valorile lui  $x_s$  și  $x_p$  trebuie să devină egale. Aceasta și este proprietatea principală a „continuității” pe care am folosit-o.

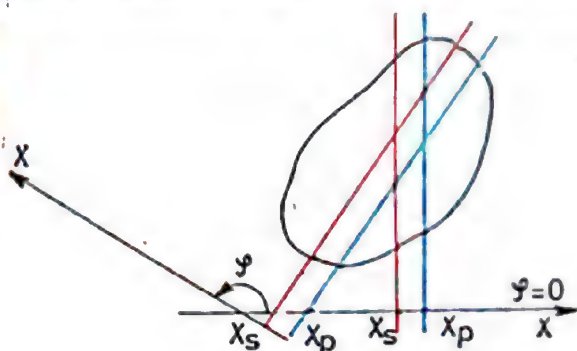


Fig. 176 Liniiile trasate cu roșu împart în jumătate suprafața, celelalte perimetrul.

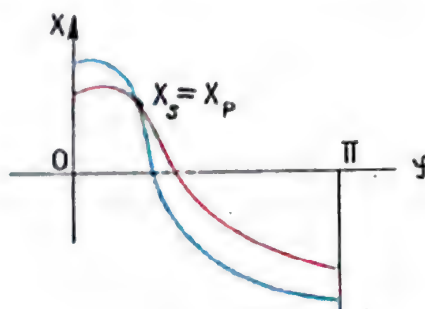


Fig. 177. Cele două curbe continue trebuie să se intersecteze.

**M 109.** a) În vârful  $A_1$  al unui dodecagon regulat  $A_1 A_2 A_3 \dots A_{12}$  se pune semnul minus, iar în celelalte plus. Se hotărăște să se schimbe semnele deodată în oricare șase vîrfuri consecutive ale poligonului. Să se demonstreze că nu se poate obține situația, după oricîte astfel operații, ca în vârful  $A_2$  să fie semnul minus, iar în celelalte semnul plus.

b) Demonstrați aceeași afirmație dacă se hotărăște să se schimbe semnele nu în șase ci în patru vîrfuri consecutive ale poligonului.

c) Demonstrați aceeași afirmație dacă se schimbă deodată semnele în trei vîrfuri consecutive ale poligonului.

Începem cu problema c). Împărțim cele 12 vîrfuri în trei grupe de câte patru vîrfuri în fiecare: în prima grupă, vîrfurile cu numerele 1, 4, 7, 10, într-a doua cele cu numerele 2, 5, 8, 11, iar în a treia, cele cu numerele 3, 6, 9, 12, (vezi figura în care vîrfurile fiecărei grupe formează un pătrat). E clar că orice patru vîrfuri consecutive vom alege, în fiecare dintre cele trei



grupe va fi unul și numai unul. Astfel, schimbând semnele la trei vîrfuri consecutive înseamnă că schimbăm numărul minusurilor (în plusuri) în fiecare grupă o dată.

Acum să arătăm că de la situația  $A$  din fig. 178 nu se poate ajunge la situația  $B$ . În situația  $A$  și în a doua și în a treia grupă, numărul minusurilor este zero. După prima schimbare de semne, oriunde s-ar produce, în a doua și a treia grupă a apărut câte un minus. Apoi după a doua schimbare de semne în fiecare dintre aceste două grupe vor fi 0 sau 2 de minus, apoi 1 sau 3 minusuri, apoi 0, 2 sau 4 minusuri, apoi din nou 1 sau 3 minusuri în fiecare, ș.a.m.d. Astfel în aceste două grupe vor fi deodată un număr par sau impar de minusuri. Dar în situația  $B$  în a doua grupă este 1 minus în a treia, 0. De aceea nu putem să o obținem din  $A$ .

În mod analog se rezolvă punctele a) și b). Vedeți ce grupe de vîrfuri este bine să considerați în aceste cazuri. Nu mai dăm rezolvarea acestor probleme ci încercăm să examinăm direct o problemă mai generală.

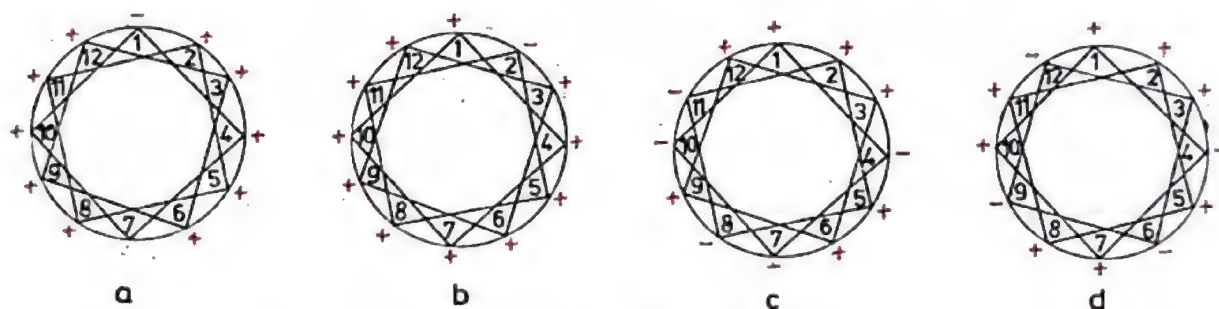


Fig. 178

Presupunem că în vîrfurile unui poligon regulat cu  $n$  laturi sînt scrise plusuri și minusuri și se stabilește să se schimbe semnele deodată în orice  $k$  vîrfuri consecutive ( $n$  și  $k$  sînt numere naturale date  $k < n$ ); ce grupări de semne se pot obține din situația dată și care nu?

Să considerăm întii un caz particular care generalizează problemele a), b), c).  $n$  se divide prin  $k$ .

Fie  $n = kn_1$ . Împărțim toate cele  $n$  vîrfuri în  $k$  grupe astfel încît în fiecare grupă să fie cuprinse cele  $n_1$  vîrfuri ale unui poligon regulat cu  $n_1$  laturi. Fiecărei situații de aranjare a plusurilor și a minusurilor îi punem în corespondență gruparea  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ , unde

$$y_i = \begin{cases} 0 & \text{dacă în grupa } i \text{ este un număr par de minusuri} \\ 1 & \text{dacă în grupa } i \text{ este un număr impar de minusuri.} \end{cases}$$

E clar că schimbarea semnelor în oricare  $k$  vîrfuri consecutive provoacă schimbarea numărului de minusuri în fiecare grupă cu unu, adică din aranjarea căreia îi corespunde gruparea  $y$ , se obține aranjarea căreia îi va corespunde gruparea  $\bar{y}$  care se obține din  $y$  prin schimbarea tuturor zerourilor în unități și invers. Vom numi două aranjări  $x$  și  $x'$  echivalente ( $x \sim x'$ ) dacă grupările atașate lor,  $y, y'$  sînt sau egale sau opuse (se poate verifica ușor că aceasta este o relație adevărată de echivalență). (De exemplu, pe figură unde  $n = 12, k = 3$  aranjarea  $C$  este echivalentă cu  $A$  și  $B \sim D$ .)

Vom demonstra că o aranjare poate să se transforme în alta numai dacă sînt echivalente. Într-un sens acest lucru a fost de fapt demonstrat: din aranjarea  $X$  cu gruparea  $y$  prin schimbarea semnelor se obțin aranjări cărora le corespund grupările  $\bar{y}, y, \bar{y}, y$

ș.a.m.d., adică dacă din  $X$  se poate obține  $X'$ , atunci  $X \sim X'$ . Să demonstrăm și reciproca: dacă  $X \sim X'$ , atunci din poziția inițială a semnelor  $X$  se poate obține aranjarea  $X'$ . E clar că se pot obține în virfurile cu numerele  $1, 2, \dots, n - k + 1$  acele semne care le dorim, schimbând succesiv (dacă e nevoie) semnele în virfurile de la  $1$  la  $k$ , apoi de la  $2$  la  $k + 1, \dots$  de la  $n - k + 1$  la  $n$ . Astfel putem să obținem aranjarea  $X''$  care, în primul rând, coincide cu  $X'$  în toate virfurile, în afară poate de  $k - 1$  virfuri, de la al  $n - k + 2$  până la al  $n$ -lea și al doilea rând, este echivalentă cu  $X'$  ( $X'' \sim X'$  pentru că ele sînt echivalente cu  $X$ ). Dar atunci aranjările  $X''$  și  $X'$  trebuie să coincidă complet. Într-adevăr, întrucît  $y_1 = y'_1$  (semnele în toate virfurile primei grupe a aranjărilor  $X''$  și  $X'$  coincid) și  $X'' \sim X'$ , atunci  $y_i = y'_i$  pentru toți  $i = 2, 3, \dots, k$ , prin urmare în virfurile cu numere de la  $n - k + 2$  la  $n$ , la  $X''$  trebuie să fie aceleași semne ca și la  $X'$ .

Afirmația am demonstrat-o pentru  $n = kn_1$ . Din demonstrație se vede că toată mulțimea aranjărilor de semne posibile se împarte în  $2^{k-1}$  clase cu cîte  $2^{n-k+1}$  elemente fiecare.

Fie acum,  $d = c.m.m.d.c. (n, k)$ ,  $n = dn_1$ ,  $k = dk_1$ . Atunci se știe că există astfel de numere întregi  $x$  și  $y$  încît  $kx - ny = d$ . Schimbînd semnele lui  $x$  și  $y$  se poate considera că  $x \geq 0$ , iar  $kx - ny$  este egal cu  $d$  sau  $-d$ .

Fie  $k_1$  impar. Atunci  $y$  poate fi considerat par (altfel se poate înlocui  $x$  cu  $x + n_1$  și  $y$  cu  $y + k_1$ ). Atunci, dacă schimbăm semnele în primele  $k$  virfuri apoi în următoarele  $k$  virfuri apoi în cele care urmează după acestea  $k$  virfuri ș.a.m.d. de  $x$  ori, ca rezultat se schimbă semnul numai în  $d$  virfuri succesive. După aceasta problema a devenit echivalentă cu cea în care se stabilește să se schimbe semnele în  $d$  virfuri succesive.

Fie  $k_1$  par. Atunci  $y$  este impar (căci  $k_1x - n_1y = 1$ ). Folosind faptul că  $xk - ny = \pm d$  putem să schimbăm semnul la toate virfurile, în afară de  $d$ , consecutive. Prin urmare putem să păstrăm neschimbat semnul la toate virfurile, afară de două distanțate cu  $d$  unul de altul. Astfel putem să obținem orice combinație de semne la care în virfurile fiecărui poligon regulat cu  $n_1$  laturi să avem aceeași paritate de semne minus ca și în aranjarea inițială. Se vede ușor că altele nu se pot obține.

Răspuns. Să facem să-i corespundă fiecărei aranjări de semne gruparea  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  unde  $x_i$  sînt  $0$  sau  $1$  după cum numărul de minusuri situate în virfurile cu numerele  $i + d_j$  ( $j = 0, 1, \dots, n_1 - 1$ ) este par sau impar. Atunci, pentru  $k_1$  par, două aranjări de semne pot trece una în alta atunci și numai atunci cînd grupările lor respective sînt identice, pentru  $k_1$  impar, dacă ele sînt identice sau opuse

N.B. Vasiliev

**M 110** Pe o foaie de hîrtie infinită cu pătrățele,  $N$  pătrățele s-au înnegrit. Să se demonstreze că din foaia de hîrtie se poate decupa un număr finit de pătrate, astfel încît să fie îndeplinite două condiții:

- 1) toate pătrățelele negre să fie în pătratele tăiate;
- 2) în oricare dintre pătratele tăiate  $K$ , aria pătrățelelor negre să fie cuprinsă între  $1/5$  și  $4/5$  din aria lui  $K$ .

G.A. Rozenblium

Vom numi admisibile pătratele care sînt înnegrite nu mai mult decît  $4/5$  și nu mai puțin decît  $1/5$ . Vom lua un  $n$  atît de mare încît să se găsească un pătrat făcut cu liniile rețelei, de latură  $2^n$  care să conțină toate pătrățelele înnegrite și aria lor să fie mai mică decît  $1/5$ . Împărțim acest pătrat în patru pătrate congruente. Fiecare pătrat din descompunere va fi înnegrit mai puțin de  $4/5$ . Pătratele care sînt înnegrite mai mult decît  $1/5$  vor fi admisibile. Restul pătratelor din descompunere care sînt înnegrite cu mai puțin de  $1/5$  le împărțim din nou în patru pătrate ș.a.m.d. (fig. 179).



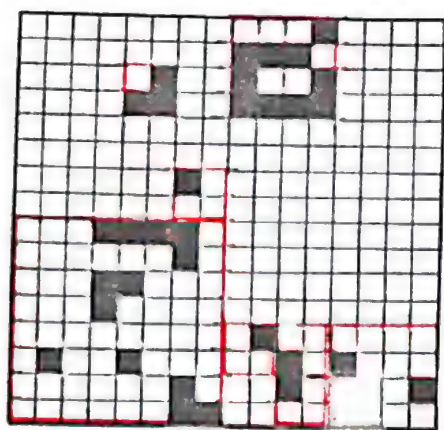


Fig. 179

După a(n - 2) — a descompunere obținem un număr oarecare de pătrate admisibile de diferite dimensiuni și pătrate  $2 \times 2$  fiecare dintre ele fiind înnegrit mai puțin de  $4/5$ . Acelea dintre ele care conțin cel puțin o pătrăciță neagră, sint înnegrite mai mult de  $1/5$  și deci sint admisibile. Restul pătratelor de  $2 \times 2$  nu vor conține pătrățele negre prin urmare toate pătrățelele negre sint situate în pătratele admisibile și astfel s-a realizat cerința problemei.

Problema admite o generalizare la spațiu cu înlocuirea lui  $1/5$  și  $4/5$  cu  $1/9$  și  $8/9$ .

**M 111.** Într-un pătrat de latură 1, este situată o figură astfel încît distanța dintre oricare două puncte ale sale nu este 0,001. Să se demonstreze că aria acestei figuri nu depășește 0,34. (Se poate considera că frontiera figurii de care e vorba este formată din segmente de dreaptă și arce de cercuri.)

Încercați să obțineți o evaluare mai fină și demonstrați o teoremă analoagă în spațiu.

G.V. Rozenblum

Vom nota prin  $F$  figura și prin  $S$  aria sa. Considerăm figura  $F_1$ , obținută din  $F$  printr-o translație cu 0,001 în direcția 1 paralelă cu latura pătratului. Figura  $F_2$  se obține din  $F$  printr-o translație cu 0,001 în direcția 2 care face un unghi de  $60^\circ$  cu direcția 1 (vezi fig. 180, a).

Figurile  $F_1$  și  $F$  nu au puncte comune. Într-adevăr, să presupunem că punctul  $A$  aparține lui  $F$  și în același timp lui  $F_1$ , adică s-a obținut prin translația unui anumit punct  $B$  al figurii  $F$ , cu 0,001. Atunci distanța dintre  $A$  și  $B$  va fi egală cu 0,001 ceea ce contrazice ipoteza problemei. În mod analog, nu se vor intersecta  $F$  cu  $F_2$  și  $F_1$  cu  $F_2$ . Toate trei figurile considerate au aceeași arie  $S$  și sint situate într-un pătrat cu latura 1,001. De aceea este adevărată inegalitatea  $3S < 1,001^2$ , de unde  $S < 0,335$ .

Această evaluare poate fi întrucitva îmbunătățită (la a treia și la a patra zecimală) considerînd mai atent partea din figura  $F$  care se află în apropierea frontierei pătratului. Dar, vom demonstra o evaluare substanțial îmbunătățită, anume  $S < 0,287$ .

Considerăm figurile  $F_3$  și  $F_4$  obținute din  $F$  printr-o translație cu  $0,001\sqrt{3}$  în două direcții 3 și 4 care formează unghiul  $\arcsin \frac{1}{2\sqrt{3}}$ .  $F_4$  poate fi obținut din  $F_3$  printr-o translație cu 0,001, de aceea  $F_3$  și  $F_4$  nu se intersectează (fig. 180, b). Alegem dintre aceste figuri pe aceea (de exemplu pe  $F_3$ ) care

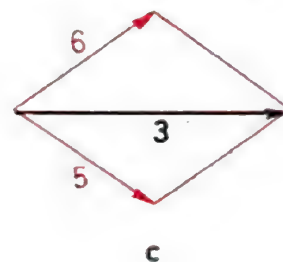
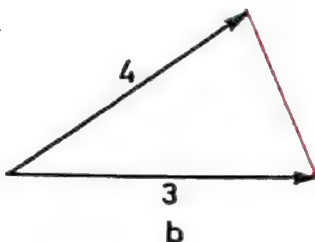


Fig. 180 a) b) c)



are intersecția cea mai mică cu  $F$ . Aria acestei intersecții nu este mai mare decât  $S/2$ , de aceea aria totală ocupată de  $F$  și  $F_3$  nu va fi mai mică decât  $3S/2$ . Vom construi acum figurile  $F_5$  și  $F_6$  translatînd pe  $F$  cu 0,001 în direcțiile 5 și 6, care formează unghiuri de  $30^\circ$  cu 3 (fig. 180, c). Figura  $F_3$  poate fi obținută din  $F_5$  printr-o translație cu 0,001 în direcția 6 și din  $F_6$  cu o translație de 0,001 în direcția 5. De aceea  $F_5$  și  $F_6$  nu se intersectează nici cu  $F_3$  nici cu  $F$ ; nu se intersectează nici între ele. Prin urmare aria ocupată de  $F$ ,  $F_3$ ,  $F_5$ ,  $F_6$  nu e mai mică de  $7S/2$ . Toate aceste figuri trebuie să fie cuprinse într-un pătrat cu latura  $1 + 0,001 \sqrt{3} < 1,0018$ , deci  $S < \frac{2}{7} (1,0018)^2 < 0,287$ .

Această evaluare a reușit să o găsească A. Goldberg (Moskova).

Problema celei mai bune evaluări pînă în prezent a rămas deschisă. Toate exemplele construite au dat pentru  $S$  o valoare mai mică decât 0,25.

G.V. Rozenblium

**M 112.** Într-un tablou  $m \times n$  sînt scrise numere astfel încît, pentru orice două linii și orice două coloane, suma numerelor situate în vîrfurile opuse ale dreptunghiului format de ele este egală cu suma numerelor situate în celelalte două vîrfuri opuse. O parte dintre numere s-a șters dar după cele rămase se pot reconstitui cele șterse. Să se demonstreze că au rămas cel puțin  $n + m - 1$  numere.

Pentru un matematician ideea demonstrației poate fi expusă astfel. Tablourile care satisfac cerințele problemei formează un spațiu liniar de dimensiune  $n + m - 1$ . Pe de altă parte, dacă numerele care stau în unele scăsuțe determină tabloul în mod unic, atunci dimensiunea „spațiului tablourilor” nu depășește pe  $s$ , deci  $s \geq n + m - 1$ .

Trecem acum la o demonstrație expusă detaliat. Vom conveni să numim numerele din tablou, elementele sale. Vom nota prin  $a_{ij}$  elementele tabelului  $A$  situate la intersecția liniei  $i$  cu coloana  $j$ .

În mod natural se definesc suma și înmulțirea tablourilor cu un număr.

Adunarea a două tablouri. Dacă ne sînt date tablourile  $A$  și  $B$  cu elementele  $a_{ij}$  și  $b_{ij}$ , atunci suma lor  $C$  ( $C = A + B$ ) se numește tabloul cu elementele  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ .

Înmulțirea tabloului cu un număr. Dacă se dă tabloul  $A$  cu elementele  $a_{ij}$ , atunci tabloul  $\lambda A$  este un tablou  $B$  cu elementele  $b_{ij} = \lambda a_{ij}$ .

Se verifică ușor că dacă adunăm tablouri care satisfac cerința problemei între ele sau dacă le înmulțim cu un număr, atunci tablourile rezultate satisfac din nou cerința problemei. Întrucît toate tablourile pe care le vom întîlni mai jos satisfac cerința problemei, nu vom mai menționa special acest lucru.

Vom introduce acum o noțiune foarte importantă: dependența liniară. Vom numi tabloul format numai din zerouri, tabloul nul.

Tablourile  $A_1, A_2, \dots, A_r$  se numesc liniar dependente, dacă se pot indica astfel de numere  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$  dintre care nu toate sînt nule astfel încît  $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \dots + \lambda_r A_r$  este tabloul nul.

(De exemplu, dacă printre tablourile  $A_1, A_2, \dots, A_r$  două tablouri sînt identice ( $A_i = A_j$ ) atunci se poate indica o astfel de grupare de numere:  $\lambda_i = 1, \lambda_j = -1$ , și toți ceilalți  $\lambda$  sînt zero.) Dacă pentru tablourile  $A_1, A_2, \dots, A_r$  astfel de numere  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$  nu există ele se numesc liniar independente.

Propunem cititorului să demonstreze că din orice grupare de tablouri  $B_1, B_2, \dots, B_s$  dintre care nu toate sînt nule, se poate găsi o grupare maximă liniar independentă  $B_{i_1}, B_{i_2}, \dots, B_{i_t}$  adică o astfel de grupare încît dacă îi mai adăugăm un singur tablou  $B_i$ , ea devine liniar dependentă.



Lungimea grupării maxime liniar independentă este unic determinată de cea aleasă  $B_1, B_2, \dots, B_t$ , adică dacă se mai indică încă o grupare liniar independentă maximă  $B_{j_1}, B_{j_2}, \dots, B_{j_r}$  atunci  $r = t$ .

Să ne întoarcem acum la problema noastră. Presupunem că au rămas  $s$  numere neșterse în tablou și tabloul s-a reconstituit după ele în mod unic. Să demonstrăm că numai la tabloul nul se poate întâmpla ca cele  $s$  numere neșterse să fie zero. Într-adevăr, dacă s-ar găsi un tablou nenul  $B$  în care în cele  $s$  locuri să fie zerouri, atunci s-ar putea reface nu numai un anumit tablou  $A$  ci și tablourile  $A + \lambda B$ , unde  $\lambda$  este arbitrar. Dar aceasta contrazice ipoteza problemei.

Să demonstrăm acum că orice  $s + 1$  tablouri sînt liniar dependente. Vom lua, pentru aceasta, o oarecare grupare formată din  $s + 1$  tablouri. Le vom nota prin  $A_1, A_2, \dots, A_{s+1}$ . Dacă unul dintre aceste tablouri este cel nul, atunci este demonstrat. În caz contrar, în tabloul  $A_{s+1}$  în unele din cele  $s$  căsuțe, de exemplu în căsuța  $s_1$ , nu e un zero. De aceea se pot alege astfel de numere  $\lambda_{1,s+1}, \lambda_{2,s+1}, \dots, \lambda_{s,s+1}$  încît în tablourile  $B_1 = A_1 - \lambda_{1,s+1} A_{s+1}, B_2 = A_2 - \lambda_{2,s+1} A_{s+1}, \dots, B_s = A_s - \lambda_{s,s+1} A_{s+1}$  în căsuța  $s_1$  să fie zero. Dacă tabloul  $B_s$  este nul, atunci totul este demonstrat. În caz contrar, în una dintre căsuțele noastre, de exemplu, în căsuța  $s_2$  din tabloul  $B_s$  nu e zero. De aceea, din nou se poate alege o grupare de numere  $\lambda_{1,s}, \lambda_{2,s}, \dots, \lambda_{s-1,s}$  încît în tablourile  $C_1 = B_1 - \lambda_{1,s} B_s, C_2 = B_2 - \lambda_{2,s} B_s, \dots, C_{s-1} = B_{s-1} - \lambda_{s-1,s} B_s$ , în căsuța  $s_2$  să fie un zero. Dacă tabloul  $C_{s-1}$  nu este cel nul, atunci mai facem un pas ș.a.m.d. După fiecare pas, numărul zerourilor din căsuțele noastre crește cu unu. Astfel, fie că obținem după un număr de pași tabloul nul, fie că parcurgem  $s$  pași și obținem un tablou în care în toate căsuțele sînt zerouri, deci din nou tabloul nul. Se vede ușor că tabloul nul obținut poate fi scris astfel:

$$A_i + \mu_1 A_{i+1} + \mu_2 A_{i+2} + \dots + \mu_{s+1-i} A_{s+1}.$$

De aceea tabelele  $A_1, A_2, \dots, A_{s+1}$  sînt liniar dependente și e suficient acum să indicăm  $n + m - 1$  tablouri liniar independente. Într-adevăr, dacă acest lucru se reușește, atunci după cele demonstrate  $s \geq n + m - 1$  și chiar această inegalitate trebuie să o demonstrăm.

Să indicăm  $n + m - 1$  tablouri liniar independente, este simplu. Se pot lua, de exemplu, următoarele tablouri. Tabloul  $A_{k,1}$  unde  $k = 2, 3, \dots, m$  cu elementele  $a_{k,j} = 1$  și restul elementelor egale cu zero. Tablourile  $A_{1,p}$  unde  $p = 2, 3, \dots, n - 1$  cu elementele  $a_{j,p} = 1$  și restul elementelor egale cu zero și tabloul  $A_{1,1}$  în care  $a_{1,1} = 1, a_{1,j} = 0, a_{i,1} = 0$  pentru  $i, j > 1$  și  $a_{i,j} = -1$  pentru  $i, j > 1$  (vezi figura 181). Faptul că aceste tablouri sînt liniar independente, veți demonstra ușor singuri. Rezolvarea este terminată,

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$A_{k,1}$

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$A_{1,p}$

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{array}$$

$A_{1,1}$

Fig. 181

**M 113.** Să se demonstreze că pentru orice număr natural  $n$  se găsește un număr format numai din cifrele 1 și 2 care se divide prin  $2^n$ .

B.M. Ivlev

Vom demonstra că numere diferite formate din  $n$  cifre de 1 și 2, dau la împărțirea prin  $2^n$  resturi diferite.

Într-adevăr, dacă două astfel de numere cu  $n$  cifre  $a_n$  și  $b_n$  dau același rest atunci trebuie să fie sau ambele pare sau ambele impare. Deci ele trebuie să aibă ultimele cifre identice și deci pot fi scrise astfel:  $a_n = 10a_{n-1} + i$ ,  $b_n = 10b_{n-1} + i$ , unde  $i$  este egal cu 1 sau 2 și  $a_{n-1}$  și  $b_{n-1}$  sînt numere cu  $n - 1$  cifre formate din 1 și 2. Pentru că  $a_n - b_n$  se divide prin  $2^n$  rezultă că  $10(a_{n-1} - b_{n-1})$  de asemenea se divide prin  $2^n$  prin urmare  $a_{n-1} - b_{n-1}$  se divide prin  $2^{n-1}$ . Din această relație, se deduce ca mai sus că ultimele cifre ale numerelor  $a_{n-1}$  și  $b_{n-1}$  coincid.

Repetînd acest raționament, ne convingem că toate cifrele numerelor  $a_n$  și  $b_n$  coincid, adică am demonstrat că dacă două numere  $a_n$  și  $b_n$  dau resturi egale la împărțirea prin  $2^n$ , atunci ele coincid. De aceea rezultă că numerele diferite cu  $n$  cifre formate din 1 și 2 dau resturi diferite la împărțirea prin  $2^n$ . Dar și aceste numere și resturile diferite sînt exact în număr de  $2^n$ , deci unul dintre aceste numere dă ca rest la împărțire pe zero, adică el se divide la  $2^n$ .

**M 114.** Pe o circumferință sînt scrise cîteva numere. Dacă pentru anumite patru numere la rînd  $a, b, c, d$  se verifică inegalitatea

$$(a - d)(b - c) < 0$$

atunci numerele  $b$  și  $c$  pot să-și schimbe locurile. Să se demonstreze că această operație poate fi făcută numai de un număr finit de ori.

V.B. Alekseev

Presupunem că pe circumferință sînt aranjate numerele  $x_1, x_2, \dots, x_n$   $x_1$  și  $x_2$  vecini,  $x_2$  și  $x_3$  vecini, ...,  $x_n$  și  $x_1$  vecini (vezi fig. 182). Considerăm suma produselor perechilor de numere vecine:

$$x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n + x_nx_1. \quad (1)$$

Vom demonstra că dacă anumite două numere  $x_i$  și  $x_{i+1}$  ( $x_{n+1} = x_1$ ) pot să se permute, atunci după permutarea lor, suma (1) se mărește. Într-adevăr, dacă  $x_i$  și  $x_{i+1}$  se pot permuta, atunci  $(x_{i-1} - x_{i+2})(x_i - x_{i+1}) < 0$ , dar această inegalitate poate fi scrisă astfel:

$$x_{i-1}x_i + x_ix_{i+1} + x_{i+1}x_{i+2} < x_{i-1}x_{i+1} + x_{i+1}x_i + x_ix_{i+2}.$$

Dar în total există un număr finit de permutări ale numerelor  $x_1, x_2, \dots, x_n$  pe cerc de aceea și suma (1) poate să aibă numai un număr finit de valori. Prin urmare, operația noastră se poate face numai de un număr finit de ori: în caz contrar am obține un șir infinit de valori pentru suma

$$(1) : s_1 < s_2 < s_3 < \dots$$

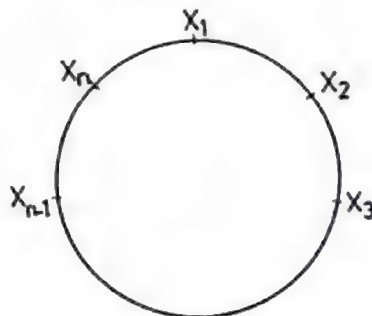


Fig. 182



**M 115.** În trei vase s-a turnat câte un număr întreg de litri de apă. Se hotărăște ca în oricare vas să se toarne din oricare celelalte vase atâta apă cîtă conține el. Să se demonstreze că după cîteva astfel de turnări se poate goli complet unul dintre vase. (Vasele sînt suficient de mari; fiecare poate să conțină toată cantitatea de apă.)

G.A. Galperin

Să presupunem că în primul vas sînt  $a$  litri de apă, în al doilea  $b$  litri, în al treilea  $c$  litri și  $a \leq b \leq c$ .

Vom lămuri întii cazul cînd  $a = 1$ . Dacă turnăm apă numai în primul vas, atunci la prima turnare mai punem 1 litru, la a doua 2 litri, la a treia 4 litri, la a  $i$ -a turnare  $2^{i-1}$  litri.

Împărțim acum, desigur numai mintal, apa din al doilea vas în porții:  $2^0, 2^1, \dots, 2^k$ , unde  $i_0 < i_1 < i_2 < \dots < i_{k-1} < i_k$ . (Pentru aceasta vom găsi un  $i_k$  astfel încît  $2^{i_k} \leq b$  și  $2^{i_k+1} > b$ , atunci  $b = 2^{i_k} + b_1$  unde  $b_1 < 2^{i_k}$ ; pentru el la rîndul său vom găsi  $2^{i_{k-1}}$  ș.a.m.d.)

Dacă  $i_0 = 0, i_1 = 1, i_2 = 2, \dots, i_k = k$ , atunci al treilea vas nu ne mai trebuie. Începem să turnăm din al doilea vas în primul. După prima turnare, în primul vas vor fi doi litri, iar într-al doilea  $2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^k$  litri; după a doua, în primul vas  $2^2$  litri, iar în al doilea  $2^2 + \dots + 2^k$ ; după a treia, respectiv  $2^3$  și  $2^3 + 2^4 + \dots + 2^k$ , după a  $k - a$  turnare în primul vas vor fi  $2^k$  în al doilea  $2^k$  iar după a  $(k + 1) - a$ , în primul vas  $2^{k+1}$ , iar în al doilea 0.

Dacă unele puteri ale lui 2 mai mici decît  $2^{i_k}$  lipsesc dintre „porții” atunci aceste porții le luăm din vasul al treilea (în el este destulă apă ca să se poată face acest lucru doar știm că  $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{i_k-1} = 2^{i_k} - 1$  litri de apă sînt mai puțini decît  $b$  litri care sînt mai puțini decît  $c$  litri).

Vom proceda atunci în felul următor: la fiecare turnare vom folosi acel vas în care se găsește respectiva porție. După a  $i_k + 1$  turnare, al doilea vas se golește.

Cazul general ( $a \neq 1$ ) de fapt nu e mai greu decît acesta. Scriem pe  $b$  și  $c$  astfel:  $b = b_1 a + b_2, c = c_1 a + c_2$ , unde  $b_1, b_2, c_1, c_2$  sînt numere naturale și  $b_2 < a, c_2 < a$  (această reprezentare este unică). Acum, dacă nu ținem cont momentan de cantitățile „în plus”  $b_2$  și  $c_2$  și luăm pe  $a$  ca unitate de măsură, întrucît  $b_1 \leq c_1$ , ca și în cazul precedent putem proceda astfel: să golim din vasul al doilea  $b_1 a$  litri. După această în el au rămas  $b_2$  litri, iar numărul  $b_2$  este mai mic decît  $a$ . Astfel vom reuși ca din vasele cu conținut în litri de apă  $a \leq b \leq c$ , să trecem la vase cu conținut  $a' \leq b' \leq c'$  litri și  $a > a'$ . Repetăm procedura și vom obține vase cu o cantitate tot mai mică de litri  $a > a' > a'' \dots$ . Întrucît toate aceste cantități se exprimă printr-un număr întreg, rezultă că după un număr finit de pași, vom obține un vas gol.

Facem observația că această problemă a apărut într-una dintre lucrările cunoscutului algebrist sovietic A.I. Șiršov. Ea i-a servit să construiască o teorie matematică serioasă. Nu e singura problemă dată la Olimpiadă, luată din lucrări matematice remarcabile.

L.G. Limanov

**M 116.** Să se demonstreze că dacă se unesc mijloacele laturilor consecutive ale unui poligon cu  $n$  laturi convex  $M$ , atunci poligonul obținut are proprietățile:

a) perimetrul său este mai mare sau egal cu jumătatea perimetrului lui  $M$  ( $n \geq 3$ ).

b) aria sa este mai mare sau egală decît jumătatea ariei lui  $M$  ( $n \geq 4$ ).

G.A. Galperin

Fie  $A_1A_2 \dots A_n$  poligonul dat  $M$ ,  $B_k$  mijlocul laturei  $A_{k-1}A_k$  (aici și mai jos,  $k=1, 2, \dots, n$ , și se subînțelege că  $A_{n+1}=A_1$ ,  $A_0=A_n$  ș.a.m.d.),  $S$  și  $S'$  ariile,  $P$  și  $P'$  perimetrele poligoanelor  $A_1A_2 \dots A_n$  și  $B_1B_2 \dots B_n$   $n \geq 4$ .

Observăm că diagonală  $A_{k-1}A_{k+1}$  taie din poligon triunghiul  $A_{k-1}A_kA_{k+1}$  în care  $B_kB_{k+1}$  este linie mijlocie (fig. 184) de aceea:

$$a) A_{k-1}A_{k+1} = 2B_kB_{k+1};$$

$$b) S(\triangle A_{k-1}A_kA_{k+1}) = 4S(\triangle B_kA_kB_{k+1}).$$

Este clar că dintre toate diagonalele  $A_{j-1}A_{j+1}$  (unde  $j=1, 2, \dots, n$ ;  $j \neq k$ ), triunghiul dat  $A_{k-1}A_kA_{k+1}$  este intersectat numai de două:  $A_{k-2}A_k$  și  $A_kA_{k+2}$  și punctele de intersecție  $C_k, C_{k+1}$  ale acestor diagonale cu  $A_{k-1}A_{k+1}$  sînt dispuse în așa ordine încît segmentele  $A_{k-1}C_k$  și  $C_{k+1}A_{k+1}$  (și prin urmare și triunghiurile  $A_{k-1}A_kC_k$  și  $C_{k+1}A_kA_{k+1}$ ) nu se suprapun unul cu celălalt (fig. 185). Atunci afirmația problemei se demonstrează astfel: (suma  $\Sigma$  se ia după toate valorile lui  $k$ ):

$$a) 2P' = 2\Sigma B_kB_{k+1} = \Sigma A_{k-1}A_{k+1} > \Sigma A_{k-1}C_k + \Sigma C_{k+1}A_{k+1} = \Sigma (A_{k-1}C_k + C_kA_k) > \Sigma A_{k-1}A_k = P,$$

(inegalitatea triunghiului pentru  $\triangle C_kA_{k-1}A_k$ ), de unde  $P' > P/2$ ;

b)  $4(S - S') = 4\Sigma S(\triangle B_kA_kB_{k+1}) = \Sigma S(\triangle A_{k-1}A_kA_{k+1}) \leq 2S$  (întrucît triunghiurile  $A_{k-1}A_kA_{k+1}$  nu acoperă nicăieri poligonul cu mai mult de două straturi) de unde  $S' \geq S/2$ ; egalitatea se atinge aici pentru  $n=4$  (în cazul a) numai pentru  $n=3$ ).

Astfel s-a demonstrat că rapoartele  $P'/P$  și  $S'/S$  (respectiv pentru  $n \geq 3$  și  $n \geq 4$ ) sînt cuprinse între limitele  $1/2$  și  $1$ . Apare următoarea întrebare naturală: se pot micșora aceste limite cel puțin pentru unele valori ale lui  $n$  sau rapoartele  $P'/P$  și  $S'/S$  iau (pentru  $n > 3$  și  $n > 4$ ) toate valorile cuprinse între  $1/2$  și  $1$ ?

Iată cîteva indicații de rezolvare a acestei probleme.

Raportul perimetrelor  $P'/P$  poate lua pentru  $n > 3$  orice valoare cuprinsă în intervalul  $(1/2, 1)$ . Nu vom demonstra riguros acest lucru ci ne vom mărgini să descriem exemple pentru cazurile în care acest raport se apropie de  $1/2$  și de  $1$ . Dacă poligonul  $A_1A_2 \dots A_n$  „degenerează într-un segment” astfel încît două vîrfuri vecine, să zicem  $A_1$  și  $A_2$  se apropie de un capăt al segmentului și celelalte de celălalt, atunci raportul  $P'/P$  se apropie de  $1$ ; dacă poligonul „degenerează într-un segment” astfel încît  $A_1$  și  $A_2$  vor fi capetele acestui segment, iar celelalte vîrfuri se apropie de mijlocul segmentului, atunci  $P'/P$  se apropie de  $1/2$ .

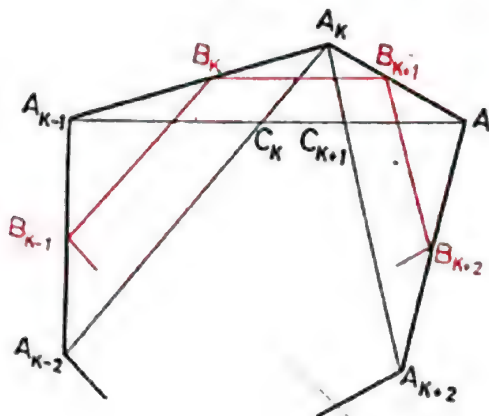


Fig. 184

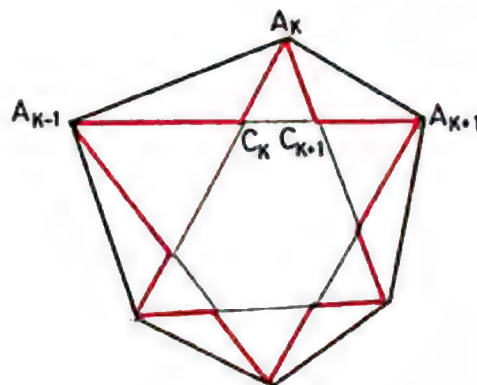


Fig. 185



Raportul ariilor  $S'/S$  pentru fiecare  $n > 4$  poate fi oricât de apropiat de  $1/2$ : este suficient să ne închipuim că poligonul „degenerează într-un triunghi” astfel încât  $A_1$  și  $A_2$  să fie vîrfuri ale triunghiului și toate celelalte vîrfuri ale poligonului să se apropie de al treilea vîrf al triunghiului. Pentru fiecare  $n > 5$ , raportul poate să se apropie de 1, dacă poligonul „degenerează într-un triunghi” astfel încît  $A_1$  și  $A_2$  să se apropie de un vîrf,  $A_3$  și  $A_4$  de altul și toate celelalte (care sînt cel puțin două) de al treilea. Dar pentru  $n = 5$  apropierea de 1 nu se poate realiza. Într-adevăr, așa cum puteți demonstra, pentru pentagon  $S'/S \leq 3/4$ .

N.B. Vasiliev

**M 117.** *Cîțiva oameni au urmărit în cursul a  $t$  minute un melc. Fiecare l-a observat exact timp de 1 minut și a văzut că în acest minut melcul a parcurs exact 1 metru. N-a fost nici un moment în care melcul să nu fi fost urmărit. Care este drumul maxim și care e cel minim pe care melcul l-ar fi putut parcurge după aceste  $t$  minute?*

*Încercați să rezolvați această problemă la început pentru valori mici ale lui  $t$ , de exemplu, pentru  $t = 2,5$ .*

N.N. Constantinov

Această problemă a apărut din greșala unui student de la facultatea de matematică. Odată a folosit următoarea leamnă, considerînd-o evidentă: dacă pe segmentul  $[a, b]$  este dată o funcție  $\varphi(x)$ , acest segment este acoperit de un număr finit de segmente și pe fiecare segment al sistemului variația funcției nu depășește lungimea sa, atunci variația funcției pe întregul segment  $[a, b]$  nu depășește  $b - a$ . (Variația funcției, în cazul nostru, este diferența dintre cea mai mare și cea mai mică valoare luată de funcție pe segmentul respectiv.)

Dacă această leamnă ar fi adevărată ar rezulta că melcul nostru nu ar putea parcurge mai mult de  $t$  metri. Într-adevăr, așezăm timpul  $x$  pe axa de variație a argumentului și considerăm pe segmentul  $0 \leq x \leq t$  funcția  $\varphi(x)$  care se definește ca lungimea drumului parcurs de melc în timpul  $x$ . Timpul de observație al unui om se reprezintă pe axa  $Ox$  ca un segment de lungime 1. Întregul segment  $[0, t]$  este acoperit cu astfel de segmente, pentru că melcul nu a rămas neobservat nici un moment. Atunci, după leamnă, drumul parcurs de melc nu ar depăși (numeric) timpul. Această rezolvare greșită s-a primit de la mai mulți rezolvitori, ba unii au considerat că viteza melcului este constantă de 1 m/min și deci a parcurs în  $t$  minute,  $t$  metri. Dar problema constă chiar în aceea că nici lema nu e adevărată nici afirmația privind viteza constantă. De fapt în această contradicție aparentă a bunului simț, constă atractivitatea problemei. Cînd s-a stabilit că această leamnă nu e adevărată, la ipoteza ei s-a mai adăugat pentru precizare că segmentele de observație au toate aceeași lungime și s-a propus această problemă la elevii de clasa a VIII-a la olimpiada matematică din Moscova în anul 1960.

Prima dificultate în această problemă este să se înțeleagă faptul că ipotezele problemei nu contrazic situația ca melcul să nu parcurgă  $t$  metri. Graficul din figura 186 arată cum trebuie să meargă melcul și cum trebuie dispuse intervalele de observație pentru ca în 2,5 min melcul să parcurgă 4 metri.

Cu ajutorul figurii se poate stabili că e posibilă o astfel de aranjare a observatorilor și o astfel de mișcare a melcului, încît după  $t$  minute (cu condiția că  $t > 1$ ) melcul să parcurgă  $2(t - 1)$  m dacă  $t$  este întreg și  $2[t]$  dacă  $t$  nu e întreg.

A doua greutate a problemei constă în a arăta că acestea reprezintă deplasările maxime ale melcului.

Fie  $a_1$  primul observator. Să considerăm toți observatorii care au început să urmărească melcul, fie chiar în momentul în care a terminat  $a_1$ , fie ceva mai devreme (după ipoteză, astfel de observatori sînt). Fie  $a_2$  ultimul dintre acești observatori. Vom considera mai departe observatorii care au început să urmărească melcul nu mai tîrziu de cînd a încetat  $a_2$  și notăm prin  $a_3$  pe ultimul dintre aceștia. Analog alegem observatorul  $a_4$  ș.a.m.d. Evident că la sfîrșit ajungem la observatorul care își termină observația la sfîrșitul ultimului minut (dacă observatorul  $a_k$  a încetat mai devreme, înseamnă că există un observator

$a_{k+1}$  care a început mai tîrziu decît  $a_k$ ). Fie  $a_1, a_2, \dots, a_k$  toți observatorii astfel aleși. Este clar că observatorii intermediari  $a_1, a_3, a_5$  nu-și intersectează intervalele de observație; la fel, nu se vor intersecta intervalele de observație ale observatorilor  $a_2, a_4, a_6, \dots$ . Într-adevăr, dacă există un moment în care observă deodată  $a_1$  și  $a_3$  înseamnă că  $a_2$  nu a fost bine ales căci ar însemna ca  $a_3$  să înceapă să observe mai tîrziu decît a început  $a_2$ , dar mai înainte de a termina  $a_1$ . Astfel că, întrucît intervalele de observație  $a_1, a_3, a_5, \dots$ , nu se intersectează, rezultă că în  $t$  minute este un număr de mai puțin de  $t$  observatori. De aceea, dacă  $t$  este întreg, ei nu sînt mai mulți de  $t - 1$ , iar dacă  $t$  nu este întreg nu sînt mai mulți de  $[t]$ . De aceeași numere este mărginit numărul observatorilor „din grupa cu soț”  $a_2, a_4, a_6, \dots$ .

Melcul nu poate merge mai mult decît suma acestor deplasări, stabilite de toți observatorii. Dar în condițiile problemei numărul observatorilor nu e limitat de nimic. Acum din mulțimea tuturor observatorilor, alegem o astfel de submulțime care de asemenea să acopere întregul interval de observație și aceasta este mărginită de un anumit număr ( $2(t - 1)$  dacă  $t$  este întreg și  $2[t]$  dacă  $t$  nu e întreg). Acest număr este chiar drumul maxim posibil al melcului.

A treia parte a problemei constă în a se stabili care va fi drumul minim al melcului. Pentru acesta vom considera toți observatorii „impari”

$a_1, a_3, a_5, \dots$ , ca mai sus și vom evalua numărul minim al lor. Dacă toate intervalele dintre doi observatori impari vecini sînt mai mici decît 1, atunci numărul observatorilor impari trebuie să fie mai mare decît  $\left\lceil \frac{t}{2} \right\rceil$ . Aceasta înseamnă că melcul nu ar putea parcurge un drum mai mic decît  $\left\lceil \frac{t}{2} \right\rceil + 1$ . Acesta este răspunsul la a doua întrebare a problemei. Pe graficul din fig. 187 se arată cum trebuie să se miște melcul pentru ca acest minim să fie atins.

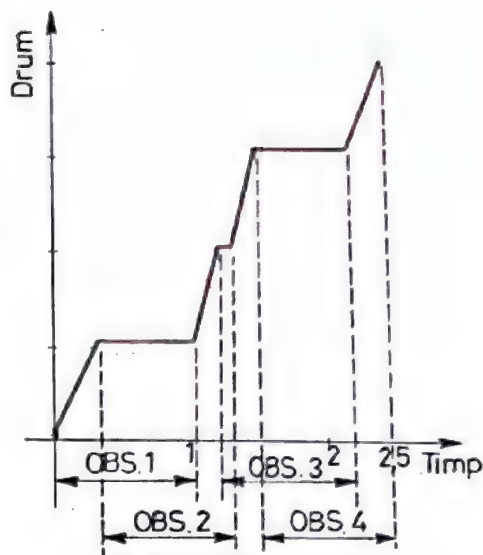


Fig. 186

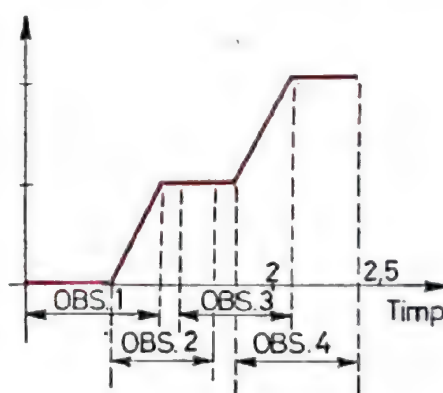


Fig. 187



*Problemă. Încercați acum să formulați corect lema din prima parte a textului rezolvării.*

N.N. Constantinov

**M 118.** Pe cele patru laturi ale unei table de șah de dimensiuni  $n \times n$  se construiește un chenar în lățime de două pătrățele. Să se demonstreze că acest chenar poate fi parcurs de un cal de șah, trecând prin fiecare câmp o dată și numai o dată, atunci și numai atunci când  $n - 1$  este multiplu de 4.

Iu. I. Sorkin și Iu. Iu. Sorkin

Pentru rezolvarea acestei probleme este suficient să arătăm că un chenar de lățime 2 pentru  $n = 4t + 1$  poate fi parcurs de cal și pentru  $n \neq 4t + 1$  nu poate fi parcurs.

Demonstrația primei părți a acestei afirmații este suficient de vizibilă.

Pe figura 188 se arată cum se înconjură chenarul pentru  $t = 0$  ( $n = 1$ ). Așezind apoi succesiv, câte patru blocuri  $2 \times 4$  ca cele reprezentate în figura 189 se poate obține parcursul cerut pentru orice  $t$  (pentru  $t = 1$  este dat în figura 190).

Pentru demonstrația părții a doua a afirmației, mai grele, ne este utilă următoarea leamnă adevărată pentru orice mulțime finită de câmpuri pe o tablă de șah infinită.

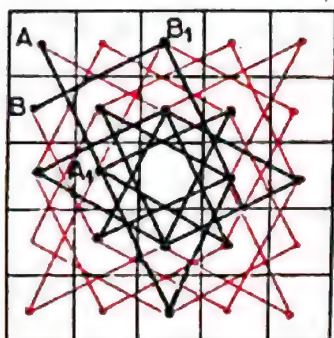


Fig. 188. Cu negru sînt desenate segmentele care arată din fiecare câmp unde ar putea ajunge calul dintr-o mișcare. Linia roșie arată drumul de la A la B care parcurge toate câmpurile o singură dată. (Observăm că dacă în locul segmentului  $A_1B_1$  includem în drum segmentele  $AA_1$  și  $BB_1$ , atunci el se împarte în două drumuri închise.)

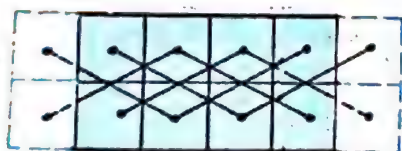


Fig. 189

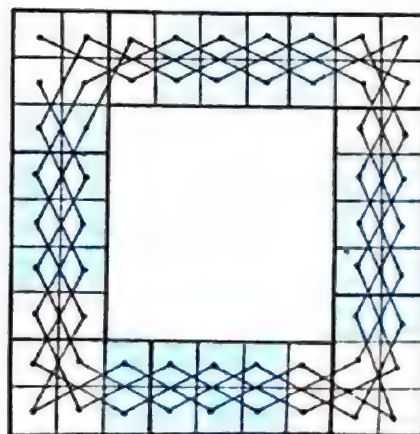


Fig. 190. Blocurile de încadrare sînt desenate cu albastru.

**L e m ă.** Dacă în mulțimea  $G$  formată din  $g$  câmpuri, se pot determina  $k$  submulțimi  $A_1, A_2, \dots, A_k$  care conțin  $m$  câmpuri și

- 1) aceste submulțimi nu au câmpuri comune;
  - 2) de pe nici un câmp al mulțimii  $A_i$  calul nu poate trece pe un câmp al mulțimii  $A_j$  pentru  $i \neq j$ ;
  - 3)  $g - m < k - 1$ ,
- atunci mulțimea  $G$  nu poate fi parcursă prin mișcarea calului.

Demonstrația lemei este destul de evidentă. Într-adevăr, dacă reușește calul să parcurgă toată mulțimea  $G$  atunci pe parcurs el trebuie să parcurgă toate cele  $k$  submulțimi. Dar în acest caz, datorită condiției 2) din lema la trecerea de la o submulțime la alta, calul trebuie ca de cel puțin  $k - 1$  ori să iasă din aceste mulțimi, dar în afara lor, după ipoteza 3) a lemei nu se găsesc altfel de cîmpuri. Lema e demonstrată.

Să considerăm trei cazuri: 1)  $n = 4t$ ; 2)  $n = 4t + 2$  și 3)  $n = 4t + 3$ .

Începem cu cazul 3) care este cel mai ușor, cînd  $n = 4t + 3$ . Vom împărți fiecare chenar în două submulțimi  $A_1$  și  $A_2$ , așa cum se arată în figura 191. (Aici  $t = 0$ , pentru ca să obținem desenul pentru alți  $t$  trebuie să încadrăm cu blocuri din cele desenate în figura 189.)

Se vede ușor că din mulțimea  $A_1$  nu se poate trece în mulțimea  $A_2$  prin mîșcarea calului. De aceea se poate aplica lema ( $k = 2$ ,  $m = g$ ).

În celelalte cazuri,  $n = 4t$  și  $n = 4t + 2$ , greutatea principală constă în a descrie cîmpurile care nu intră nici într-o submulțime.

Cazul 1) ( $n = 4t$ ). Pentru  $t > 0$ , cîmpuri neutre vor fi cele care au cîte o latură comună cu cîmpurile din colțurile tablei căruia i se pune chenar. (În fig. 192 acestea sînt notate prin litera Z.) Ele vor fi 8. Submulțimile, care vor fi în număr de 10, se determină în felul următor: vom lua un cîmp neocupat și toate cîmpurile în care se poate ajunge din el cu calul nefolosind cîmpurile neutre. Toate aceste cîmpuri formează o submulțime. Pentru ca din figura 192 să obținem desenul pentru orice  $t > 0$ , trebuie puse blocurile din figura 189. Pentru  $t = 0$  cîmpurile neutre și submulțimile sînt arătate în figura 193.

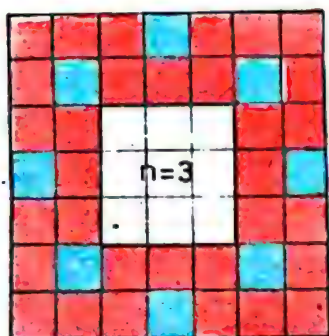


Fig. 191. Pătrățelele roșii sînt în mulțimea  $A_1$ , celelalte în  $A_2$

1	9	10	5	6	9	10	2
10	5	Z	9	10	Z	6	9
9	Z					Z	10
5	10					9	6
8	9					10	7
10	Z					Z	9
9	8	Z	10	9	Z	7	10
4	10	9	8	7	10	9	3

Fig. 192

Cazul 2) ( $n = 4t + 2$ ) se analizează analog. Aici, pentru  $t > 0$  numărul cîmpurilor neutre este 12, iar numărul submulțimilor este 14. Cum se aleg cîmpurile neutre pentru  $t > 0$  și  $t = 0$  se vede din figurile 194 și 195.

Problema M118 este un caz particular al următoarei probleme: se dă un „graf” (un sistem de „virfur” unele dintre ele fiind „unite cu muchii”); trebuie să se găsească un drum care să parcurgă virfurile, trecînd prin ele cîte o dată — așa-numitele drumuri hamiltoniene.

Facem observația că în general această problemă nu e rezolvată — nu s-a găsit un algoritm simplu care să permită ca pentru orice graf să se găsească drumurile hamiltoniene și nici să se afirme dacă există un astfel de drum. Problema asemănătoare acesteia, de a găsi un drum care să parcurgă cîte o dată toate muchiile este mult mai simplă.

Iu. Iu. Sorkin



1	5	6	2
6	2	2	5
5	2	2	6
4	6	5	3

$n=0$

Fig. 193

1	9	10	2	3	9
10	2	2	9	10	4
9	2			9	2
2	10			2	10
7	9	10	2	5	9
10	8	2	9	10	6

Fig. 195

1	7	8	9	11	7	8	2	3	7
8	9	2	7	8	9	2	7	8	4
7	2							7	2
9	8							2	8
14	7							10	7
8	9							8	12
7	2							7	10
2	8							2	8
5	7	8	2	10	7	8	2	10	7
8	6	2	7	8	13	10	7	8	2

Fig. 194

**M 119.** Să se demonstreze că dacă în fiecare față a unui poliedru convex se alege câte un punct și se duce din acest punct un vector, perpendicular pe față, îndreptat în spre exterior și de lungime numeric egală cu aria acestei fețe, atunci suma tuturor acestor vectori va fi nulă.

N.B. Vasiliev

O rezolvare surprinzătoare și scurtă poate fi obținută prin considerente fizice. Să ne închipuim că un vas închis al cărui interior are forma poliedrului nostru este umplut cu gaz sub presiunea  $P$  și este așezat în vid (forțele exterioare, greutatea și altele lipsesc). Atunci forța de presiune a gazului pe o față de arie  $S$  este egală cu  $PS$  și este îndreptată perpendicular pe această față pe partea exterioară (cum se spune „după normala exterioară”). Se poate lua  $P = 1$ ; atunci forțele care acționează asupra fețelor vor fi egale cu vectorii de care este vorba în problemă. Pentru că vasul nu se deplasează cu o anumită accelerație sub acțiunea acestor forțe interioare, rezultă că suma acestor forțe, adică suma vectorilor este nulă.

Vom da și o demonstrație pur matematică (nu vom analiza acum în amănunt interesanta chestiune în ce măsură raționamentul făcut mai sus poate fi considerat „demonstrație riguroasă”. Remarcăm că toate noțiunile și legile fizice folosite ar putea fi transpuse în cadrul unei teorii „deductive” matematice; noțiunile ar primi o definiție corectă, legile o demonstrație riguroasă, iar faptele experimentale s-ar considera ca niște confirmări ale utilității definițiilor și teoremelor, dar în cursul școlar de fizică — și nu numai în cel școlar — o astfel de abordare nu este obișnuită. Pentru ca să se realizeze o astfel de „formalizare” a cursului de fizică, cursul școlar de matematică este insuficient. Însă pentru rezolvarea problemei noastre ne ajunge cursul școlar de matematică).

Ne este utilă următoarea leamnă (demonstrația sa o vom da la sfârșitul rezolvării): dacă un poligon are aria  $S$  și planul său face cu un anumit alt plan unghiul  $\alpha$  ( $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ ), atunci aria proiecției acestui poligon pe plan este egală cu  $S \cdot \cos \alpha$ .

Vom lua o axă arbitrară (dreaptă orientată)  $l$  și un plan  $\pi$  perpendicular pe ea. Proiectăm toate fețele poligonului nostru pe planul  $\pi$ , și vectorii lor

corespunzători pe axa  $l$ . Dacă aria uneia dintre fețe este egală cu  $S$  și unghiul format de „normala exterioară” cu axa  $l$  este  $\alpha$ , atunci proiecția vectorului pe axa  $l$  (cu considerarea semnului) este  $S \cdot \cos \alpha$ , iar aria proiecției feței pe planul  $\pi$  este  $|S \cos \alpha|$ . Am scris semnul de modul pentru că unghiul  $\alpha$  poate să nu fie unghi ascuțit (fig. 196, a; fețele pentru care  $\cos \alpha \geq 0$  le numim superioare) ci și obtuze (fig. 196, b; fețele pentru care  $\cos \alpha < 0$  le numim inferioare).

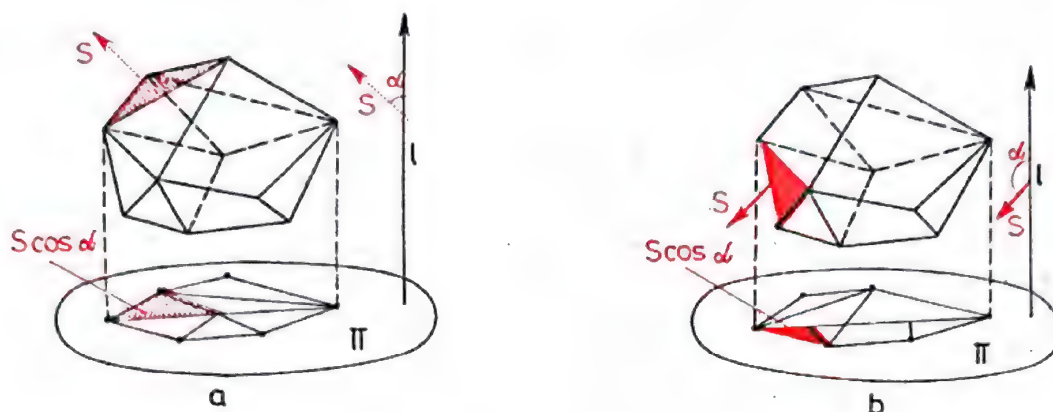


Fig. 196 a) fețele superioare:  $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ ; b) fețele inferioare:  $90^\circ < \alpha \leq 180^\circ$

Să considerăm acum poligonul în care s-a proiectat pe planul poliedrul nostru. Acest poligon, așa cum se vede din figura 196, a și b poate să fie format din proiecțiile tuturor fețelor superioare sau poate fi format din proiecțiile tuturor fețelor inferioare. (Aici am folosit faptul că poliedrul este convex, de aceea pe fiecare dreaptă paralelă cu axa  $l$  și care intersectează poliedrul se găsesc două puncte, unul aparținând fețelor superioare și celălalt celor inferioare.) De aceea dacă separăm în numerele  $S \cdot \cos \alpha$  pe cele pozitive de cele negative, suma unora și a celorlalte în modul trebuie să fie egale. Prin urmare suma tuturor numerelor  $S \cdot \cos \alpha$  corespunzătoare tuturor fețelor este 0. Astfel suma proiecțiilor vectorilor pe axa  $l$  ca și însăși proiecția sumei lor pe axa  $l$  este egală cu 0. Dar axa  $l$  a fost aleasă arbitrar prin urmare suma vectorilor este nulă.

**Demonstrația lemei.** Dacă  $\alpha = 0^\circ$  sau  $\alpha = 90^\circ$  este evident. În celelalte cazuri poligonul poate fi descompus în trapeze și triunghiuri ale căror baze să fie paralele cu planul  $\pi$  (pentru aceasta este suficient să se ducă plane paralele cu  $\pi$  prin toate vîrfurile poligonului). Pentru aceste trapeze și triunghiuri afirmația lemei este evidentă, întrucît prin proiecție bazele lor nu se modifică iar înălțimile se înmulțesc cu  $\cos \alpha$ .

Remarcăm în încheiere că afirmația este adevărată și pentru poliedre neconvexe.

**M 120.** Într-o anumită mulțime s-a introdus operația  $*$  care pune în corespondență, oricăror două elemente  $a$  și  $b$  ale acestei mulțimi, elementul  $a * b$  din această mulțime. Se știe că

1) pentru orice trei elemente  $a, b$  și  $c$  avem

$$a * (b * c) = b * (c * a);$$

2) dacă  $a * b = b * c$ , atunci  $b = c$ ;

3) dacă  $a * c = b * c$ , atunci  $a = b$ .



Să se demonstreze că operația  $*$  este:

a) comutativă, adică pentru orice două elemente  $a$  și  $b$

$$a * b = b * a;$$

b) asociativă, adică pentru orice trei elemente  $a, b$  și  $c$

$$(a * b) * c = a * (b * c)$$

S.A. Ianovskaia

Din condițiile 1 și 2 rezultă comutativitatea: înlocuind în 1,  $a$  în locul lui  $b$ , vom obține, pentru orice  $a$  și  $c$

$$a * (a * c) = a * (c * a),$$

iar de aici rezultă, conform lui 2, că  $a * c = c * a$ .

Din condiția 1 și din comutativitate rezultă asociativitatea: pentru orice  $a, b$  și  $c$  conform lui 1,

$$a * (b * c) = b * (c * a) = c * (a * b)$$

și, folosind comutativitatea, obținem

$$a * (b * c) = c * (a * b) = (a * b) * c.$$

Problema e rezolvată. Condiția 3, așa cum au observat mulți cititori, este în plus. Desigur că se poate înlocui în locul lui 2 dacă condiția 1 este îndeplinită, fiecare dintre condițiile 2 și 3 rezultă din cealaltă.

Am văzut că din 1 și din comutativitate rezultă asociativitatea. Desigur că, dacă operația  $*$  este comutativă și asociativă pentru ea, 1 este adevărată. Dar din asociativitate și din condiția 1, nu rezultă comutativitatea (adică fără 2 sau 3 nu se poate demonstra comutativitatea). Dăm un exemplu care confirmă aceasta: presupunem că mulțimea este formată din patru elemente 0, 1, 2, 3 și operația  $*$  este definită astfel  $1 * 2 = 3$ , și pentru toate celelalte perechi de elemente  $a * b = 0$  (în particular  $2 * 1 = 0$ ); în acest exemplu  $(a * b) * c = a * (b * c) = 0$  pentru orice trei elemente  $a, b$  și  $c$ . Iată și un exemplu care arată că numai din condiția 1 nu rezultă asociativitatea. În mulțimea formată din trei elemente 0, 1, 2 operația  $*$  este definită astfel  $1 * 2 = 1$  și  $a * b = 0$  pentru toate perechile  $a$  și  $b$ . Atunci  $a * (b * c) = 0$  pentru orice trei elemente  $a, b$  și  $c$ , dar  $(1 * 2) * 2 = 1$ .

**M 121.** Să se demonstreze că pentru orice  $n$  numere reale  $a_1, a_2, \dots, a_n$  se găsește un număr natural  $k \leq n$ , astfel încât fiecare dintre cele  $k$  numere

$$a_k, \frac{a_{k-1} + a_k}{2}, \frac{a_{k-2} + a_{k-1} + a_k}{3}, \dots, \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_k}{k}$$

nu depășește pe  $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$ .

Presupunem că nu este așa. Atunci există astfel de numere reale  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , încât pentru orice  $k (1 < k \leq n)$  se găsește un  $j (0 \leq j < k)$ , astfel încât  $\frac{a_{j+1} + a_{j+2} + \dots + a_k}{k-j}$  este mai mare decât  $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = A$ .

În particular, pentru  $k = n$  se găsește  $j = n_1$ , astfel încât media aritmetică a numerelor de la  $a_{n_1+1}$  până la  $a_n$  este mai mare decât  $A$ . Vom lua acum  $k = n_1$  pentru el se găsește  $j = n_2 (0 \leq n_2 < n_1)$ , astfel încât media aritmetică a numerelor de la  $a_{n_2+1}$  până la  $a_{n_1}$  să fie mai mare decât  $A$ ; dacă  $n_2 > 0$ , atunci vom lua  $k = n_2$  și găsim pentru el  $j = n_3 \dots$  ș.a.m.d. pînă cînd un

anumit  $n_{r+1}$  va fi nul adică media aritmetică respectivă se va lua de la  $a_1$  pînă la  $a_r$  (vezi schema de mai jos).

$a_1 \qquad a_{n_r} \qquad a_{n_3} \qquad a_{n_2} \qquad a_{n_1} \qquad a_n$



Dar dacă media aritmetică în fiecare grupă este mai mare decît  $A$ , atunci și media aritmetică a tuturor numerelor este mai mare decît  $A$  (într-adevăr, dacă suma numerelor în prima grupă este mai mare decît  $(n - n_1)A$ , în a doua mai mare decît  $(n_1 - n_2)A$ ... în ultima mai mare decît  $n_r A$ , atunci suma tuturor numerelor este mai mare decît  $nA$ ). Dar prin  $A$  am notat media aritmetică a tuturor numerelor. Contradicția obținută demonstrează că presupunerea noastră nu este adevărată.

Se poate da și o altă rezolvare. De exemplu, este util să scădem din fiecare dintre numerele date, mărimea  $A$  (media lor aritmetică). Atunci problema se reduce la un caz particular în care media aritmetică a tuturor numerelor este egală cu zero. Atunci se pot elimina numitorii și să nu se mai vorbească de medii ci de sumele numerelor cu semnele lor și problema devine o simplă consecință a următoarei probleme: dacă pe un cerc se scriu mai multe numere astfel ca suma lor să fie nulă, atunci se găsește printre ele un număr, astfel încît să nu fie negativ, suma sa cu următorul, în sensul acelor ceasului, să nu fie negativă, suma lui cu următorii doi să nu fie negativă ș.a.m.d., pînă la suma tuturor celor  $n$  numere. Despre această problemă, în altă formulare, a mai fost vorba în M 82.

**M 122.** *Un pentagon  $ABCDE$  este înscris într-un cerc. Se știe că distanțele de la punctul  $E$  la dreptele  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  sînt egale respectiv cu  $p$ ,  $q$ ,  $r$ . Să se găsească distanța de la punctul  $E$  la dreapta  $AD$ .*

Dacă este dat un cerc și pe el două puncte  $P$  și  $Q$ , atunci prin  $s(PQ)$  vom nota sinusul unghiului înscris care cuprinde arcu  $PQ$  (întrucît  $\sin \alpha = \sin(180^\circ - \alpha)$  nu contează care dintre arcele  $PQ$  le considerăm).

Ne sînt utile următoarele două lucruri.

1. Fie  $PQ$  o coardă a cercului de rază  $R$ . Atunci  $PQ = 2Rs(PQ)$ .

2. Dacă  $P$ ,  $Q$  și  $E$  sînt trei puncte diferite ale cercului de rază  $R$  atunci distanța de la punctul  $E$  la dreapta  $PQ$  este egală cu  $2Rs(EP)s(EQ)$ .

Afirmația 1 este binecunoscută (din ea se obține în mod obișnuit „teorema sinusurilor” pentru un triunghi), iar 2 se obține ușor din 1 calculînd în două moduri aria triunghiului  $PQE$ . Dacă  $\alpha$  este unghiul din vîrf  $E$  al acestui triunghi,  $h$  înălțimea dusă din acest vîrf, atunci dublul ariei este egal cu  $h \cdot PQ = EP \cdot EQ \cdot \sin \alpha$ , de unde, ținînd cont că  $EP = 2Rs(EP)$ ,  $EQ = 2Rs(EQ)$ ,  $PQ = 2Rs(PQ) = 2R \sin \alpha$ , obținem  $h = 2Rs(EP)s(EQ)$ .

Acum cerința problemei se rezolvă imediat: după ipoteză

$$p = 2Rs(EA)s(EB),$$

$$q = 2Rs(EB)s(EC),$$

$$r = 2Rs(EC)s(ED),$$

prin urmare distanța de la punctul  $E$  la dreapta  $AD$  este egală cu

$$2Rs(EA)s(ED) = pr/q.$$

Această problemă s-a propus într-una dintre variantele la proba scrisă la examenul de admitere la facultatea de fizică a Universității de Stat din Moscova (ea a fost cea mai dificilă).

N.B. Vasiliev



M 123. Să se găsească toate numerele naturale  $m$ , pentru care

$$1! \cdot 3! \cdot 5! \dots (2m-1)! = \frac{m(m+1)}{2}!$$

(prin  $n!$  se notează produsul  $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n$ ).

V.P. Beșkarev

Soluțiile ecuației sînt numerele 1, 2, 3, 4. Ne convingem ușor de acest lucru prin verificare directă. Să demonstrăm că alte soluții nu sînt. Demonstrația simplă pe care o propunem se bazează pe teorema cunoscută sub numele de „postulatului lui Bertrand”: între numerele  $a$  și  $2a$ , unde  $a > 1$ , se găsește totdeauna cel puțin un număr prim.

Fie  $p$  numărul prim care se găsește între  $2x-1$  și  $2(2x-1)$ . Dacă ar fi îndeplinită inegalitatea

$$2(2x-1) < \frac{x(x+1)}{2},$$

atunci s-ar obține că numărul  $p$  intră în descompunerea în factori primi a membrului drept a ecuației, fiindcă este mai mic decît  $\frac{x(x+1)}{2}$  și în același timp nu poate intra în descompunerea membrului stîng, fiindcă este mai mare decît  $2x-1$ . Dar acest lucru e imposibil, datorită teoremei unicității descompunerii în factori primi. De aceea, în mod obligatoriu

$$2(2x-1) > \frac{x(x+1)}{2}.$$

Din această condiție găsim  $x \leq 6$ . Dar  $x = 5$  și  $x = 6$  nu satisfac ecuația.

V.P. Beșkarev

M 124. Se dă triunghiul  $ABC$ . Să se găsească un punct  $O$  în interiorul său, avînd următoarea proprietate: pentru orice dreaptă care trece prin punctul  $O$  și care intersectează latura  $AB$  în punctul  $K$  și  $BC$  în  $L$ , se verifică egalitatea

$$\frac{AK}{KB} + \frac{CL}{LB} = 1.$$

În general, să se demonstreze că dacă  $p$  și  $q$  sînt două numere pozitive, arbitrare date, atunci în interiorul triunghiului  $ABC$  se poate găsi un punct  $O$  astfel încît pentru orice dreaptă  $KL$  care trece prin acest punct ( $K$  pe  $AB$ ,  $L$  pe  $BC$ ), să existe relația

$$p \frac{AK}{KB} + q \frac{CL}{LB} = 1.$$

G. Noten (elev cl. a X-a)

Această problemă se rezolvă cel mai simplu, folosind noțiunea de centru de greutate. În demonstrație vom folosi următoarea proprietate a centrului de greutate: dacă într-un sistem format din  $n$  corpuri  $p_1, p_2, \dots, p_n$  înlocuim două dintre ele  $p_1$  și  $p_2$  prin corpul  $p = p_1 + p_2$  situat în centrul lor de greutate atunci poziția centrului de greutate al sistemului nu se schimbă.

Să așezăm în vîrfurile  $A, B$  și  $C$  ale triunghiului, trei corpuri  $a, b, c$  de masă unitară. Atunci centrul de greutate este situat la intersecția medianelor. Vom lua acum punctul  $K$ , pe latura  $AB$  astfel încît  $\frac{AK}{KB} \leq 1$ , și-l vom

descompune pe  $b$  în suma a două corpuri de mase  $b_1 = \frac{AK}{KB}$  și  $b_2 = 1 - \frac{AK}{KB}$ . Centrul de greutate al maselor  $a$  și  $b_1$  se găsește în punctul  $K$ . Atunci, dacă  $L$  este centrul de greutate al corpurilor  $c$  și  $b_2$ , avem  $\frac{CL}{LB} = 1 - \frac{AK}{KB}$ , iar centrul de greutate al corpurilor  $a$ ,  $b$  și  $c$  va fi situat după cum decurge din proprietatea de mai sus pe dreapta  $KL$ . De aceea, pentru orice dreaptă care trece prin punctul  $O$  și intersectează laturile  $AB$  și  $BC$ , se verifică egalitatea cerută de problemă.

În mod analog se demonstrează că dacă  $O'$  este centrul de greutate al corpurilor  $a = p$ ,  $b = 1$  și  $c = q$ , atunci pentru orice dreaptă care trece prin punctul  $O'$  și intersectează laturile  $AB$  și  $BC$  ale triunghiului, se va verifica a doua egalitate din textul problemei. Într-adevăr, să luăm pe latura  $AB$  punctul  $K$  pentru care  $\frac{AK}{KB} \leq \frac{1}{p}$  și să ne închipuim corpul  $b$  descompus într-o sumă de două corpuri de mase  $b_1 = p \frac{AK}{KB}$  și  $b_2 = 1 - p \frac{AK}{KB}$ . Atunci, dacă  $L$  este centrul de greutate al corpurilor de mase  $c$  și  $b_2$ , rezultă  $1 - p \frac{AK}{KB} = q \frac{CL}{LB}$  și punctele  $O'$ ,  $K$  și  $L$  sînt situate pe aceeași dreaptă.

Demonstrația este terminată.

L.G. Makarov.

**M 125.** a) Există un șir infinit de numere naturale care să aibă următoarea proprietate:

nici unul dintre aceste numere nu se divide la altul dar printre oricare trei numere se găsesc două a căror sumă se divide la al treilea?

b) Dacă nu, atunci cîte numere pot fi într-o grupare care are această proprietate?

c) Rezolvați această problemă cu o condiție suplimentară: în grupare să se ia numai numere impare.

Iată un exemplu de o astfel de grupare formată din patru numere: 3, 5, 7, 107. Aici, în tripletul 3, 5, 7, suma  $5 + 7$  se divide prin 3, în tripletul 5, 7, 107 suma  $107 + 5$  se divide prin 7; în tripletul 3, 7, 107 suma  $7 + 107$  se divide prin 3, și în sfîrșit în tripletul 3, 5, 107 suma  $3 + 107$  se divide prin 5.

Iu. I. Ionin

Vom rezolva la început punctul c). La cele patru numere date ca exemplu se mai poate adăuga al cincilea număr 10693,  $10693 + 5$  se divide prin 3,  $10693 + 3$  se divide prin 7,  $10693 + 7$  se divide prin 5,  $10693 + 107$  se divide prin 3 și prin 5,  $10693 + 7$  se divide prin 107.

Vom demonstra că din șase numere impare nu se poate face o grupare care să satisfacă cerința problemei. Fie  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$  numere impare astfel încît nici unul dintre ele nu se divide prin altul, dar printre oricare trei dintre ele se găsesc două a căror sumă se divide prin al treilea.

Vom face cîteva observații premergătoare.

1. Dacă  $a, b, c$  sînt trei termeni din șirul nostru cu  $a > b > c$ , atunci  $b + c$  nu se divide prin  $a$ .

Într-adevăr,  $b + c < 2a$  și  $b + c \neq a$  fiindcă  $a$  este număr impar.

2. Dacă  $a, b$  sînt doi termeni ai șirului nostru, cu  $a > b$ , atunci  $a + b$  se divide la toți termenii șirului mai mici decît  $b$ , cu excepția poate a unuia.



Intr-adevăr, dacă  $a + b$  nu s-ar divide la două numere  $c$  și  $d$  mai mici decât  $b$ , atunci  $a + c$  și  $a + d$  se divid prin  $b$ , dar atunci  $c - d$  se divide prin  $b$  ceea ce este imposibil.

3. Dacă  $a, b, c, d$  sînt patru numere ale șirului nostru,  $a + b$  și  $a + c$  se divid la  $d$ , atunci  $b + c$  nu se divide la  $d$ .

Intr-adevăr, fiindcă  $a + b$  și  $a + c$  se divid la  $d$ , atunci  $2a + (b + c)$  se divide la  $d$  în timp ce  $2a$  nu se divide la  $d$  ( $d$  este număr impar și  $a$  nu se divide la  $d$ ).

Fie  $a_1 > a_2 > a_3$  cele trei numere mai mari dintre cele șase  $a_1, a_2, \dots, a_6$ .

Fiecare dintre numerele  $a_1 + a_2, a_1 + a_3, a_2 + a_3$ , conform observației 2, se divide cel puțin la două dintre numerele  $a_4, a_5, a_6$ . În același timp, observația 3 arată că aceste numere nu au printre  $a_4, a_5, a_6$ , divizor comun. Prin urmare, fiecare dintre numerele  $a_1 + a_2, a_1 + a_3, a_2 + a_3$  se divide la două dintre numerele  $a_4, a_5, a_6$  și nu se divide la al treilea.

Fie

$a_1 + a_2$  să se dividă la  $a_4$  și  $a_5$  și să nu se dividă la  $a_6$ ;

$a_1 + a_3$  să se dividă la  $a_4$  și  $a_6$  și să nu se dividă la  $a_5$ ;

$a_2 + a_3$  să se dividă la  $a_5$  și  $a_6$  și să nu se dividă la  $a_4$ .

Atunci numerele  $a_1 + a_5$  și  $a_2 + a_4$  se divid la  $a_3$ . Prin urmare, la  $a_3$  se divide și numărul  $(a_1 + a_2) + (a_4 + a_5)$ .

În același timp  $a_1 + a_2$  se divide la trei dintre numerele  $a_3, a_4, a_5, a_6$  și fiindcă  $a_1 + a_2$  nu se divide la  $a_6$ , atunci  $a_1 + a_2$  se divide la  $a_3$ , de unde rezultă că  $a_4 + a_5$  se divide la  $a_3$ . Am obținut o contradicție cu observația 1.

Astfel, un șir de numere impare, care are proprietatea dorită, poate fi format din cel mult cinci numere. Punctul c) este rezolvat.

Dacă șirul este format numai din numere pare, atunci, fără a se schimba condițiile, putem să le împărțim pe toate prin 2. Putem deci considera că în șir sînt numai numere impare. Datorită punctului c), nu pot fi mai multe decât cinci.

Observațiile 1—3 rămîn adevărate acum cu cîteva presupuneri în plus.

La observația 1, trebuie să se ceară ca  $a$  să nu fie egal cu  $b + c$ ; 2 este adevărată dacă  $a$  nu este egal cu suma oricărui doi termeni ai șirului, iar 3 este adevărată dacă  $d$  este un număr impar.

Dacă termenii șirului  $a, b, c$  sînt pari, iar  $d$  este impar, atunci numerele  $a + d, b + d$  și  $c + d$  nu se divid nici prin  $a$ , nici prin  $b$ , nici prin  $c$ . Prin urmare, numerele  $a + b, a + c$  se divid prin  $d$ , ceea ce contrazice observația 3.

Astfel în șirul nostru, nu sînt mai mult de două numere pare. Fie ele două  $a$  și  $b$  ( $a > b$ ). Atunci numărul  $a + b$  se divide la toate numerele impare ale șirului și prin urmare numărul  $a$  este cel mai mare din șir.

Dacă numărul  $a$  nu este egal cu nici o sumă a oricărui două numere din șir, atunci, eliminînd pe  $b$ , obținem un șir pentru care se verifică observațiile 1, 2, 3 fără nici o condiție. Rezolvarea punctului c) arată că în acest șir nu sînt mai mulți de cinci termeni, deci și în șirul inițial nu sînt mai mulți decât șase termeni.

Presupunem acum, că numărul  $a$  este egal cu suma anumitor două numere impare ale șirului. Dacă  $c$  este cel mai mare dintre aceste numere impare, atunci  $a < 2c$ .

Mai sus, s-a spus deja că numărul  $a + b$  se divide la toate numerele impare ale șirului.

Prin urmare,  $a + b \geq 2n$ , unde prin  $n$  s-a notat c.m.m.m.c. al tuturor termenilor impari ai șirului. Numărul  $c$  este divizor al numărului  $n$  și fiindcă

$c \neq n$ , atunci  $3c \leq n$  ( $c$  și  $n$  sînt numere impare). Pe de altă parte, fiindcă  $2c > a$ , atunci

$$3c > \frac{3}{2} a > \frac{3}{4} (a + b) \geq \frac{3}{2} n > n.$$

S-a obținut o contradicție.

Astfel în fiecare caz, în șirul nostru nu sînt mai mult de șase numere. Iată un exemplu de șir cu șase numere: 2, 3, 5, 7, 107, 10693.

Iu. I. Ionin

**M 126.** Un poligon circumscris unui cerc de rază  $r$ , este tăiat într-un mod oarecare în triunghiuri. Să se demonstreze că suma razelor cercurilor înscrise în aceste triunghiuri este mai mare decît  $r$ .

I.D. Novikov

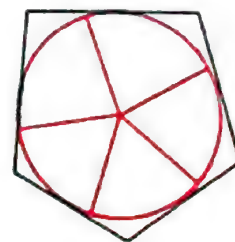


Fig. 197

Fie  $S$  aria poligonului  $p$  semiperimetrul său,  $S_i$ ,  $p_i$ ,  $r_i$  respectiv ariile, semiperimetrele și razele cercurilor înscrise în triunghiurile în care s-a descompus poligonul ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Atunci  $S = p \cdot r$ ,  $S_i = p_i r_i$  și  $p > p_i$  pentru toți  $i$  (nu e greu de demonstrat că perimetrul poligonului este mai mare decît perimetrul oricărui poligon convex înscris în el). De aceea:

$$r_1 + r_2 + \dots + r_n = \frac{S_1}{p_1} + \frac{S_2}{p_2} + \dots + \frac{S_n}{p_n} > \frac{S_1}{p} + \frac{S_2}{p} + \dots + \frac{S_n}{p} = \frac{S}{p} = r$$

Ultima egalitate este ilustrată în figura 197.

**M 127.** Pentru fiecare număr natural  $n$ , vom nota prin  $s(n)$  suma cifrelor sale (în scriere zecimală). Vom numi numărul natural  $m$ , număr deosebit, dacă nu poate fi pus sub forma  $m = n + s(n)$ , unde  $n$  este un număr natural oarecare. (De exemplu, numărul 117 nu este deosebit, deoarece  $117 = 108 + s(108) = 108 + 9$ , dar numărul 121 este deosebit, așa cum se poate verifica ușor.) Este adevărată afirmația că există doar un număr finit de numere deosebite?

Răspuns: această afirmație nu este adevărată; există o infinitate de numere deosebite.

Ideea rezolvării celei mai naturale constă în următoarele: Să considerăm toate numerele naturale  $n$  de la 1 la un anumit număr  $N$ . Printre ele se vor găsi  $R_N$  numere  $n$  pentru care  $n + s(n) > N$ . De aceea, printre numerele de la 1 la  $N$  vor fi cel mult  $N - R_N$  numere care pot fi scrise sub forma  $n + s(n)$ , adică, cel puțin  $R_N$  numere deosebite. Rămîne să stabilim că alegînd în mod corespunzător pe  $N$  se poate obține  $R_N$  oricît de mare.

Pentru a dezvolta această idee pînă la o demonstrație completă, vom arăta că între numerele  $n$  de la 1 la  $N = 10^{10^k+k}$  există mai mult de  $10^k$  numere pentru care  $n + s(n) > N$ . Într-adevăr, dacă  $n < N$  și  $n \geq N_1 = (10^{10^k} - 1)10^k = 9...90...0$  ( $10^k$  de nouă și  $k$  zerouri), atunci

$$n + s(n) \geq (10^{10^k+k} - 10^k) + 9 \cdot 10^k > N$$



iar numărul numerelor  $n$  astfel încât  $N_1 \leq n \leq N$  este egal cu  $N - N_1 + 1 = 10^k + 1$ .

O altă rezolvare se bazează pe indicarea modului de a construi concret un șir de numere deosebite. Iată un astfel de șir:

$$M_1 = 9 + 11 = 20, \quad m_2 = 20 + 101 = 121, \quad m_3 = 121 + 1001,$$

unde  $m_k = m_{k-1} + 10^k + 1$ .

Vom demonstra prin inducție că toate aceste numere sînt deosebite. Să presupunem că pentru  $m_{k-1}$  ( $k \geq 3$ ) acest lucru e adevărat și pentru  $m_k$  nu,  $m_k = n + s(n)$ . Înainte de a utiliza această presupunere, să demonstrăm că scrierea zecimală a lui  $m_k$  este astfel:

$$m_k = 10^k + a_{k-1} 10^{k-1} + \dots + a_0$$

unde cifra  $a_{k-1} \neq 0$  și  $11 \cdot 10^{k-1} < m_k < 2 \cdot 10^k$ . Inegalitatea din stînga este evidentă, iar inegalitatea din dreapta o vom demonstra prin inducție:

$$m_k = m_{k-1} + 10^k + 1 < 2 \cdot 10^{k-1} + 10^k + 1 = 12 \cdot 10^{k-1} + 1 < 2 \cdot 10^k.$$

Acum se poate demonstra că scrierea zecimală a numărului  $n$  începe tot cu cifra 1:  $n = 10^k + b_{k-1} 10^{k-1} + \dots + b_1 \cdot 10 + b_0$ , adică  $10^k < n < 2 \cdot 10^k$ . Aici inegalitatea din dreapta este evidentă, iar cea din stînga se demonstrează prin reducere la absurd; dacă  $n < 10^k$  atunci  $s(n) < 9k$  și  $n + s(n) < 10^k + 9k < 10^k + 10^{k-1} = 11 \cdot 10^{k-1} < m_k$  ( $9k < 10^{k-1}$  pentru  $k \geq 3$ ).

Vom nota numărul  $n - 10^k$  (numărul  $n$  din care s-a dat afară prima cifră egală cu 1) prin  $n^*$ . Atunci este evident că  $s(n^*) = s(n) - 1$  și de aceea  $n^* + s(n^*) = n - 10^k + s(n) - 1 = m_k - 10^k - 1 = m_{k-1}$ .

Astfel se obține că numărul  $m_{k-1}$  nu este deosebit. Contradicția, obținută cu ipoteza de inducție, justifică corectitudinea trecerii de la  $k - 1$  la  $k$ . Faptul că  $m_1$  și  $m_2$  sînt numere deosebite, se verifică ușor.

**M 128.** Să se găsească în ce rapoarte sînt laturile unui triunghi care are una dintre mediane împărțită în trei părți egale de cercul înscris.

Fie  $BK$  mediana triunghiului  $ABC$ , care este împărțită de cercul înscris în segmentele congruente  $BM = MN = NK = x$ , și  $T$  punctul de tangență a cercului înscris cu latura  $BC$  (fig. 198).

Ne sînt utile următoarele două relații adevărate pentru orice triunghi:

$$a + c - b = 2BT$$

$$2a^2 + 2c^2 - b^2 = 4BK^2$$

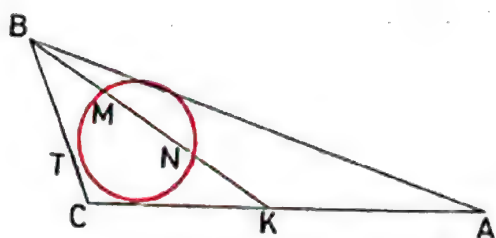


Fig. 198

(prima se deduce din egalitatea  $BT + CT = a$ ,  $BT - CT = c - b$ ; a doua se demonstrează ușor completînd triunghiul pînă la paralelogramul  $ABCD$ ). Din prima egalitate obținem:

$$2a^2 + 2c^2 - b^2 = 36x^2 \quad (1)$$

Întrucît  $BT^2 = BM \cdot BN$ , rezultă

$$(a + c - b)^2 = 8x^2. \quad (2)$$

În sfârșit, intrucît punctele  $B$  și  $K$  sînt în mod evident, egal depărtate de centrul cercului înscris, rezultă  $BC = KC$ , de unde

$$b = 2a. \quad (3)$$

Înlocuind (3) în (1) și (2), vom găsi

$$c^2 - a^2 = 18x^2, (c - a)^2 = 8x^2$$

Din aceste egalități vom obține (evident că  $c - a \neq 0$ ,  $x \neq 0$ ).

$$\frac{c + a}{c - a} = \frac{9}{4}, \text{ de unde } \frac{c}{a} = \frac{13}{5}.$$

Răspuns:  $a : b : c = 5 : 10 : 13$ .

Se verifică ușor că într-un triunghi în care laturile stau în aceste rapoarte, mediana relativă la latura  $b$  este împărțită într-adevăr de cercul înscris în trei părți egale (pentru verificare este util să se folosească aceleași formule care s-au utilizat mai sus).

**M 129.** a) Într-o găleată s-au turnat 12 litri de lapte. Cum se poate împărți această cantitate de lapte în două părți egale folosind două vase de 5 și 7 litri?

b) Să se rezolve problema generală: pentru ce valori  $a$  și  $b$  se poate împărți în două părți egale cantitatea de  $a + b$  litri de lapte, folosind numai vasele de  $a$  litri,  $b$  litri și  $a + b$  litri? (la o turnare dintr-un vas într-altul se poate turna tot laptele din acesta sau se poate completa al doilea vas pînă la umplere).

V.V. Ușakov

Pentru rezolvarea punctului a) este suficient să urmărim tabela 1.

Tabela 1

Găleată									
Vasul I	7	2	2	0	7	4	4	0	7
Vasul II	0	5	0	2	2	5	0	4	4
Găleată									

Pentru ca să rezolvăm punctul b) vom proceda în felul următor. Fie  $a \geq b$ . Vom numi vasul de capacitate  $a + b$  rezervor, cel de capacitate  $a$ , primul vas, iar cel de capacitate  $b$ , al doilea vas. Vom demonstra că putem obține  $c$  litri atunci și numai atunci cînd  $c = ma + pb$ , unde  $m$  și  $p$  sînt numere întregi  $0 \leq c \leq a$ . Dacă  $a$  și  $b$  sînt numere întregi, atunci aceasta se poate reformula astfel: se pot obține  $c$  litri atunci și numai atunci cînd  $0 \leq c \leq a$  și  $c$  se divide prin c.m.m.d.c. al numerelor  $a$  și  $b$ . Vom rezolva această problemă presupunînd că  $a$  și  $b$  sînt numere întregi; dacă se știe acest lucru rezolvarea se poate simplifica; de exemplu, nu e nevoie să se considere separat cazurile  $m > 0$  și  $m < 0$ .

Vom nota prin  $d_k$  restul împărțirii lui  $ka$  la  $b$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ):  $d_k = ka - p_k b$ ,  $0 \leq d_k < b$ .

Este suficient să demonstrăm că se pot obține  $d_m = ma - p_m b$  litri. Într-adevăr  $d_m = ma - p_m b$  este cel mai mic număr nenegativ de forma  $ma + pb$ , unde  $p$  este întreg, atunci adăugînd la  $d_m$  încă  $p + p_m$  porții de cîte  $b$





Fig. 199. Situația în care în primul vas sînt  $x$  litri și în al doilea vas  $y$  litri corespunde punctului de coordonate  $(x, y)$ , iar turnările succesive sînt reprezentate prin săgeți roșii însemnează turnare dintr-un vas în celălalt, iar cele albastre turnare cu folosirea rezervorului. Figura a corespunde tabelelor 1 și 2, figura b, tabeli 3.

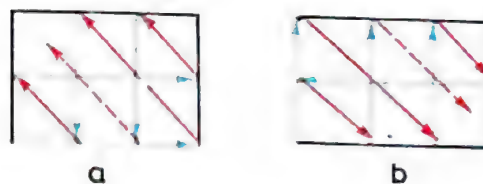
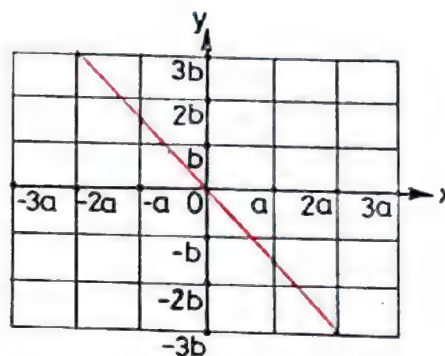


Fig. 200. Se observă că dacă se taie planul în dreptunghiuri  $a \times b$  (după liniile negre) și grupăm la un loc toate dreptunghiurile care conțin segmente din linia roșie, atunci drumul dreapta-jos (sau stînga-sus) corespunde la desenul b (respectiv a) (segmentele albastre apar în locurile tăieturilor).



M 130. Care este cel mai mare număr de puncte

- din plan;
- din spațiu.

astfel încît nici unul dintre triunghiurile cu vîrfurile în aceste puncte, să nu fie obtuzunghic?

G.A. Galperin

Răspuns: a) 4 puncte; b) 8 puncte. Exemple de astfel de situații: a) în vîrfurile unui pătrat; b) în vîrfurile unui cub; (Desigur că în ipoteza problemei se subînțelege că orice trei puncte nu sînt coliniare — fără această condiție pot să fie oricîte puncte).

Vom demonstra că mai multe puncte nu pot să fie.

Să observăm înainte de toate (acest lucru se referă atît la problema din plan cît și la cea din spațiu) că dacă  $A_i$  și  $A_j$  sînt oricare două dintre cele  $n$  puncte  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , care satisfac condiția problemei, atunci toate aceste puncte trebuie să aparțină mulțimii acelor puncte  $M$  pentru care avem deodată  $\angle MA_i A_j \leq 90^\circ$  și  $\angle MA_j A_i \leq 90^\circ$ . Această mulțime este o bandă cuprinsă între dreptele (în spațiu, planele) duse prin punctele  $A_i$  și  $A_j$  perpendiculare pe segmentul  $A_i A_j$  (fig. 201); vom nota mai jos această bandă prin  $\pi_{ij}$ .

Din această observație rezultă că dacă vom considera înfășurătoarea convexă  $V$  a celor  $n$  puncte — care e cel mai mic poligon (poliedru) convex care cuprinde toate aceste puncte — atunci toate punctele  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , trebuie să fie situate pe frontiera mulțimii  $V$ ; nici unul dintre ele nu poate fi în interiorul lui  $V$  căci  $V$  este cuprinsă în fiecare dintre benzile  $\pi_{ij}$ .

Rezolvarea problemei a) se obține acum în două cuvinte. În acest caz  $V$  este un poligon convex cu  $n$  laturi, cu vîrfurile  $A_1, A_2, \dots, A_n$ . Suma unghiurilor sale este egală cu  $180^\circ(n-2)$  și dacă fiecare dintre aceste unghiuri nu e mai mare de  $90^\circ$ ,

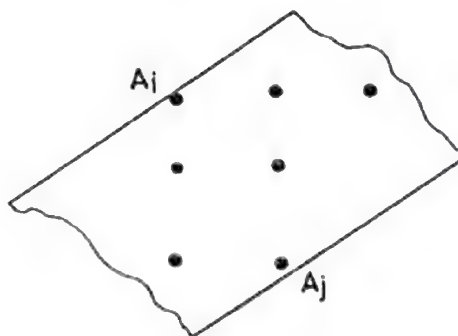


Fig. 201



rezultă

$$180^\circ(n - 2) \leq 90^\circ n$$

de unde  $n \leq 4$ .

Problema în spațiu este mult mai dificilă. Dăm rezolvarea pe care au dat-o prima dată în 1962 cunoscuții geometrii L. Dantzer și B. Grünbaum.

Să considerăm, în afară de poliedrul  $V$  (aici prin  $V$  vom înțelege înfășurătoarea convexă a celor  $n$  puncte date, sau intersecția — partea comună — a tuturor celor  $\frac{n(n-1)}{2}$  benzi  $\pi_{ij}$ ) și următoarele poliedre:  $V_i$  obținut din  $V$

printr-o translație de vector  $\overrightarrow{A_1 A_i}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ; desigur că  $V_1$  coincide cu  $V$ ) și  $V'$  obținut din  $V$  printr-o omotetie de coeficient 2 și centru  $A_1$ .

Vom demonstra următoarele trei afirmații.

1°. Poliedrul care se obține din  $V$  printr-o translație de vector  $\overrightarrow{A_i A_j}$  nu are puncte comune interioare cu  $V$  (adică se poate intersecta cu  $V$  numai pe frontieră).

2°. Oricare două poliedre  $V_1, V_2, \dots, V_n$  nu au puncte interioare comune.

3°. Toate poliedrele  $V_i$  sînt cuprinse în  $V'$ .

Să demonstrăm 1°. Prin translația cu  $\overrightarrow{A_i A_j}$  banda  $\pi_{ij}$  trece într-o nouă bandă care nu are cu ea puncte comune interioare — aceste două benzi au în comun numai un plan frontieră. Dar  $V$  este conținut în  $\pi_{ij}$ , de aceea cu atît mai mult este adevărat 1°.

2° rezultă direct din 1°: este suficient să observăm că  $V_j$  se obține din  $V_i$  printr-o translație de vector  $\overrightarrow{A_i A_j}$  (fig. 202),

3° rezultă dintr-un fapt mai general: dacă  $A, B, C$  sînt trei puncte ale unui poliedru convex  $W$  și  $W'$  este poliedrul obținut din  $W$  printr-o omotetie de coeficient 2 și de centru  $A$ , atunci al patrulea vîrf  $D$  al paralelogramului  $ABCD$  (adică punctul obținut din  $C$  prin translația de vector  $\overrightarrow{AB}$ ) aparține lui  $W'$ . Acest fapt se demonstrează ușor: punctul  $K$ , din care prin omotetie se obține  $D$ , este mijlocul segmentului  $AD$  și este totodată mijlocul segmentului  $BC$ , de aceea el aparține lui  $W$  (căci poliedrul  $W$  este convex) de aceea  $D$  aparține lui  $W'$  (fig. 203).

Astfel, afirmațiile 2° și 3° sînt demonstrate. Fie  $v$  volumul poliedrului  $V$ . Atunci volumul fiecărui  $V_i$  este egal tot cu  $v$ , iar volumul lui  $V'$  este  $8v$ . Din 2 și 3 rezultă că  $nv \leq 8v$ , de unde  $n \leq 8$ .

Facem observația că pe parcurs am rezolvat o problemă dată la a XIII-a Olimpiadă internațională de matematică. Problema M 130 a fost considerată de juriu prea dificilă (iată textul problemei de la Olimpiadă:

Se dă un poliedru convex  $P_1$  cu nouă vîrfuri  $A_1, A_2, \dots, A_9$ . Notăm prin  $P_2$ ,

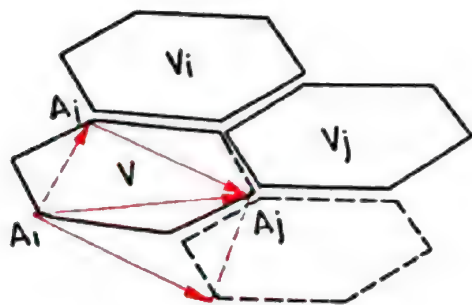


Fig. 202

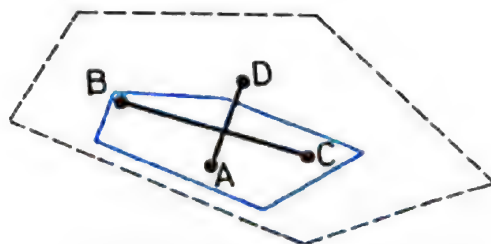


Fig. 203

$P_3, \dots, P_9$  poliedrele obținute din  $P_1$  prin translațiile care mută punctul  $A_1$  respectiv în punctele  $A_2, A_3, \dots, A_9$ . Să se demonstreze că cel puțin două dintre poliedrele  $P_1, P_2, \dots, P_9$  au cel puțin un punct interior comun.)

În legătură cu afirmația demonstrată apare o serie întreagă de chestiuni care nu se pot rezolva prin procedeul frumos, dar destul de artificial pe care l-am descris. De exemplu, care este cel mai mare număr de puncte din spațiu astfel ca toate triunghiurile cu vîrfurile în aceste puncte să fie ascuțitunghice? Din rezolvarea noastră se vede că nu pot fi 8 puncte (convingeți-vă de acest lucru!). Nu e greu de construit un exemplu cînd sînt 5 puncte. Pot să fie 6. Dar 7? O problemă mai generală și probabil mai dificilă este următoarea: care este numărul cel mai mare de puncte astfel încît toate unghiurile formate să nu depășească o mărime  $\alpha$  dată?

**M 131.** Să se demonstreze că cele patru puncte, în care bisectoarele unghiurilor dintre prelungirile laturilor unui patrulater înscris intersectează laturile sale, sînt vîrfurile unui romb (fig. 204).

M. Urtembaev (elev cl. a X-a)

Vom rezolva această problemă folosind cunoscutele teoreme privind măsura unghiurilor formate de două secante la cerc. Notațiile sînt evidente din figura 204. Întrucît  $PN$  și  $QM$  sînt bisectoare, rezultă

$$\begin{aligned}\alpha_6 - \alpha_1 &= \alpha_5 - \alpha_2 \\ \alpha_7 - \alpha_4 &= \alpha_8 - \alpha_3\end{aligned}$$

Adunînd aceste egalități, obținem  $\alpha_6 + \alpha_7 + \alpha_2 + \alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_8$ , prin urmare, suma arcelor în fiecare dintre membrii ultimei egalități, este egală cu o jumătate de cerc. De aceea dreptele  $PN$  și  $QM$  sînt perpendiculare între ele. De aici rezultă că în triunghiul  $KPM$  bisectoarea unghiului  $P$  este totodată și înălțime; atunci ea este totodată și mediană. Triunghiul  $KPM$  este isoscel. Același lucru se poate spune despre triunghiul  $LQN$ . Astfel în patrulaterul  $KLMN$  diagonalele sînt perpendiculare între ele și se înjumătățesc, de aceea el este romb.

N.B. Vasiliev

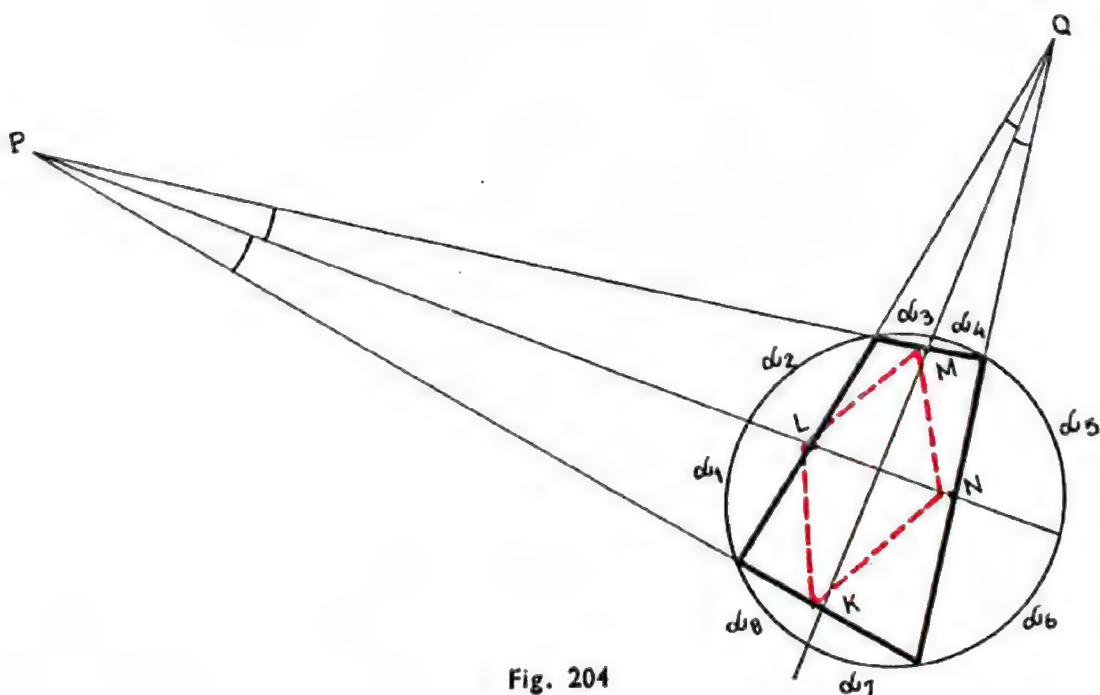


Fig. 204





**M 132.** Pe o circumferință s-au scris  $n$  numere  $x_1, x_2, \dots, x_n$  fiecare dintre ele fiind egal cu  $+1$  sau cu  $-1$  și suma celor  $n$  produse formate din câte două numere vecine este nulă (ca și la problema M 93) și în general, pentru fiecare  $k = 1, 2, \dots, n-1$  suma celor  $n$  produse formate din factori distanțați între ei cu  $k$  locuri este nulă (adică  $x_1x_3 + x_2x_4 + \dots = 0$  ș.a.m.d.): un exemplu pentru  $n = 4$  este dat pe figura 205.

a) Să se demonstreze că  $n$  este pătratul unui număr întreg.

b) Există o astfel de mulțime de  $n$  numere, pentru  $n = 16$ ? (Rezolvarea completă a problemei: pentru ce  $n$ , o astfel de mulțime de numere există — nu o cunoaștem.)

Vom demonstra că  $n$  este pătratul unui număr întreg. Fie  $m = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ . Atunci  $m$  este număr întreg.

$$m^2 = (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) + (x_1x_2 + \dots + x_nx_1) + (x_1x_3 + x_2x_4 + \dots + x_{n-1}x_1 + x_nx_2) + \dots + (x_1x_n + x_2x_1 + x_3x_2 + \dots + x_nx_{n-1}).$$

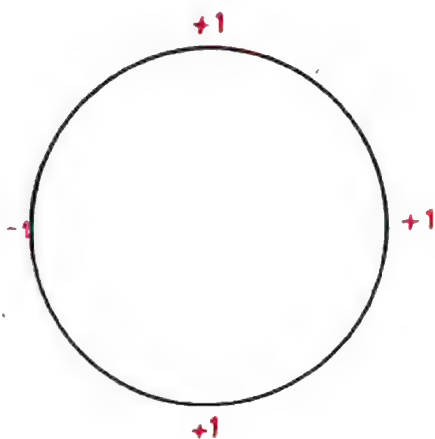


Fig. 205

Cum rezultă din condițiile problemei, în partea dreaptă a acestei egalități, suma numerelor din prima paranteză este egală cu  $n$ , iar suma numerelor în oricare altă paranteză este egală cu 0. Rezultă  $n = m^2$ . Punctul a) este rezolvat.

Să vedem pentru ce  $n$  se pot alege numerele  $x_1, \dots, x_n$  care să satisfacă condițiile problemei. Cum rezultă din problema M 93,  $n$  trebuie să se dividă prin 4, rezultă că  $n$  este pătratul unui număr cu soț. Dacă  $n = 4$  se pot alege astfel de numere:  $x_1 = x_2 = x_3 = 1, x_4 = -1$ . Următoarea valoare posibilă pentru  $n$  este 16.

Vom demonstra că pentru  $n = 16$ , nu se pot alege numerele respective.

Să presupunem că pentru  $n = 16$  sînt date numerele  $x_1, x_2, \dots, x_{16}$  care satisfac condițiile problemei și să încercăm să ajungem la o contradicție.

Fie  $m = x_1 + \dots + x_{16}$ . Se poate considera că  $m \geq 0$  (altfel am putea, schimba toate numerele  $x_i$  în  $-x_i$  fără a se modifica condițiile problemei), cum s-a demonstrat  $m^2 = n = 16$  adică  $m = 4$ .

Dacă  $p$  dintre numerele  $x_i$  sînt egale cu  $+1$  și  $q$  egale cu  $-1$ , atunci

$$p + q = n = 16 \text{ și } p - q = m = 4.$$

Rezultă,  $p = 10, q = 6$ .

Vom considera că numerele  $x_i$  sînt scrise în virfurile unui poligon regulat cu 16 virfuri. Vom marca cu câte o stelută acele virfuri în care este scris  $-1$  (în total șase virfuri). Să rotim întregul desen cu  $k/16$  părți dintr-o tură completă ( $k = 1, 2, \dots, 15$ ).

Vom demonstra că prin aceasta, exact două stelute vor trece în virfuri în care anterior au fost stelute. Într-adevăr, fie ca cele  $r$  numere egale cu  $-1$  să treacă în locuri în care erau tot  $-1$ . Atunci în suma  $x_1x_{k+1} + x_2x_{k+2} + \dots + x_{16}x_{k+1}x_1$  vor fi  $6 - r$  termeni în care primul factor va fi egal cu  $-1$  și al doilea cu  $+1$  și  $6 - r$  termeni în care al doilea factor este egal cu  $-1$

și primul cu  $+1$ ; înseamnă că  $2(6-r)$  factori sînt egali cu  $-1$ . Fiindcă suma este egală cu  $0$ , rezultă că  $2(6-r) = 8$  adică  $r = 2$ .

Acum se poate reformula problema dată în felul următor: se pot pune în vîrfurile unui poligon regulat cu  $16$  laturi  $6$  stelute, astfel încît două dintre ele să fie situate în vîrfuri opuse și pentru orice număr  $k$  de la  $1$  la  $7$  să existe exact două perechi de stelute astfel încît distanța dintre stelutele dintr-o pereche să fie egală cu  $k$  (prin distanța dintre două stelute se înțelege lungimea celui mai scurt dintre arcele care le unesc, iar lungimea întregii circumferințe se ia de  $16$  părți; distanța dintre punctele  $X$  și  $Y$  o vom nota  $(XY)$ ).

Vom nota prin  $A$  și  $B$  punctele diametral opuse marcate prin stelute și prin  $C, D, E, F$  celelalte puncte marcate. Vom calcula suma tuturor distanțelor dintre punctele  $A, B, C, D, E, F$ . Distanța de  $8$  se întîlnește o singură dată, iar distanțele de la  $1$  la  $7$  de cîte două ori, deci ca rezultat suma totală este  $2(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7) + 8 = 64$ .

Să vedem ce distanțe se realizează între punctele  $C, D, E, F$ . Fiindcă  $(AX) + (BX) = 8$  pentru orice punct  $X$ , atunci suma  $\Sigma$  a tuturor distanțelor dintre punctele  $C, D, E, F$  va fi egală cu  $64 - (AB) - 4 \cdot 8 = 24$ . În plus, dacă o anumită distanță  $k$  se realizează între punctele  $C, D, E, F$ , atunci aceasta înseamnă că printre numerele  $(AC), (AD), (AE), (AF)$  și  $(BC), (BD), (BE), (BF)$  numărul  $k$  se întîlnește de mai puțin de două ori; dar atunci și  $(8-k)$  se întîlnește de mai puțin de două ori, adică  $8-k$  se realizează, de asemenea, ca distanță dintre punctele  $C, D, E, F$ . Să vedem cum pot fi aranjate punctele  $C, D, E, F$ . Se verifică ușor că sînt posibile două cazuri:

1) Trei puncte oarecare (de exemplu,  $C, D, E$ ) formează un triunghi care conține centrul cercului. Presupunem că  $F$  este cuprins între  $C$  și  $D$ . Atunci

$$(CD) + (DE) + (CE) = 16, \quad (CF) + (DF) = (CD)$$

și în plus,  $(EF)$  este mai mare decît  $(CE)$  sau  $(DE)$ . Fiindcă și  $(CD) + (DE) > 8$ , și  $(CD) + (CE) > 8$ , rezultă

$\Sigma = (CD) + (DE) + (CE) + (CF) + (DF) + (EF) = 16 + (CD) + (EF) > 24$ ; dar, cum am demonstrat mai sus această sumă trebuie să fie egală cu  $24$  deci primul caz nu e posibil.

2) Punctele  $C, D, E, F$  sînt situate de aceeași parte a unui diametru. Presupunem că sînt situate pe circumferință în următoarea ordine  $C, D, E, F$ . Atunci  $(CD) + (DF) = (CF)$  și  $(CE) + (EF) = (CF)$  de aceea suma  $\Sigma$  este egală cu  $3(CF) + (DE)$ . Rezultă  $3(CF) + (DE) = 24$ . Fiindcă  $CF > DE$ , atunci  $(CF) = 7, (DE) = 3$ . Dacă  $(CD) = 1$  atunci  $(DF) = 6$ ; dar prin aceasta distanța  $2 = 8 - 6$  nu se realizează între punctele  $C, D, E, F$ , ceea ce contrazice ce s-a demonstrat mai înainte. Dacă  $(CD) = 2$ , atunci deși  $(CF) = 7$ , distanța  $1$  nu se realizează. Dacă  $(CD) = 3$ , atunci  $(EF) = 1$  și acest caz nu se deosebește de cazul  $(CD) = 1$ .

Astfel, am obținut rezultatul că nu se pot așeza stelutele în modul cerut (deci nu se pot alege nici numerele  $x_i$ ). Punctul b) este rezolvat.

Răspunsul la problema generală nu îl cunoaștem, dar după aparențe, nu se pot găsi numere care să satisfacă condițiile problemei decît pentru  $n = 4$ .

D.N. Bernștein

**M 133.** *Unul dintre cele mai simple organisme pluricelulare — alga „volvox” este ca un înveliș sferic compus în principal din celule heptagonale, hexagonale și pentagonale (adică celule care au șapte, șase sau cinci celule vecine); în fiecare*



„virf“ se întâlnesc trei celule (fig. 206). Unele exemplare au și celule tetragonale sau octogonale, dar biologii au observat că dacă nu sînt astfel de celule „nestandard“ (cu mai puțin de cinci și cu mai mult de șapte laturi), atunci totdeauna celulele pentagonale sînt exact cu 12 mai multe decît cele heptagonale (în total pot să fie sute și chiar mii de celule). Puteți lămurii acest fapt?

V. Maresin

Afirmația problemei rezultă din formula lui Euler. Într-adevăr, notînd numărul virfurilor volvoxului prin  $V$ , numărul muchiilor prin  $M$ , și numărul fețelor cu  $i$  virfuri prin  $F_i$ , după formula lui Euler avem

$$2 = V - M + \sum F_i$$

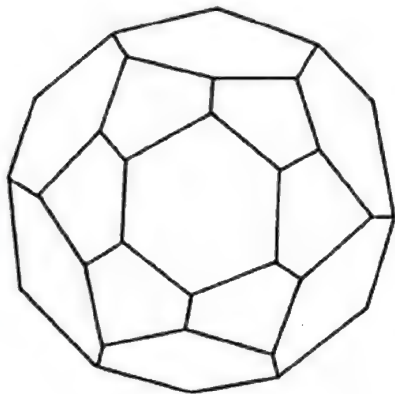


Fig. 206

Dar  $3V = \sum_i F_i$  intrucît după condiție în fiecare virf ajung trei fețe, iar  $2M = \sum_i F_i$  la fiecare muchie ajung două fețe. Prin urmare,  $12 = 6V - 6M + 6\sum F_i = \sum_{2i} F_i - \sum_{3i} F_i + \sum_{6i} F_i = \sum (6 - i)F_i$ . După ipoteză nu sînt fețe nestandard, adică  $F_3 = F_4 = F_8 = F_9 = \dots = 0$ . De aceea  $F_5 - F_7 = 12$  în deplină concordanță cu ce au observat biologii.

**M 134.** Care e mulțimea punctelor ce pot fi centre de greutate ale triunghiurilor care au cele trei virfuri pe cele trei laturi  $AB$ ,  $BC$  și  $AC$  ale unui triunghi dat  $ABC$ ?

L.G. Makarov

Este bine să considerăm nu numai triunghiurile propriu-zise ci și triunghiurile degenerate. Vom demonstra la început că orice punct al hexagonului din fig. 207 este un centru de greutate al unui triunghi înscris. Pentru aceasta ne este utilă următoarea lemă.

**L e m ă.** Dacă punctul  $O_1$  este centrul de greutate al triunghiului înscris  $K_1L_1M_1$  și punctul  $O_2$  este centrul de greutate al triunghiului înscris  $K_2L_2M_2$ , atunci orice punct al segmentului  $O_1O_2$  este centrul de greutate al unui anumit triunghi înscris.

**Demonstrație.** Este bine să folosim interpretarea mecanică a noțiunii de centru de greutate. Presupunem că punctul  $O_3$  aparține segmentului  $O_1O_2$ . Atunci se pot pune astfel de greutatea  $p_1$  și  $p_2$  în punctele  $O_1$  și  $O_2$  încît  $O_3$  este centrul lor de greutate. Vom situa acum în virfurile triunghiurilor  $K_1L_1M_1$  greutatea  $p_1/3$  și greutatea  $p_2/3$  în virfurile triunghiului  $K_2L_2M_2$  (fig. 208). Centrul de greutate al acestor șase greutatea coincide cu punctul  $O_3$ .

Pe de altă parte, el este centrul de greutate al celor trei greutatea  $\frac{p_1 + p_2}{2}$

așezate în virfurile triunghiului  $K_3L_3M_3$  obținut în felul următor. Punctele  $K_3$ ,  $L_3$  și  $M_3$  sînt centrele de greutate ale perechilor de greutatea  $p_1/3$ ,  $p_2/3$  așezate în punctele  $K_1$ ,  $K_2$ ;  $L_1$ ,  $L_2$  și  $M_1$ ,  $M_2$  respectiv. Astfel, plecînd de la triunghiurile  $K_1L_1M_1$  și  $K_2L_2M_2$  și de la un punct  $O_3$  arbitrar al segmentului  $O_1O_2$  am putut construi triunghiul  $K_3L_3M_3$  al cărui centru de greutate este  $O_3$ . Lema este demonstrată.

Acum e ușor de demonstrat că orice punct al hexagonului este centrul de greutate al unui anumit triunghi înscris. Într-adevăr este suficient să se demonstreze acest lucru pentru virfurile lui și apoi să se utilizeze lema. Cu

ajutorul ei de la vârfuri ajungem la punctele de pe frontiere și apoi la orice punct interior. Dar pentru vârfuri, aceste triunghiuri se construiesc ușor: acestea sînt triunghiurile degenerale în care vîrfurile sînt situate în vîrfurile triunghiului dat și două vîrfuri coincid.

Rămîne să se demonstreze că punctele situate în interiorul triunghiurilor  $AB_1C_1$ ,  $A_1BC_1$ ,  $A_1B_1C$  nu pot să fie centre de greutate ale unor triunghiuri înscrise. Într-adevăr, presupunem că pentru un anumit punct  $O$  al triunghiului  $AB_1C_1$  s-a găsit un triunghi  $KLM$  pentru care el este centru de greutate (fig. 207). Dar atunci el împarte segmentul  $KN$  în raportul 1 : 2 ceea ce este imposibil.

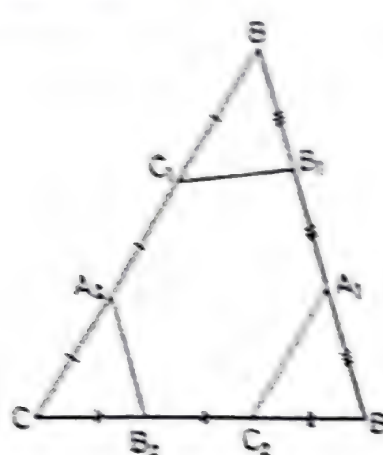


Fig. 207

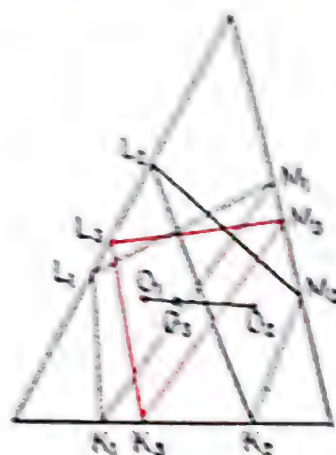


Fig. 208

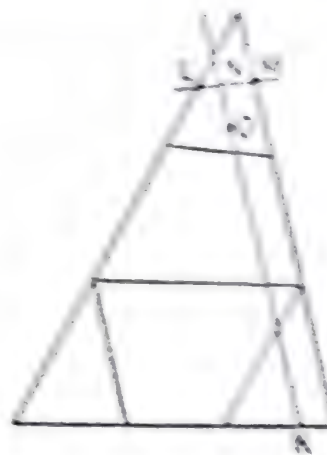


Fig. 209

M 135. Să se demonstreze că pentru fiecare număr natural  $n \geq 1$ , este adevărată identitatea:

$$\sin x \sin \left( x + \frac{\pi}{n} \right) \sin \left( x + \frac{2\pi}{n} \right) \dots \sin \left( x + \frac{(n-1)\pi}{n} \right) = c_n \sin nx,$$

unde  $c_n$  este un anumit număr care depinde de  $n$  și să se găsească  $c_n$ .

V. Marcusin

Vom demonstra la început următoarea leamnă.

L e m ă.  $\sin nx = \sin x \cdot A_n(\cos x)$ , unde  $A_n(x)$  este un anumit polinom de gradul  $n - 1$ , cu primul coeficient  $2^{n-1}$ ,  $\cos nx = B_n(\cos x)$  unde  $B_n(x)$  este un anumit polinom de gradul  $n$  cu primul coeficient  $2^{n-1}$ .

Este evident că pentru  $n = 1$  afirmația lemei este adevărată. Să presupunem că este adevărată pentru  $n = k$ . Atunci

$$\begin{aligned} \sin(k+1)x &= \sin x \cdot \cos kx + \cos x \cdot \sin kx = \sin x(B_k(\cos x) + \\ &+ \cos x \cdot A_k(\cos x)); \cos(k+1)x = \cos x \cdot \cos kx - \sin x \sin kx = \\ &= \cos x \cdot B_k(\cos x) + (\cos^2 x - 1)A_k(\cos x). \end{aligned}$$

De aceea este evident că  $A_{k+1}(x) = B_k(x) + xA_k(x)$  și  $B_{k+1}(x) = xB_k(x) + (x^2 - 1)A_k(x)$  sînt polinoame în care primii coeficienți sînt egali cu suma primilor coeficienți ai polinoamelor  $A_k(x)$  și  $B_k(x)$ , adică  $2^{k-1} + 2^{k-1} = 2^k$ . Lema este demonstrată.



Să notăm  $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{n}\right) \dots \sin\left(x + \frac{(n-1)\pi}{n}\right)$ . Vom însuma doi câte doi termenii de forma  $\sin\left(x + \frac{\pi i}{n}\right)$  și  $\sin\left(x + \frac{\pi(n-i)}{n}\right)$ , unde  $0 < i < \frac{n}{2}$ .

Dacă  $n$  este par, atunci în produs rămâne încă un termen

$$\sin\left(x + \frac{\pi \frac{n}{2}}{n}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x.$$

Vom transforma produsele efectuate astfel:

$$\begin{aligned} \sin\left(x + \frac{\pi i}{n}\right) &= \sin\left(x + \frac{\pi(n-i)}{2n}\right) = \frac{1}{2} \left[ -\cos(2x + \pi) + \cos\left(\frac{2\pi i}{n} - \pi\right) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left( -\cos 2x - \cos \frac{2\pi i}{n} \right) = \frac{1}{2} \left( 2 \cos^2 x - 1 - \cos \frac{2\pi i}{n} \right) = \cos^2 x - d_i \end{aligned}$$

unde  $d_i$  sînt anumite constante.

Astfel  $f(x) = D_n(\cos x)$  unde  $D_n(x)$  este un anumit polinom de gradul  $n-1$  cu primul coeficient 1.

Ne-a mai rămas să demonstrăm că  $A_n(x) = 2^{n-1}D_n(x)$  (în particular va rezulta că constanta  $c_n$  din cerința problemei este egală cu  $\frac{1}{2^{n-1}}$ ).

Vom folosi pentru acest lucru teorema care afirmă că un polinom de gradul  $k$  nu are mai mult de  $k$  rădăcini diferite.

Să considerăm polinomul  $F(x) = A_n(x) - 2^{n-1}D_n(x)$ . Gradul său este mai mic decît  $n-1$ , fiindcă coeficienții lui  $x^{n-1}$  din polinoamele  $A_n(x)$  și  $2^{n-1}D_n(x)$  sînt egali. Înseamnă că sau  $F(x)$  este identic nul fie că  $F(x)$  are mai puțin decît  $n-1$  rădăcini.

Să considerăm punctele  $x_1 = -\frac{\pi}{n}$ ,  $x_2 = -\frac{2\pi}{n}$ , ...,  $x_{n-1} = -\frac{\pi(n-1)}{n}$  și fie  $t_i = \cos x_i$ . Este clar că  $f(x_i) = 0$  și de aceea  $D_n(t_i) = 0$ ; în afară de acesta  $\sin(nx_i) = 0$ , iar  $\sin x_i \neq 0$ , înseamnă că  $A_n(\cos x_i) = A_n(t_i) = 0$ . Observăm că toate punctele  $t_i$  sînt diferite fiindcă  $\cos x$  crește pe segmentul  $[-\pi, 0]$ .

Astfel, polinomul  $F(x)$  se transformă în zero pentru  $n-1$  puncte  $t_1, t_2, \dots, t_{n-1}$  și înseamnă că  $F(x)$  este identic nul. Astfel  $A_n = 2^{n-1}D_n$ , adică

$$\sin x \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{n}\right) \dots \sin\left(x + \frac{\pi(n-1)}{n}\right) = \frac{1}{2^{n-1}} \sin nx.$$

I.N. Bernștein

**M 136.** Se pot scoate dintr-o carieră de piatră 50 de blocuri de piatră avînd greutatea de 370 kg, 372 kg, 374 kg ..., 468 kg (greutățile formează o progresie aritmetică cu rația 2 kg) cu șapte camioane de trei tone?

V.P. Fedotov

**Ră s p u n s.** Nu se poate.

Dacă s-ar putea, atunci într-un anumit camion trebuie să fie puse 8 pietre. Dar chiar cele mai ușoare 8 pietre cîntăresc:

$$370 + 372 + 374 + 376 + 378 + 380 + 382 + 384 = 4 \cdot 754 = 3016 \text{ kg.}$$

**M 137.** Fie  $a, b, c, d$  lungimile celor patru laturi consecutive ale unui patrulater și  $S$  aria sa.

a) Să se demonstreze că  $2S \leq ab + cd$

b) Să se demonstreze că  $2S \leq ac + bd$ .

c) Să se demonstreze că dacă cel puțin într-una dintre aceste inegalități se realizează egalitatea, atunci patrulaterul este inscriptibil.

Întrucît pentru orice patrulater neconvex se poate construi un patrulater convex cu laturi de aceeași lungime și cu arie mai mare (fig. 210) e clar că este suficient să se demonstreze inegalitățile cerute pentru un patrulater convex. De aceea vom considera numai patrulatere convexe.

Astfel, fie în patrulaterul convex  $ABCD$  (fig. 212)  $AB = a$ ,  $BC = b$ ,  $CD = c$ ,  $DA = d$ , și aria lui  $ABCD$  egală cu  $S$ . Aria unui triunghi nu depășește niciodată semiprodusul a două laturi ale sale (fig. 211). De aceea:

$$2S(\triangle ABC) \leq ab \text{ și } 2S(\triangle CDA) \leq cd. \quad (1)$$

Adunînd aceste inegalități, vom obține:

$$2S \leq ab + cd \quad (2)$$

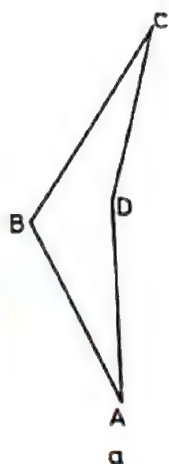


Fig. 210

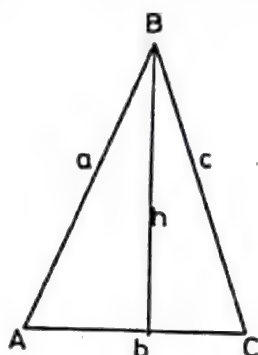


Fig. 211

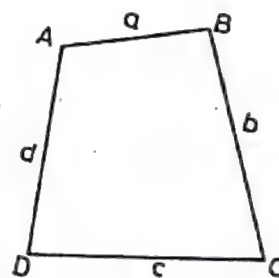


Fig. 212

Aici se obține egalitatea în cazul în care se realizează deodată în ambele inegalități (1), adică atunci și numai atunci cînd unghiurile  $B$  și  $D$  sînt amîndouă drepte. Evident că în aceste cazuri patrulaterul  $ABCD$  este inscriptibil (iar diagonala  $AC$  este diametrul cercului). Din cele spuse mai sus rezultă de asemenea că patrulaterul pentru care  $2S = ab + cd$ , poate fi construit din segmentele  $a, b, c, d$  atunci și numai atunci cînd lungimile lor satisfac condiția:

$$a^2 + b^2 = c^2 + d^2. \quad (3)$$

Punctul b) este ceva mai dificil. El poate fi rezolvat „frontal” aplicînd diferite formule pentru aria triunghiului. Dar există și o rezolvare simplă geometrică.

Descompunem patrulaterul ca și mai înainte prin diagonala  $BD$  în două triunghiuri și unul dintre triunghiuri — să zicem  $BCD$  — „îl întoarcem în cealaltă parte” și alăturăm latura  $BD$  la triunghiul  $BAD$ . Cu alte cuvinte, înlocuim triunghiul  $BCD$  cu triunghiul  $BC'D$  simetric cu primul față de per-



pendiculara dusă pe segmentul  $BD$  prin mijlocul său (fig. 213). Evident că aria patrulaterului nu se modifică. Dar acum putem să folosim rezultatul de la punctul a):

$$2S \leq AB \cdot BC' + C'D \cdot DA$$

sau

$$2S \leq ac + bd. \quad (4)$$

Egalitatea se atinge în (4) dacă în patrulaterul „reconstruit”  $ABC'D$  unghiurile  $B$  și  $D$  sînt drepte, adică dacă în patrulaterul inițial  $ABCD$ , unghiurile pe care diagonala  $BD$  le face cu fiecare pereche de laturi opuse, însumate dau  $90^\circ$ :

$$\sphericalangle ABD + \sphericalangle BDC = \sphericalangle ADB + \sphericalangle DBC = 90^\circ. \quad (5)$$

De aici rezultă că  $\sphericalangle ABC + \sphericalangle ADC = 180^\circ$ , adică patrulaterul  $ABCD$  este inscriptibil (acest lucru rezultă și din  $\sphericalangle A + \sphericalangle C = \sphericalangle A + \sphericalangle C' = 180^\circ$ ). (Facem observația că patrulaterul pentru care  $2S = ac + bd$  (6) poate fi construit din segmentele  $a, b, c, d$ , atunci și numai atunci

$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2 \quad (7)$$

acest lucru rezultă din (3) aplicat la  $ABC'D$ .)

Încă o observație. Nu vi se pare ciudat că condiția (5) necesară și suficientă pentru îndeplinirea egalității (6) este „nesimetrică”. Doar în (6) ambele perechi de vîrfuri opuse participă în mod egal, cu ce e mai bună diagonala  $BD$  decît  $AC$ ? Evident, cu nimic nu e mai bună. Vom vedea imediat că condiția (5) poate fi făcută simetrică și de aceea, așa cum se întîmplă de obicei, mai simplă.

Se verifică ușor (fig. 214) că condiția (5) este echivalentă cu următoarea, simplă: patrulaterul  $ABCD$  este inscriptibil și  $AC \perp BD$ .

Acum putem reformula rezultatul nostru astfel: pentru ca să fie îndeplinită egalitatea (6), este necesar și suficient ca patrulaterul  $ABCD$  să fie inscriptibil și să aibă diagonale perpendiculare.

O altă rezolvare simplă a punctului b) se bazează pe teorema lui Ptolomeu: În orice patrulater  $ABCD$ , avem

$$AC \cdot BD \leq AB \cdot CD + AD \cdot BC, \quad (8)$$

iar egalitatea se atinge aici numai cînd patrulaterul este inscriptibil.

Din această teoremă rezultă că ( $\varphi$  este unghiul dintre diagonale)

$$S = AC \cdot BD \sin \varphi \leq AB \cdot CD + AD \cdot BC = ac + bd.$$

Pe această cale, egalitatea se obține direct în formă „simetrică” (dar condiția (7) se obține mai greu)

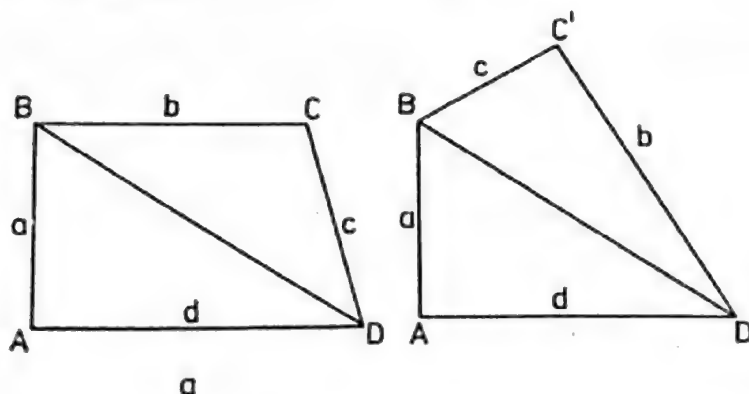


Fig. 213

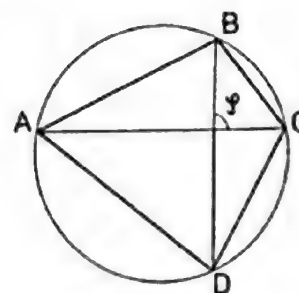


Fig. 214

**M 138.** Să se demonstreze că dacă  $m$  și  $n$  sînt numere naturale  $1 \leq m < n$ , atunci

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k \cdot k^m C_n^k = 0$$

unde  $C_n^k$  sînt coeficienții binomiali adică coeficienții polinomului

$$(1+x)^m = \sum_{k=0}^m C_m^k x^k.$$

M.I. Sidorov

Dăm una dintre cele mai scurte demonstrații prin inducție care aparține lui B. Frišling. Se vede ușor că egalitatea cerută este adevărată pentru  $n = 2, 3, 4$ . Iată de exemplu, pentru  $n = 4$ :  $C_4^0 = 1$ ,  $C_4^1 = 4$ ,  $C_4^2 = 6$ ,  $C_4^3 = 4$ ,  $C_4^4 = 1$  și sînt adevărate egalitățile

$$-1 \cdot 4 + 2 \cdot 6 - 3 \cdot 4 + 4 \cdot 1 = 0$$

$$-1^2 \cdot 4 + 2^2 \cdot 6 - 3^2 \cdot 4 + 4^2 \cdot 1 = 0$$

$$-1^3 \cdot 4 + 2^3 \cdot 6 - 3^3 \cdot 4 + 4^3 \cdot 1 = 0.$$

Să admitem acum că pentru  $s < n - 1$  sînt adevărate egalitățile

$$\sum_{j=0}^{s-n-1} (-1)^j j^s C_{n-1}^j = 0$$

(am folosit aici și mai jos o notație mai neobișnuită pentru indicii de la sumă, pentru ca să economisim spațiu și să ușurăm munca culegătorului; în multe reviste se procedează astăzi așa):

$$\text{Vom folosi egalitate } C_n^k = \frac{n}{k} C_{n-1}^{k-1}$$

și obținem:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k k^m C_n^k &= n \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k k^{m-1} C_{n-1}^{k-1} = n \sum_{j=0}^{n-2} (-1)^{j+1} (j+1) \\ &+ 1)^{m-1} C_{n-1}^j = -n \sum_{j=0}^{n-2} [(-1)^j (\sum_{s=0}^{m-1} C_{m-1}^s j^s) C_{n-1}^j] = \\ &= -n \sum_{s=0}^{m-1} [C_{m-1}^s (\sum_{j=0}^{n-2} (-1)^j C_{n-1}^j)]. \end{aligned}$$

Dacă  $m < n$ , atunci în ultima expresie fiecare paranteză rotundă va fi nulă după presupunerea de inducție (întrucît  $s \leq m - 1 < n - 1$ ) și de aceea întreaga sumă este egală cu zero. Demonstrația este terminată.

Se mai pot da soluții bazate pe formule de combinatorică, pe identități între polinoame, pe teoria seriilor ș.a.

N.B. Vasiliev

**M 139.** Din vârful  $B$  al paralelogramului  $ABCD$  se duc înălțimile sale  $BK$  și  $BH$ . Se cunosc segmentele  $KH = a$  și  $BD = b$ . Să se găsească distanța de la punctul  $B$  pînă la punctul de intersecție a înălțimilor triunghiului  $BKH$ .

F.A. Bartenev



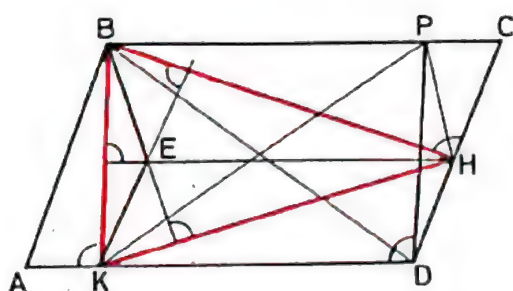


Fig. 215

(căci  $EHDK$  este paralelogram), iar segmentul  $BK$  este paralel și egal cu  $PD$ . Prin urmare,  $BE = PH$ . Dar  $PH$  se găsește ușor din triunghiul dreptunghic  $KHP$ :

$$PH^2 = KP^2 - KH^2$$

unde  $KP = BD = b$ ,  $KH = a$ . De aceea  $BE = \sqrt{b^2 - a^2}$ .

Remarcăm că rezolvarea se potrivește și în cazul în care unghiul  $B$  este un unghi obtuz (ca în fig. 215) și pentru cazul în care  $B$  este ascuțit — în acest caz punctele  $K$  și  $H$  sînt situate pe prelungirile laturilor.

F.A. Bartenev

**M 140.** Cu un număr natural (scris în sistemul zecimal) se fac următoarele operații:

- A) i se scrie la sfîrșit cifra 4;
- B) i se scrie la sfîrșit cifra 0;
- C) se împarte la 2 (dacă numărul este par).

De exemplu, dacă cu numărul 4 se fac succesiv operațiile C, C, A și B se obține numărul 140.

a) Cum se poate obține din numărul 4, numărul 1972?

b) Să se demonstreze că din numărul 4 se poate obține orice număr natural.

A.K. Tolpigo

a) În loc să obținem numărul 1972 din numărul 4 cu ajutorul operațiilor A, B, C vom obține din 1972 numărul 4 cu operațiile inverse:

- A') tăierea cifrei 4 de la sfîrșit;
- B') tăierea cifrei 0 de la sfîrșit;
- C') înmulțirea numărului cu 2.

Vom încerca de fiecare dată de cîte ori este posibil să aplicăm operațiile A' și B' pentru ca să micșorăm numărul nostru. Vom obține:  $1972 \rightarrow 3944 \rightarrow 394 \rightarrow 39 \rightarrow 78 \rightarrow 156 \rightarrow 312 \rightarrow 624 \rightarrow 62 \rightarrow 124 \rightarrow 12 \rightarrow 24 \rightarrow 2 \rightarrow 4$ .

Evident că citind acest șir de la capăt spre început vom obține rezultatul căutat. (Operația B' aici nu s-a folosit.)

b) Să demonstrăm că dacă cu fiecare număr  $N$  vom proceda la fel ca și cu 1972 (aplicînd operațiile A' sau B' și dacă este cazul C'), atunci după cîtiva pași ajungem la numărul 4.

Pentru aceasta este suficient să se demonstreze că în șirul care se obține, fiecare număr, după un anumit număr de pași se transformă într-un număr mai mic (sau în numărul 4). De aici rezultă că în final trebuie să ajungem la numărul 4, pentru că nu se poate construi un șir infinit de numere naturale în care după fiecare număr să întîlnim un număr mai mic.

Astfel, să ne convingem că orice număr, după un număr de operații  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  se poate micșora (sau să ajungem de la el la 4 și acest caz nu-l vom considera separat).

Dacă ultima cifră a numărului este 0 sau 4, atunci după aplicarea lui  $A'$  sau  $B'$  el se micșorează cel puțin de 10 ori.

Să presupunem că ultima cifră este diferită de 0 sau 4. În tabelul 1 se arată cum se schimbă ultima cifră prin aplicarea operației  $C'$  (operația  $C'$ , adică mărirea numărului de două ori o notăm cu o săgeată mai lungă, posibilitatea de aplicare a operațiilor  $A'$  sau  $B'$  printr-o săgeată mai scurtă:

Tabelul 1

0	→	→
1	→ 2	→ 4 →
2	→ 4	→
3	→ 6	→ 2 → 4 →
4	→	→
5	→ 0	→
6	→ 2	→ 4 →
7	→ 4	→
8	→ 6	→ 2 → 4 →
9	→ 8	→ 6 → 2 → 4 →

Din acest tabel se vede că dacă numărul  $N$  se termină în orice cifră afară de 9, atunci după cel mult trei aplicări ale lui  $C'$ , adică după o mărire de cel mult 8 ori, i se poate aplica  $A'$  sau  $B'$ , adică să se micșoreze de cel puțin 10 ori. Ca rezultat din  $N$  se obține un număr care nu depășește pe  $\frac{8}{10} N < N$ .

Rămâne să fie examinate numai numerele  $N$  care se termină în 9, care pînă la aplicarea lui  $A'$  se măresc de 16 ori. Observăm că oricare ar fi precedenta cifră înainte de 9 a numărului  $N$ , penultima cifră a numărului

$$16N = 16(10a + 9) = 160a + 144$$

este cu soț.

Dacă această cifră nu este 8, atunci  $16N$ , după  $A'$  și cel mult două operații  $C'$  se transformă din nou într-un număr cu cifra 0 sau 4 la sfîrșit, pe care-l putem micșora cel puțin de 10 ori. Ca rezultat, din  $N$  se obține un număr care nu depășește pe

$$\frac{16 \cdot 4N}{100} < N.$$

A mai rămas cazul în care  $16N$  se termină în 84. Observăm că oricare ar fi cifra înainte de 8 a acestui număr, după operațiile:  
 $16N = \dots 84 \rightarrow 10b + 8 \rightarrow \rightarrow \rightarrow 80b + 64 \rightarrow 8b + 6$  vom obține un număr care se termină cu o cifră cu soț.

Dacă această cifră nu este 8, atunci după cel mult două operații  $C$  vom obține un număr cu 0 sau 4 la sfîrșit, îi eliminăm și ca rezultat obținem un număr care nu depășește pe  $\frac{16 \cdot 8 \cdot 4}{1000} N < N$ . Dacă această cifră este 8, atunci după trei operații  $C'$  vom obține un număr cu penultima cifră cu soț și din el



(după  $A'$ , și cel mult trei de  $C'$  și eliminarea ultimei cifre) un număr care nu depășește pe

$$\frac{16 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8}{10\,000} N = \frac{8\,192}{10\,000} N < N.$$

Afirmația este demonstrată și problema este rezolvată.

Încercați să aplicați cele de mai sus pentru numărul 1249 pe care cu ajutorul operațiilor  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  să-l reduceți la 4 (este unul dintre cele mai „neplăcute” numere). O altă rezolvare se bazează pe procedeul care permite ca din orice număr par să se obțină un număr par mai mic (acest lucru este suficient pentru rezolvarea problemei). E suficient să se considere cinci cazuri: 1)  $10k \rightarrow k$ ; 2)  $10k + 2 \rightarrow 20k + 4 \rightarrow 2k$ ; 3)  $10k + 4 \rightarrow k \rightarrow 2k$ ; 4)  $10k + 6 \rightarrow 20k + 10 + 2 \rightarrow 40k + 20 + 4 \rightarrow 4k + 2$ ; 5)  $10k + 8 \rightarrow 20k + 10 + 6 \rightarrow 40k + 30 + 2 \rightarrow 80k + 60 + 4 \rightarrow 8k + 6$ .

N.B. Vasiliev

**M 141.** Luăm pe înălțimea  $BH$  a triunghiului  $ABC$  un punct arbitrar  $P$ . Fie  $K$  punctul de intersecție a dreptelor  $AP$  și  $BC$ ,  $L$  punctul de intersecție a dreptelor  $CP$  și  $AB$ . Să se demonstreze că segmentele  $KH$  și  $LH$  formează unghiuri egale cu înălțimea  $BH$  (fig. 216).

E.V. Sallinen

Această problemă se rezolvă ușor cu ajutorul unor noțiuni de geometrie analitică. Ca axe de coordonate este bine să se aleagă dreapta  $AC$  și înălțimea  $HB$  a triunghiului ( $H$  originea). Vom nota coordonatele punctelor așa cum se vede în figura 217 (în acest desen  $a < 0$  și  $c > 0$ ). Vom folosi următoarea lemă.

Ecuția dreptei care intersectează axa  $Hx$  în punctul  $(x_0, 0)$  și axa  $Hy$  în  $(0, y_0)$  este de forma

$$\frac{x}{x_0} + \frac{y}{y_0} = 1. \quad (1)$$

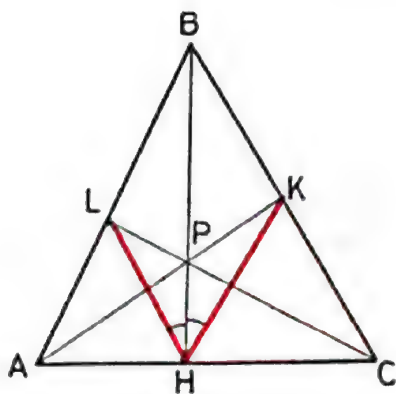


Fig. 216

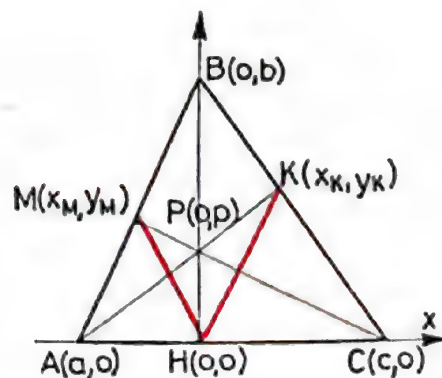


Fig. 217

Întrucît prin două puncte trece numai o singură dreaptă, pentru demonstrația lemei este suficient să se verifice că dreapta (1) trece prin fiecare dintre aceste puncte.

Din leamnă rezultă că coordonatele  $(x_K, y_K)$  ale punctului de intersecție a dreptelor  $AP$  și  $BC$  se obține ca soluția sistemului de ecuații

$$\begin{cases} \frac{x}{c} + \frac{y}{b} = 1 \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{p} = 1. \end{cases} \quad (2)$$

În mod analog, coordonatele  $(x_M, y_M)$  reprezintă soluția sistemului:

$$\begin{cases} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \\ \frac{x}{c} + \frac{y}{p} = 1. \end{cases}$$

Ne interesează coeficienții unghiulari ai dreptelor  $HK$  și  $HM$  — care sînt tangentele unghiurilor de înclinare a acestor drepte față de axa  $Hx$ . Scăzînd termen cu termen o ecuație a sistemului (2) din cealaltă, vom găsi:

$$x_K \left( \frac{1}{c} - \frac{1}{a} \right) + y_K \left( \frac{1}{b} - \frac{1}{p} \right) = 0$$

de unde

$$\operatorname{tg} \angle KHx = \frac{y_K}{x_K} = \frac{(a-c)bp}{ac(b-p)}. \quad (3)$$

Analog

$$\operatorname{tg} \angle MHx = \frac{y_M}{x_M} = \frac{(c-a)bp}{ac(b-p)}. \quad (4)$$

Observăm că acești coeficienți unghiulari sînt egali în valoare absolută și de semne contrare. De aici rezultă că dreptele  $KH$  și  $MH$  formează unghiuri congruente cu dreapta  $BH$  (și simetrice unul față de altul relativ la această dreaptă).

Desigur că aceleași formule (3) și (4) puteau fi obținute fără a introduce sistemul de coordonate considerînd mai multe perechi de triunghiuri asemenea. Se mai poate rezolva problema folosind teorema sinusurilor. Un avantaj al utilizării metodei analitice (în afară de scurtimea demonstrației) constă în faptul că nu trebuie să analizăm diferite așezări ale punctelor: rezolvarea este valabilă și în cazul în care unul dintre unghiurile  $A$  sau  $C$  este obtuz; ea nu merge numai în cazul „degenerat” în care unul dintre aceste unghiuri este drept, adică  $a$  sau  $c$  este zero; în acest caz ambele puncte  $K$  și  $M$  sînt situate pe dreapta  $BH$  așa că afirmația problemei este evidentă.

O altă rezolvare se bazează pe folosirea teoremei lui Ceva. Fie  $K_1$  și  $M_1$  punctele de intersecție a dreptelor  $HK$  și  $HM$  cu dreapta  $d$  care trece prin punctul  $B$  și este paralelă cu  $AC$  (fig. 218). Atunci pentru rezolvarea problemei este suficient să se demonstreze că  $BK_1 = BM_1$ .

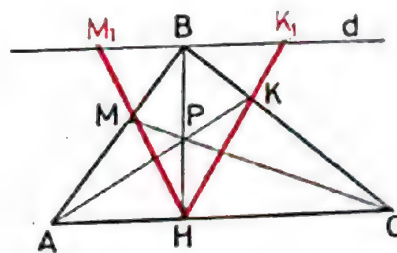


Fig. 218



(de unde va rezulta congruența  $\angle BK_1H = \angle BM_1H$ ) dar din asemănarea triunghiurilor  $BKK_1$  și  $CKH$  rezultă că

$$BK_1 = \frac{CH \cdot BK}{CK}$$

și analog

$$BM_1 = \frac{AH \cdot HM}{AM}$$

iar egalitatea cerută rezultă din următoarea teoremă.

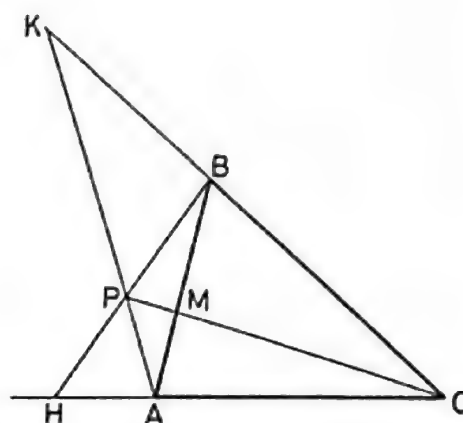


Fig. 219

**Teorema lui Ceva.** Dacă  $P$  este un punct din planul triunghiului  $ABC$ , iar  $K$ ,  $H$  și  $M$  sînt respectiv punctele de intersecție a dreptelor  $AP$  și  $BC$ ,  $BP$  și  $AC$ ,  $CP$  și  $AB$  (fig. 219), atunci

$$AH \cdot BM \cdot CK = CH \cdot AM \cdot BK$$

**Demonstrația teoremei.**

Vom nota prin  $S(ABC)$  aria triunghiului  $ABC$ . Atunci

$$\begin{aligned} \frac{AH}{CH} \cdot \frac{BM}{AM} \cdot \frac{CK}{BK} &= \frac{S(APH)}{S(CPH)} \cdot \frac{S(BPM)}{S(APM)} \cdot \frac{S(CPK)}{S(BPK)} = \frac{S(APH)}{S(BPK)} \cdot \frac{S(BPM)}{S(CPH)} \cdot \frac{S(CPK)}{S(APM)} = \\ &= \frac{PA \cdot PH}{PB \cdot PK} \cdot \frac{PB \cdot PM}{PC \cdot PH} \cdot \frac{PC \cdot PK}{PA \cdot PM} = 1. \end{aligned}$$

Propunem cititorilor să enunțe și să demonstreze reciproca problemei M 141.

**M 142. a)** Să se demonstreze că nu se pot numerota muchiile unui cub cu numerele 1, 2, ..., 12 astfel încît sumele numerelor corespunzătoare celor trei muchii care ajung în același vîrf să fie egale.

**b)** Se poate elimina unul dintre numerele 1, 2, ..., 12, 13 astfel încît, dacă cu celelalte numere rămase numerotăm muchiile cubului să fie îndeplinită condiția de mai sus?

N.N. Constantinov, N.B. Vasiliev

**a)** Să presupunem că se pot aranja cele douăsprezece numere 1, 2, ..., 12 pe muchiile unui cub astfel încît suma numerelor corespunzătoare muchiilor care ajung într-un vîrf să fie aceeași, egală cu  $s$ . Să adunăm cele opt astfel de sume corespunzătoare tuturor vîrfurilor cubului. În suma obținută de 24 de numere, fiecare dintre cele 12 numere 1, 2, ..., 12 intră de două ori pentru că fiecare muchie ajunge în două vîrfuri. Astfel

$$2(1 + 2 + \dots + 12) = 8s$$

de unde  $s = \frac{12 \cdot 13}{8} = \frac{39}{2}$ ;  $s$  rezultă neîntreg!. Contradicția obținută arată că nu se pot numerota muchiile în modul cerut.

**b)** Se poate.

Din rezolvarea de la punctul a) se vede că are sens să se elimine acel număr  $c$  pentru care

$$s = \frac{1 + 2 + \dots + 13 - c}{4} = \frac{91 - c}{4}$$

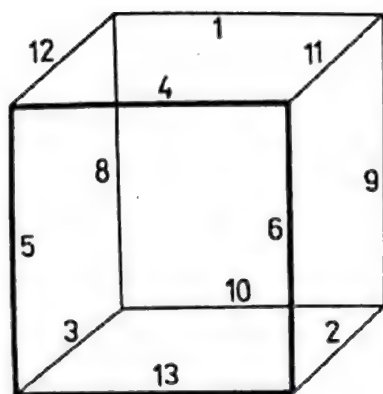


Fig. 220

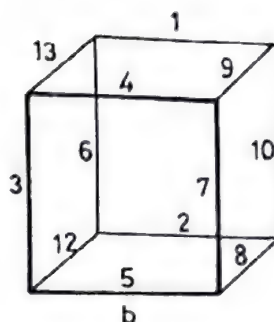
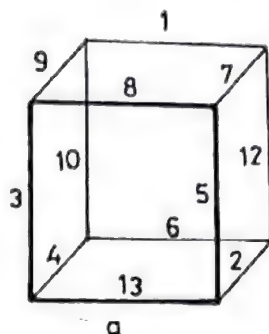


Fig. 221

este număr întreg, adică  $c = 3$ ,  $c = 7$  sau  $c = 11$ . Obținem respectiv,  $s = 22$ ,  $s = 21$  sau  $s = 20$ .

Dar, evident, acest lucru nu este suficient. Pentru justificarea răspunsului este necesar un exemplu. Iată unul pentru  $c = 7$  (fig. 220). În acest exemplu, fiecare pereche de numere simetrice față de 7 ( $k$ ,  $14 - k$ ) sînt scrise pe muchii simetrice față de centrul cubului.

Iubitorilor de probleme logice, care nu se sperie de luarea în considerare a unui număr destul de mare de variante le propunem să se gîndească la următoarele chestiuni: cîte moduri diferite de așezare a numerelor 1, ..., 6, 8, ..., 13 pe muchiile cubului, astfel încît să satisfacă condițiile problemei, există? (două moduri se consideră diferite dacă nu se pot obține unul din celălalt printr-o rotație sau printr-o simetrie a cubului). Există așezări ale numerelor pentru  $c = 3$  sau  $c = 11$ ? Iată cîteva indicații care ajută la construirea exemplorilor respective și la ușurarea căutărilor.

Așezarea numerelor 1, 2, ..., 6, 8, ..., 13 din figura 220 este unică. Există două așezări ale numerelor 1, ..., 10, 12, 13 (fig. 221 a, b) și două așezări ale numerelor 1, 2, 4, ..., 13; ele se obțin din cele precedente prin înlocuirea numerelor  $k$  prin „simetricele” lor:  $k \rightarrow 14 - k$ .

*Indicație.* Este util să observăm diferite relații liniare simetrice care rezultă din cerința problemei. (De exemplu diferența numerelor de pe două muchii opuse ale unei fețe trebuie să fie egală cu diferența numerelor de pe celelalte două muchii paralele cu ele ș.a.m.d.).

Este mai util ca de la început să se scrie toate tripletele de numere care au suma  $S$  (de exemplu, pentru  $S = 21$  există două triplete care conțin pe 13 și nu-l conțin pe 7; 13, 6, 2; 13, 5, 4 și două triplete „simetrice” cu acestea care conțin numărul 1).

Fiecare dintre aceste abordări sau combinația lor permite să se organizeze în mod rațional căutarea variantelor, să se stabilească situațiile menționate mai sus și să se demonstreze că altele nu există.

**M 143.** Să se găsească cel mai mic număr natural  $n$  care satisface următoarea condiție: dacă  $n$  se divide prin  $p - 1$  și  $p$  este prim, atunci  $n$  se divide prin  $p$ .

Presupunem că  $n$  satisface această condiție. Întrucît  $n$  se divide la  $1 = 2 - 1$ , el trebuie să se dividă la 2 dar atunci trebuie să se dividă la  $3 = 2 + 1$  la  $7 = 2 \cdot 3 + 1$  și la  $43 = 2 \cdot 3 \cdot 7 + 1$ . De aceea  $n$  trebuie să se dividă la  $1806 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 43$ .

Prin urmare, cel mai mic  $n$  (dacă există) nu e mai mic decît 1806. Pe de altă parte, pentru 1806 condiția problemei este îndeplinită. Iată toți divizorii numărului 1806:

$$1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, 42, 43, 86, 129, 301, 1806. \quad (1)$$



Mărind fiecare dintre aceste numere cu o unitate, obținem:

$$2, 3, 4, 7, 8, 15, 22, 43, 44, 87, 130, 302, 1807. \quad (2)$$

Rămine să alegem toate numerele prime din (2) și să vedem dacă intră în (1) (1807 nu e prim, se divide prin 13).

Răspuns 1806.

**M 144.** Să se găsească condițiile necesare și suficiente pe care trebuie să le îndeplinească numerele  $a, b, \alpha, \beta$ , astfel încât dreptunghiul  $a \times b$  să se poată descompune în câteva dreptunghiuri  $\alpha \times \beta$ .

De exemplu, dreptunghiul  $50 \times 60$  se poate descompune în dreptunghiuri de dimensiuni:

$$a) 20 \times 15; b) 5 \times 8; c) 6,25 \times 15; d) (2 - \sqrt{2}) \times (2 + \sqrt{2})?$$

A.T. Kolotov

Rezolvarea completă a problemei este dată de următoarea teoremă.

**T e o r e m ă.** Pentru ca dreptunghiul  $a \times b$  să se poată descompune în dreptunghiuri  $\alpha \times \beta$ , este necesar și suficient să fie îndeplinite concomitent următoarele condiții:

1) fiecare dintre numerele  $\alpha$  și  $\beta$  trebuie să fie de un număr întreg de ori mai mic decât cel puțin unul dintre numerele  $a, b$ .

2) fiecare dintre numerele  $a$  și  $b$  trebuie să poată fi scris în forma  $m\alpha + n\beta$ , unde  $m$  și  $n$  sînt numere naturale.

**Demonstrație.** Vom nota dreptunghiul mare prin  $R$  și cel mic prin  $\rho$ .

**Suficiența.** Dacă  $a = n\alpha$ ,  $b = m\beta$  ( $m$  și  $n$  numere naturale), atunci împărțind una dintre laturile dreptunghiului  $R$  la  $m$  părți și latura vecină în  $n$  părți egale și apoi ducînd prin punctele de diviziune drepte paralele cu laturile dreptunghiului  $R$ , îl vom împărți în dreptunghiuri congruente cu  $\rho$  (figura 222).

Dacă  $a = n\alpha = m\beta$ , atunci datorită condiției  $a$  doua,  $b$  admite o scriere de forma  $b = k\alpha + l\beta$ , unde  $k$  și  $l$  sînt numere naturale. Atunci, împărțind dreptunghiul  $R$  în două dreptunghiuri  $P$  și  $Q$  de dimensiuni  $a \times k\alpha$ , respectiv  $a \times l\beta$ , reducem acest caz la cel precedent (fig. 223).

**Necesitatea.** Necesitatea condiției  $a$  doua este evidentă. Vom demonstra necesitatea primei condiții. Sînt posibile două cazuri:

1. Numerele  $\alpha$  și  $\beta$  sînt comensurabile. Atunci fără a limita generalitatea se poate considera că  $\alpha, \beta, a$  și  $b$  sînt întregi, fiindcă acest lucru se poate realiza

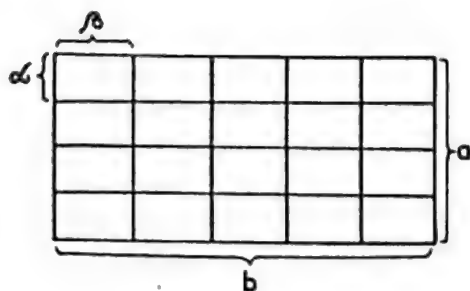


Fig. 222

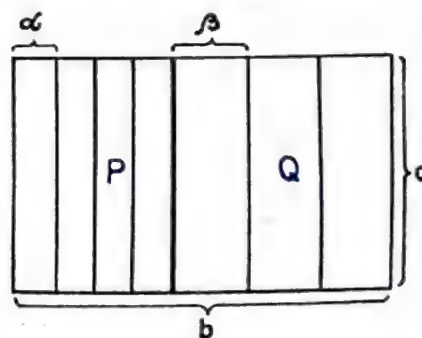


Fig. 223



Fig. 224

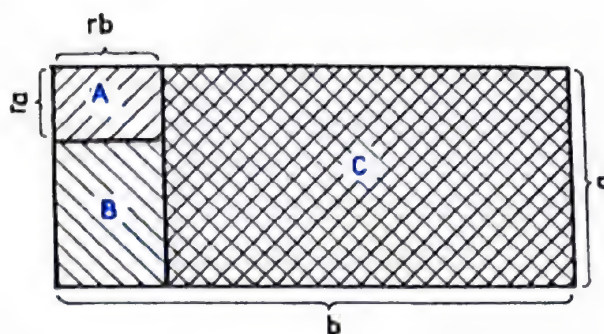


Fig. 225

printr-o alegere corespunzătoare a unității de măsură. Presupunem acum că afirmația noastră nu este adevărată și ca să precizăm, presupunem că nici  $a$  nici  $b$  nu se împart — fără rest — prin  $n$ . Împărțind dreptunghiul  $R$  în pătrate unitare, vom realiza în modul următor o colorare regulată a rețelei obținute în  $\alpha$  culori diferite (o colorare se numește regulată dacă orice rînd format din  $\alpha$  pătrate pe verticală sau pe orizontală, are toate cele  $\alpha$  culori). Anume, vom colora cu aceeași culoare pătratele situate pe „diagonalele” care merg de sus în jos și de la stînga la dreapta, iar culorile le vom repartiza astfel încît două astfel de diagonale între care se află alte  $\alpha - 1$ , să fie colorate la fel. Se vede ușor că dacă reușim să realizăm descompunerea cerută a dreptunghiului  $R$ , atunci fiecare dintre cele  $\alpha$  culori va apărea în același număr de pătrate în fiecare dintre dreptunghiurile obținute și deci numărul pătratelor din întregul dreptunghi  $R$  colorate într-o anumită culoare, nu depinde de alegerea acestei culori (în figura 224 este prezentată o colorare regulată în 4 culori).

Fie  $r_a$  și  $r_b$  resturile obținute prin împărțirea lui  $a$  și  $b$  prin  $\alpha$ . Vom descompune dreptunghiul  $R$  în trei dreptunghiuri  $A$ ,  $B$  și  $C$  de dimensiuni  $r_a \times r_b$ ,  $(a - r_a) \times r_b$  și  $a \times (b - r_b)$  astfel încît  $A$  să ocupe colțul din stînga sus al dreptunghiului inițial  $R$ ,  $B$  să ocupe locul de sub  $A$  iar  $C$  să fie situat la dreapta lui  $A$  și  $B$  (fig. 225). În dreptunghiul  $B$ , fiecare culoare se găsește în același număr de pătrate fiindcă  $a - r_a$  se împarte fără rest la  $\alpha$ . Aceeași afirmație este adevărată și pentru dreptunghiul  $C$ . De aceea, în virtutea observației precedente ea trebuie să fie adevărată și pentru  $A$ .

Să examinăm acum dreptunghiul  $A$  mai amănunțit. Ne interesează cele trei diagonale ale sale dintre care una pleacă din colțul din stînga sus al lui  $A$  și este colorată în culoarea  $i_1$ , iar celelalte două sînt vecine cu ea și sînt colorate în culorile  $i_2$  și  $i_\alpha$ . Evident că fiecare dintre culorile menționate se pot întîlni în dreptunghiul  $A$  numai pe diagonalele menționate. Dar atunci, dacă  $r_a \leq r_b$ , numărul căsuțelor de culoare  $i_\alpha$  este cu 1 mai mic decît numărul căsuțelor de culoare  $i_1$  (fig. 226), dacă  $r_a > r_b$ , atunci numărul căsuțelor de culoare  $i_2$  este cu 1 mai mic decît numărul căsuțelor de culoare  $i_1$  (fig. 227). În ambele cazuri ajungem la o contradicție.

2. Fie  $\alpha$  și  $\beta$  incomensurabile și ca să precizăm, fie  $\alpha < \beta$ . Dacă oricare două dreptunghiuri ale descompunerii sînt orientate la fel în raport cu laturile lui  $R$  (cu alte cuvinte, laturile mai mari ale acestor dreptunghiuri sînt paralele cu aceeași latură a dreptunghiului inițial), atunci afirmația teoremei este evidentă.

Vom demonstra că nu e posibil ca dreptunghiurile să aibă orientări diferite. Presupunînd contrarul, se poate considera fără a limita generalitatea, că chiar alăturate de baza dreptunghiului  $R$  sînt dreptunghiuri  $p$  de



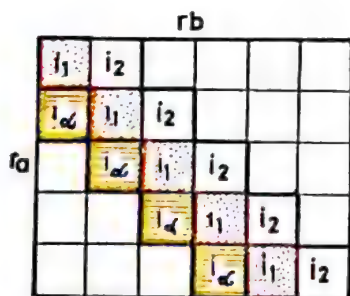


Fig. 226

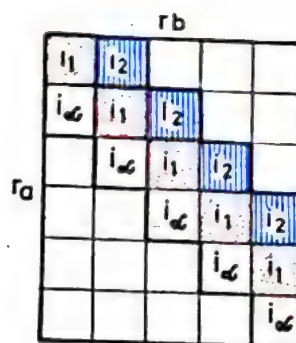


Fig. 227

orientări diferite. Vom descompune stratul de dreptunghiuri  $p$  alăturate bazei lui  $R$  în fragmente formate din dreptunghiuri la fel orientate astfel încât două fragmente vecine să aibă orientări diferite. Fiindcă oricare două fragmente vecine au înălțimi diferite, rezultă că dreptunghiurile oricărui fragment „inferior” sînt pe fundul „puțului” (fig. 228), ai cărui pereți sînt formați din laturile din margini ale fragmentelor vecine. (Unul dintre pereți poate fi desigur și una dintre laturile dreptunghiului  $R$ ).

Datorită incomensurabilității lui  $\alpha$  și  $\beta$  fiecare astfel de puț poate fi umplut numai cu dreptunghiuri de aceeași orientare ca și dreptunghiurile fragmentului care se găsește pe fund. Imediat ce se reușește umplerea acestor puțuri, fiecare dintre fostele fragmente „superioare” devine el însuși fundul unui „puț” ai cărui pereți laterali sînt formați din laturile din margine ale complexelor vecine formate din dreptunghiuri de altă orientare care au umplut „puțurile” precedente. După umplerea acestor noi puțuri se formează altele noi (figura 229) și așa mai departe.



Fig. 228

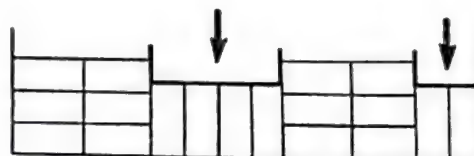


Fig. 229

De aceea, la fiecare pas, domeniul umplut cu dreptunghiuri va fi mărginit în partea superioară de o linie frîntă care are cel puțin o îndoitură și deci umplerea întregului  $R$  cu dreptunghiuri  $p$  nu este posibilă.

Astfel teorema este complet demonstrată.

Acum să vedem în ce dreptunghiuri se poate descompune dreptunghiul  $50 \times 60$ .

- În dreptunghiuri  $20 \times 15$  se poate descompune (după teoremă).
- În dreptunghiuri  $5 \times 8$  nu se poate descompune, întrucît cu 8 nu se divide nici 50 nici 60.
- Descompunerea în dreptunghiuri  $6,25 \times 15$  este evidentă (ambele numere  $50/6,25$  și  $60/15$  sînt întregi).

d) În dreptunghiuri  $(2 + \sqrt{2}) \times (2 - \sqrt{2})$  nu se poate descompune (nu este îndeplinită prima condiție a teoremei).

Încercați să găsiți un exemplu în care este îndeplinită condiția (1) și nu este îndeplinită condiția (2).

**M 145.** *A i-a promis lui B că-i va plăti în medie  $\sqrt{2}$  lei pe zi. Ei au convenit ca în ziua  $n$  — a, B să primească un număr întreg  $a_n$  de lei,  $a_n$  egal cu 1 sau cu 2, astfel încât suma primită după primele  $n$  zile să fie cât mai aproape posibil de  $n\sqrt{2}$ .*

*De exemplu,  $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 1, a_4 = 2, a_5 = 1$ . Să se demonstreze că șirul  $a_1, a_2, a_3, \dots$ , este neperiodic.*

A.K. Tolpigo

Ideea demonstrației constă în următoarele. Să presupunem că începând cu un anumit număr  $N + 1$  acest șir este periodic și fie  $T$  perioada sa, adică  $a_{N+T+1} = a_{N+1}, a_{N+T+2} = a_{N+2}$  ș.a.m.d. Atunci, după fiecare  $T$  zile care urmează după  $N$ , B va primi una și aceeași sumă de lei

$$a_{N+1} + a_{N+2} + \dots + a_{N+T} = c \quad (1)$$

De aceea, în medie (după un interval mare de timp) el va primi câte  $\frac{c}{T}$  lei pe zi. Dar după regula de construire a șirului  $a_n$ , el trebuie să primească în medie  $\sqrt{2}$  lei pe zi. Ajungem la o contradicție: egalitatea

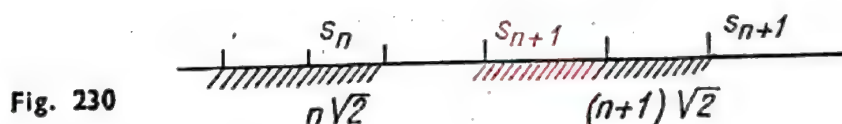
$$\frac{c}{T} = \sqrt{2} \quad (2)$$

nu este posibilă, întrucât numărul  $\sqrt{2}$  este irațional iar  $c$  și  $T$  sînt numere naturale.

Această idee se transformă într-o demonstrație riguroasă, de exemplu astfel:

Vom nota  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = s_n$ . Întrucât  $n\sqrt{2}$  este irațional și  $s_n$  este cel mai apropiat număr întreg de  $n\sqrt{2}$  (fig. 230) rezultă că

$$|s_n - n\sqrt{2}| < 1/2. \quad (3)$$



Presupunind că pentru  $n > N$  șirul  $a_n$  este periodic și folosind notația (1) pentru orice număr natural  $m$  vom avea

$$s_{N+mT} = s_N + mc \quad (4)$$

Aplicînd (3) la  $n = N + mT$  și ținînd cont de (4), vom obține

$$|s_N + mc - (N + mT)\sqrt{2}| < 1/2$$

de unde, folosind inegalitatea  $|\alpha + \beta| \geq |\alpha| - |\beta|$  și împărțind la  $mT$ , obținem

$$\left| \frac{c}{T} - \sqrt{2} \right| < \frac{1}{2mT} + \frac{|s_N - N\sqrt{2}|}{mT} < \frac{1}{mT}.$$

Această inegalitate trebuie să fie îndeplinită pentru orice  $m$ . De aici rezultă că partea stîngă a inegalității trebuie luată egală cu 0 (nici se folosește următoarea proprietate evidentă a numerelor reale: dacă  $\alpha > 0, \beta > 0$  atunci



există un număr natural  $m$  astfel încît  $m\alpha > \beta$ , proprietate numită „axioma lui Arhimede”) adică ajungem la egalitatea (2) care nu este adevărată pentru  $c$  și  $T$  numere naturale.

N.B. Vasiliev

**M 146.** În vîrfurile unui heptagon regulat sînt așezate fise albe și negre. Să se demonstreze că există trei fise de aceeași culoare care să fie situate în vîrfurile unui triunghi isoscel.

b) Este adevărată o afirmație analoagă pentru un octogon?

c) Să se stabilească pentru ce poligoane regulate cu  $n$  laturi este adevărată afirmația analoagă și pentru care nu.

A. Romanov

a) Evident că printre cele 7 vîrfuri se găsesc două vîrfuri alăturate cu fise de aceeași culoare (dacă culorile ar alterna, poligonul ar trebui să aibă un număr par de laturi).

Vom nota aceste vîrfuri prin  $A_1$  și  $A_2$ . Putem presupune că în ele sînt fise albe (fig. 231). Observăm că există trei vîrfuri astfel încît fiecare dintre ele împreună cu  $A_1$  și  $A_2$  să formeze triunghiuri isoscele. Aceste vîrfuri le vom nota  $A_0$ ,  $A_3$  și  $B$ . Dacă într-unul dintre ele este o fisă albă, atunci respectivul triunghi  $A_0A_1A_2$ ,  $A_3A_1A_2$  sau  $BA_1A_2$  este cel căutat. Dacă în fiecare dintre aceste vîrfuri este cîte o fisă neagră, atunci triunghiul  $A_0A_3B$  este cel căutat.

Același raționament este valabil pentru orice poligon regulat cu  $n$  laturi,  $n$  impar,  $n \geq 5$  (în rolul lui  $A_0$  și  $A_3$  intră vîrfurile vecine cu  $A_1$  și  $A_2$  iar în rolul lui  $B$ , vîrfurile de la mijlocul celui mai mare arc  $A_1A_2$ ).

b) Pentru  $n = 8$  afirmația nu este adevărată. Un exemplu de așezare a fiselor astfel încît nici un triplet de fise de aceeași culoare să nu fie situat în vîrfurile unui triunghi isoscel, este reprezentat în fig. 232, a). Mai ușor se construiesc astfel de exemple pentru  $n = 3, 4$  și  $6$  (fig. 232, b), c), d)); sînt posibile și alte exemple.

c) Răspuns: afirmația este adevărată pentru  $n = 5, n = 7$  și  $n = 9$ .

Exemplele din fig. 232 arată că afirmația nu este adevărată pentru  $n = 3, 4, 6, 8$ . Mai sus am demonstrat că este adevărată pentru  $n = 5, 7$  și pentru  $n$  impari și mari. Să demonstrăm că ea este adevărată pentru toți  $n \geq 9$ .

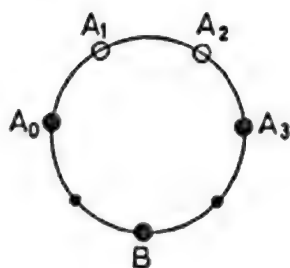


Fig. 231

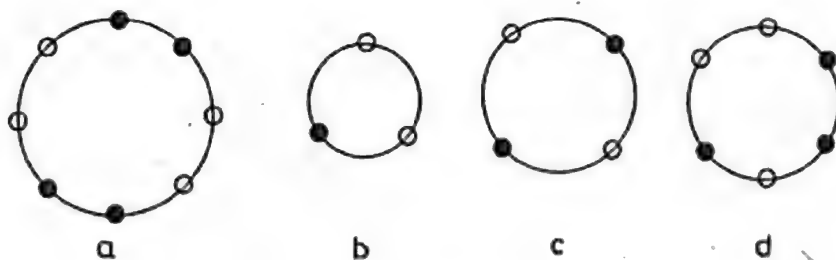
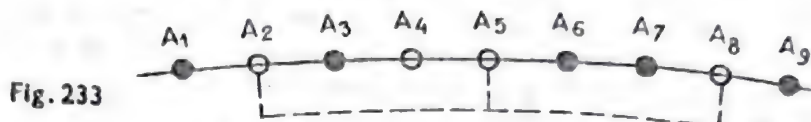


Fig. 232

Să presupunem că pentru o anumită așezare a fiselor în vîrfurile unui poligon regulat cu  $n$  laturi, afirmația nu este adevărată. Înainte de toate e clar că undeva se vor găsi două fise vecine de aceeași culoare — dacă culorile alternează, atunci deja după cinci vîrfuri consecutive vom găsi un triunghi isoscel. Putem considera că acestea sînt vîrfurile  $A_4$  și  $A_5$  cu fise de culoare albă (fig. 233). Atunci, în mod succesiv:

Considerăm	Tragem concluzia
$A_3, A_4, A_5$ și $A_4, A_5, A_6$	$A_3$ și $A_6$ negre
$A_3, A_5, A_9$	$A_9$ albă
$A_1, A_5, A_9$ și $A_5, A_7, A_9$	$A_1$ și $A_7$ negre
$A_1, A_3, A_5$ și $A_5, A_7, A_9$	$A_3$ și $A_7$ albe
$A_3, A_5, A_6$	contradicție



Se poate arăta că este adevărată și o afirmație mai tare: în orice descompunere a mulțimii 1, 2, ..., 9 în două submulțimi, cel puțin într-una dintre submulțimi se găsesc trei numere dintre care unul este semisuma celorlalte două. Am demonstrat această afirmație cu presupunerea suplimentară că 4 și 5 aparțin unei submulțimi. Alte cazuri se judecă analog.

**M 147.** Să se demonstreze că dacă patrulaterul inscriptibil  $ABCD$  este astfel încât tangentele la cercul circumscris în punctele  $A$  și  $C$  se intersectează pe prelungirea diagonalei  $BD$ , atunci

- tangentele în punctele  $B$  și  $D$  se intersectează pe prelungirea diagonalei  $AC$ ;
- bisectoarele interioare ale unghiurilor  $A$  și  $C$  ale patrulaterului se intersectează pe diagonala  $BD$  (iar ale unghiurilor  $B$  și  $D$  pe  $AC$ ).

I.F. Sărighin

a) Fie  $A$ ,  $B$  și  $C$  trei puncte pe un cerc și  $K$  punctul de intersecție a tangentelor duse în punctele  $A$  și  $C$ . Vom găsi condiția care determină poziția punctului  $D$  de intersecție a dreptei  $BK$  cu cercul (fig. 234).

$\triangle ABK \sim \triangle DAK$ ; unghiul  $K$  este comun iar  $\angle BAK = \angle ADK$  întrucât fiecare dintre acestea au ca măsură jumătatea măsurii arcului  $AB$ . Deci:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BK}{AK} = \frac{AK}{DK} \quad (1)$$

(pe drum am demonstrat cunoscuta teoremă  $AK^2 = BK \cdot KD$ ).

În mod analog,  $\triangle CBK \sim \triangle DCK$  și deci

$$\frac{BC}{CD} = \frac{BK}{CK} = \frac{CK}{DK} \quad (2)$$

Ultimele rapoarte din (1) și (2) sînt egale deci

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD} \quad (3)$$

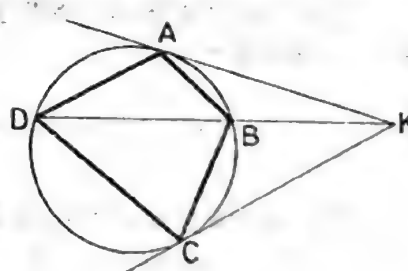


Fig. 234



Observăm că raportul  $AD/CD$  crește monoton odată cu deplasarea punctului  $D$  pe arcul cercului de la  $A$  la  $C$ . Într-adevăr, după teorema sinusurilor aplicată la triunghiul  $ACD$  (fig. 235) rezultă:

$$\frac{AD}{CD} = \frac{\sin \angle C}{\sin \angle A} = \frac{\sin (180^\circ - \angle D - \angle A)}{\sin \angle A} = \\ = \sin(180^\circ - \angle D) \cdot \operatorname{ctg} \angle A = \cos(180^\circ - \angle D)$$

aici,  $180^\circ - \angle D$  este o mărime constantă,  $\sin (180^\circ - \angle D) > 0$  și  $\operatorname{ctg} \angle A$  descrește monoton la creșterea unghiului  $A$  de la  $0^\circ$  la  $180^\circ - \angle D$  adică la deplasarea punctului  $D$  de la  $C$  la  $A$ . De aici rezultă că condiția (3) corespunde unei poziții determinate a punctului  $D$  (pentru  $A$ ,  $B$  și  $C$  dați).

Astfel, condiția (3) nu este numai necesară ci și suficientă pentru ca punctele  $B$ ,  $D$  și punctul de intersecție a tangențelor duse în punctele  $A$  și  $C$  să fie situate pe o dreaptă.

La fel se poate demonstra că condiția necesară și suficientă pentru ca tangentele duse în punctele  $B$  și  $D$  să se intersecteze pe dreapta  $AC$ , se poate scrie astfel:

$$\frac{BA}{DA} = \frac{BC}{DC} \quad (3')$$

Dar condițiile (3) și (3') evident coincid: și (3) și (3') pot fi scrise în formă simetrică

$$AB \cdot CD = BC \cdot AD.$$

Acest lucru face afirmația problemei a) evidentă.

b) Fie  $L_1$  punctul de intersecție a bisectoarei unghiului  $A$  al triunghiului  $BAD$  cu dreapta  $BD$  (fig. 236). Atunci, așa cum se știe:

$$\frac{BL_1}{L_1D} = \frac{AB}{AD}.$$

Analog, dacă  $L_2$  este punctul de intersecție a bisectoarei unghiului  $C$  cu  $BD$ , atunci

$$\frac{BL_2}{L_2D} = \frac{BC}{CD}.$$

De aceea din condiția (3) rezultă că

$$\frac{BL_1}{L_1D} = \frac{BL_2}{L_2D}.$$

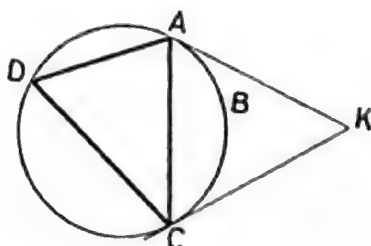


Fig. 235

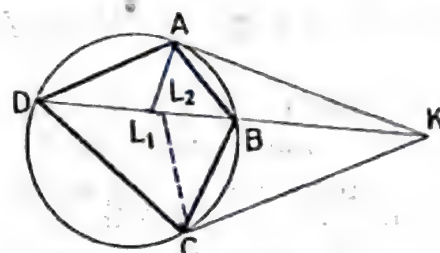


Fig. 236

Dar fiecărei valori a raportului  $\frac{BL}{DL}$  li corespunde un punct  $L$  pe segmentul  $BD$  intrucît prin deplasarea punctului  $L$  de la  $B$  la  $D$  această mărime crește monoton. De aceea punctele  $L_1$  și  $L_2$  coincid.

**M 148.** Șirul  $x_0, x_1, x_2, \dots$ , este determinat de următoarele condiții:  $x_0 = 1$ ,  $x_1 = \lambda$  și pentru orice  $n > 1$ ,  $(\alpha + \beta)^n x_n = \alpha^n x_n x_0 + \alpha^{n-1} \beta x_{n-1} x_1 + \alpha^{n-2} \beta^2 x_{n-2} x_2 + \dots + \beta^n x_0 x_n$ . Aici  $\lambda, \alpha, \beta$  sînt numere pozitive date. Să se găsească expresia lui  $x_n$  și să se stabilească pentru ce  $n$ , mărimea lui  $x_n$  va fi maximă.

A.L. Lopșit

Vom scrie egalitățile care-l determină pe  $x_n$  pentru cîteva dintre primele valori ale lui  $n > 1$  (folosind condiția  $x_0 = 1$ ):

$$[(\alpha + \beta)^2 - \alpha^2 - \beta^2]x_2 = \alpha\beta x_1^2$$

$$[(\alpha + \beta)^3 - \alpha^3 - \beta^3]x_3 = \alpha^2\beta x_2 x_1 + \alpha\beta^2 x_1 x_2,$$

$$[(\alpha + \beta)^4 - \alpha^4 - \beta^4]x_4 = \alpha^3\beta x_3 x_1 + \alpha^2\beta^2 x_2^2 + \alpha\beta^3 x_1 x_3.$$

De aici vom găsi (folosind condiția  $x_1 = \lambda$ )

$$x_2 = \frac{\lambda^2}{2}, \quad x_3 = \frac{\lambda^2}{2 \cdot 3}, \quad x_4 = \frac{\lambda^4}{2 \cdot 3 \cdot 4}.$$

Este natural să presupunem că

$$x_n = \frac{\lambda^n}{n!}.$$

vom demonstra prin inducție că presupunerea este adevărată. Presupunînd că  $x_k = \frac{\lambda^k}{k!}$  pentru toți  $k \leq n-1$ , rezultă

$$\begin{aligned} [(\alpha + \beta)^n - \alpha^n - \beta^n]x_n &= \sum_{k=1}^{n-1} \alpha^{n-k} \beta^k x_{n-k} x_k = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\alpha^{n-k} \beta^k \lambda^{n-k} \lambda^k}{(n-k)! k!} = \\ &= \frac{\lambda^n}{n!} \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k \alpha^{n-k} \beta^k = [(\alpha + \beta)^n - \alpha^n - \beta^n] \frac{\lambda^n}{n!}. \end{aligned}$$

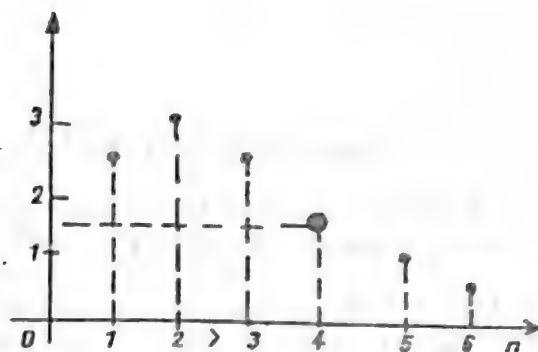
De aici rezultă, că  $x_n = \lambda^n/n!$  pentru că  $\alpha > 0$  și  $\beta > 0$  și factorul comun din ambii membri este pozitiv pentru  $n > 1$ , deci nenul și se simplifică.

Să vedem pentru ce  $n$ , valoarea lui  $x_n$  este maximă. Inegalitatea

$$\frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} \leq \frac{\lambda^n}{n!}$$

este echivalentă cu  $n \leq \lambda$ . Astfel, la trecerea de la  $n-1$  la  $n$ , numărul  $x_n$  se mărește dacă  $n < \lambda$ , și se micșorează dacă  $n > \lambda$ . De aici obținem răspunsul la întrebarea problemei:  $x_n$  ia cea mai mare valoare pentru  $n = [\lambda]$  ( $[\lambda]$  este întregul cel mai mare mai mic sau egal cu  $\lambda$ ); dacă  $\lambda$  este număr întreg, atunci  $x_{[\lambda]-1} = x_{[\lambda]}$  sînt cele două valori maxime ale șirului.





M 149. Fie  $O$  punctul de intersecție a diagonalelor patrulaterului  $ABCD$ . Să se demonstreze că

a) dacă perimetrele triunghiurilor  $ABC$ ,  $BCD$ ,  $CDA$  și  $DAB$  sînt egale, atunci  $ABCD$  este un dreptunghi.

b) dacă sînt egale perimetrele triunghiurilor  $ABO$ ,  $BCO$ ,  $CDO$  și  $DAO$  atunci  $ABCD$  este romb.

N.B. Vasiliev

a) Vom nota laturile și diagonalele patrulaterului așa cum se vede în figura 237. Din egalitățile

$$x_1 + x_2 + y_1 = x_3 + x_4 + y_1.$$

$$x_2 + x_3 + y_2 = x_1 + x_4 + y_2$$

adunîndu-le și scăzîndu-le, vom găsi:

$$x_2 = x_4, x_1 = x_3.$$

Prin urmare,  $ABCD$  este paralelogram.

Din egalitatea

$$x_1 + x_2 + y_1 = x_2 + x_3 + y_2 = x_2 + x_1 + y_2,$$

rezultă că  $y_1 = y_2$  rezultă că  $ABCD$  este dreptunghi.

b) Vom lua pe fiecare dintre diagonalele  $AC$  și  $BD$  pe cel mai mare dintre segmentele formate pe ele de punctul  $O$ . Se poate considera, schimbînd dacă e nevoie notațiile, că  $AO \geq OC$ ,  $BO \geq OD$  (fig. 238). Atunci perimetrul triunghiului  $AOB$  nu este mai mic decît perimetrul triunghiului  $COD$ , iar egalitatea este posibilă numai dacă  $AO = OC$  și  $BO = OD$  (pentru ca să ne convingem de acest lucru, este suficient să construim triunghiul  $A'OB'$ .

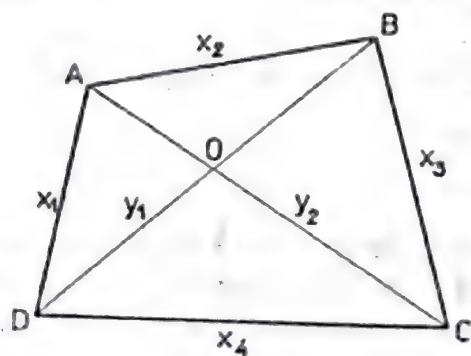


Fig. 237

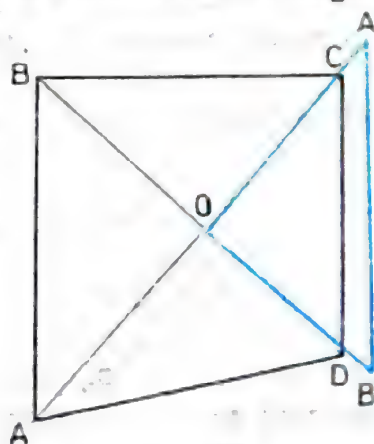


Fig. 238

simetric cu triunghiul  $AOB$  față de punctul  $O$ ;  $A'OB'$  acoperă pe  $COD$ ). Dar dacă  $AO = OC$  și  $BO = OD$ , atunci din egalitatea perimetrelor, rezultă deodată că  $AB = BC = CD = DA$  adică  $ABCD$  este romb.

N.B. Vasiliev

M 150. Din numerele  $1, 2, \dots, k$  se formează toate grupările posibile  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  de lungime  $n$  (se vede ușor că ele sînt  $k^n$ ). Se aleg două submulțimi  $P$  și  $Q$  ale mulțimii tuturor acestor grupări (aceeași grupare poate să intre și în  $P$  și în  $Q$ ). Se știe că dacă se ia o grupare arbitrară din  $P$  ( $p_1, p_2, \dots, p_n$ ) și o grupare arbitrară din  $Q$  ( $q_1, q_2, \dots, q_n$ ), atunci ele vor avea cel puțin un element comun (adică, pentru un anumit  $i$ ,  $p_i = q_i$ ). Atunci, sau în  $P$  sau în  $Q$  nu vor fi mai mult de  $k^{n-1}$  grupări.

Să se demonstreze această afirmație.

- a) pentru  $k = 2$  și orice  $n$ ;
- b) pentru  $n = 1, 2, 3$  și orice  $k$ ;
- c) pentru orice  $k \geq 2$  și  $n \geq 1$ .

Încercați să găsiți și alte limitări ale numărului de elemente din mulțimile  $P$  și  $Q$ , supuse la această condiție.

V.B. Alekseev

a)  $k = 2$ . Vom numi gruparea  $\bar{d}$ , opusă grupării  $d$ , dacă  $\bar{d}$  este obținut din  $d$  prin înlocuirea tuturor cifrelor 1 prin 2 și a cifrelor 2 prin 1. Vom nota prin  $\bar{M}$  mulțimea tuturor grupărilor formate din grupări opuse celor din  $M$ . Grupările  $d$  și  $\bar{d}$  nu au în nici o poziție același număr. De aceea, dacă  $d$  intră în  $P$  atunci  $\bar{d}$  nu poate intra în  $Q$ . Înseamnă că  $P$  și  $Q$  nu conțin aceleași grupări. De aceea, sau în  $P$  sau în  $Q$  nu sînt mai mult de jumătate dintre toate grupările. Dar în  $P$  și  $P$  sînt grupări în număr egal. Înseamnă că sau în  $P$  sau în  $Q$  nu sînt mai multe decît jumătate din toate grupările, adică nu sînt mai multe decît  $2^{n-1}$  grupări.

b) Pentru  $n = 1$ , afirmația este evidentă.

Pentru  $n = 2$  problema poate fi formulată astfel:  $k^2$  puncte sînt aranjate în plan în nodurile unei rețele pătrate  $(k - 1) \times (k - 1)$  (fig. 239). Unele dintre aceste puncte trebuie desenate cu cerceulețe pline (grupa I), altele cu cerceulețe avînd contur îngroșat (grupa II) albastru, astfel încît fiecare dintre punctele grupei I și fiecare dintre punctele grupei II să fie situat sau într-o singură linie sau într-o singură coloană (adică situația c) nu e posibilă). Un punct poate face parte din ambele categorii (cazul d). Trebuie să se demonstreze că punctele de o anumită categorie nu sînt mai multe decît  $k$ . Figurele a) și b) corespund următoarelor două cazuri.

1) În submulțimea  $P$  sînt două astfel de grupări  $(a_1, a_2)$  și  $(b_1, b_2)$  încît  $a_1 \neq b_1$  și  $a_2 \neq b_2$ .

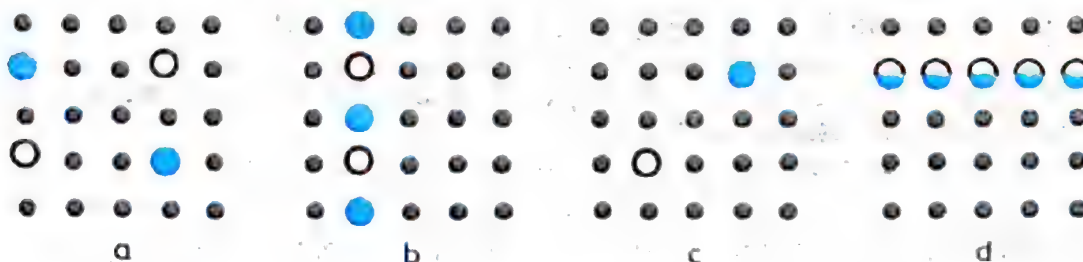


Fig. 239









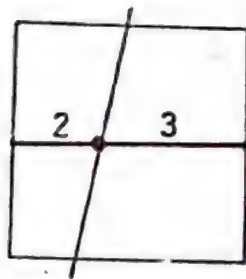


Fig. 240

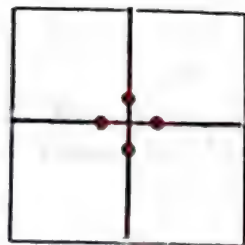


Fig. 241

Ca rezultat, vom obține că fiecare dintre cele 9 drepte va trece printr-unul dintre cele 4 puncte menționate (fig. 241).

Printr-unul dintre cele 4 puncte, vor trece neapărat cel puțin trei drepte. Într-adevăr, dacă prin fiecare punct vor trece cel mult două drepte, atunci, în total vor fi  $2 \cdot 4 = 8$  drepte ceea ce contrazice ipoteza.

Se poate indica o generalizare naturală a problemei : în loc de pătrat să considerăm un poligon cu  $2n$  laturi astfel încât laturile opuse să fie paralele și drepte, astfel încât fiecare dintre ele să împartă acest  $2n$  - poligon în două poligoane cu  $n + 2$  laturi de arii într-un raport dat.

Facem observația că dacă două laturi ale poligonului nu sînt paralele atunci dreptele care vor intersecta aceste laturi și vor descompune aria în raportul dat, nu vor mai trece printr-un punct (demonstrați!) ci vor fi tangente la o anumită hiperbolă.

B.M. Ivlev

**M 152.** Fie  $a, b, m, n$  numere naturale și  $a$  prim cu  $b, a > 1$ . Să se demonstreze că dacă  $a^m + b^m$  se divide prin  $a^n + b^n$ , atunci  $m$  se divide prin  $n$ .

D. Iu. Grigoriev

Cerința problemei poate fi precizată. Vom demonstra nu numai că  $m$  se divide prin  $n$ , adică  $m = kn$ , unde  $k$  este un număr întreg dar și că numărul  $k$  este obligator, impar. Vom desface demonstrația în trei părți.

1°. Fie  $m = kn$ , unde  $k$  este impar. Atunci  $a^m + b^m$  se divide prin  $a^n + b^n$ .

2°. Fie  $m = kn + r$  unde  $k$  este un număr impar și  $0 < r < n$ . Atunci  $a^m + b^m$  nu se divide prin  $a^n + b^n$ .

3°. Fie  $m = pn + r$  unde  $p$  este un număr par și  $0 \leq r \leq n$ . Atunci  $a^m + b^m$  nu se divide prin  $a^n + b^n$ .

Observăm că dacă vom demonstra 1°, 2°, 3° vom demonstra chiar mai mult și anume: pentru ca  $a^m + b^m$  să se dividă prin  $a^n + b^n$  este necesar și suficient ca  $m$  să fie egal cu  $kn$ , unde  $k$  este impar. La demonstrația punctelor 2° și 3° vom folosi faptul că  $a$  și  $b$  sînt prime între ele iar la demonstrația lui 1°, nu.

**Demonstrație.** 1°. Fie  $c$  și  $d$  numere întregi arbitrare. Atunci  $c^k + d^k$  unde  $k > 0$ , impar, se divide prin  $c + d$  (De aici, pentru  $c = a^n$  și  $d = b^n$  se obține 1°). Într-adevăr, așa cum se vede ușor pentru  $k$  impar

$$c^k + d^k = (c + d)(c^{k-1} - c^{k-2}d + \dots - cd^{k-2} + d^{k-1}).$$

**Demonstrație** 2°. Vom scrie pe  $a^m + b^m$  sub forma

$$a^{kn+r} + b^{kn+r} = a^r(a^{kn} + b^{kn}) + b^{kn}(b^r - a^r).$$

Conform lui 1° primul termen se divide prin  $a^n + b^n$ , al doilea termen nu se divide la  $a^n + b^n$  fiindcă  $b^{kn}$  este prim cu  $a^n + b^n$  și  $0 < |b^r - a^r| < a^n + b^n$ . Prin urmare, suma nu se divide prin  $a^n + b^n$ .

**Demonstrație** 3°. Dacă  $p$  este un număr par, atunci  $k = p - 1$  este un număr impar. Vom scrie pe  $a^m + b^m$  sub forma

$$a^{pn+r} + b^{pn+r} = a^{kn}a^{n+r} + b^{kn}b^{n+r} = a^{n+r}(a^{kn} + b^{kn}) + b^{kn}b^{n+r} - b^{kn}a^{n+r} + b^{kn}a^{n+r} - b^{kn}a^{n+r} + b^{kn}a^{n+r}.$$

Primii doi termeni se împart la  $a^n + b^n$ , iar ultimul, ca și mai sus nu se împarte. Într-adevăr,  $b^{kn}a^n$  este prim cu  $a^n + b^n$  și  $0 < b^n + a^n < a^n + b^n$ .

Dați exemple care să arate că fără cerința ca  $a$  și  $b$  să fie prime între ele, afirmațiile 2° și 3° nu sînt adevărate.

V.L. Gutenmaher

**M 153.** Două persoane joacă următorul joc. Unul spune o cifră, iar celălalt o pune după aprecierea sa în locul uneia dintre steluțele din scăderea următoare

\*\*\*\*

\*\*\*\*

Apoi, primul din nou spune o cifră și așa mai departe de 8 ori pînă se înlocuiesc toate steluțele prin cifre. Cel care spune cifrele, vrea să obțină o diferență cît mai mare posibilă, iar al doilea ca diferența să fie cît mai mică posibilă. Să se demonstreze că:

a) al doilea poate să aranjeze cifrele astfel încît diferența obținută să nu depășească 400 indiferent ce cifre spune primul;

b) primul poate să spună astfel de cifre încît diferența să nu scadă sub 4 000 indiferent unde va așeza cifrele cel de al doilea.

Iu. I. Ionin

Vom da rezolvarea în cazul general în care pe fiecare linie nu sînt 4 ci  $n$  steluțe. Vom demonstra că în cazul jocului celui mai bun al partenerilor diferența va fi egală cu  $4 \cdot 10^{n-1}$ .

a) Strategia celui de al doilea jucător.

Dacă prima cifră spusă de primul jucător este 4 sau mai mică, al doilea jucător o pune în locul ordinului celui mai mare al descăzutului. Apoi, cum spune primul jucător o cifră diferită de zero, al doilea o pune la ordinul cel mai înalt al scăzătorului. Diferența nu va fi mai mare decît  $\underbrace{499 \dots 9}_{n-1}$  —

—  $\underbrace{100 \dots 0}_n < 4 \cdot 10^{n-1}$ . Dacă primul jucător, începînd cu a doua mișcare de fiecare dată spune 0, atunci diferența de asemenea va fi mai mică sau egală cu  $4 \cdot 10^{n-1}$ .

Dacă primul jucător începe cu cifrele 5, 6, 7, 8 sau 9, al doilea le pune în locul ordinului celui mai înalt al scăzătorului iar apoi înlocuiește ordinul cel mai înalt al descăzutului prin prima cifră numită, diferită de 9. Chiar dacă toate cifrele următoare sînt 9, tot se obține o diferență care nu depășește  $4 \cdot 10^{n-1}$ .

b) Strategia primului jucător.

Pînă cînd rămîn libere ordinele superioare ale descăzutului și scăzătorului, primul jucător spune cifrele 4 și 5. Începînd cu momentul în care al doilea jucător completează unul dintre cele două ordine superioare și pînă la sfîrșitul jocului, primul jucător spune 0, dacă mai înainte s-a completat ordinul superior al descăzutului și 9 în celălalt caz. Rămîne să se precizeze în ce cazuri primul jucător va spune cifra 4 și în ce caz va spune 5.

Înainte de mișcarea sa, primul jucător va pune în gînd zero în toate locurile necompletate. Dacă după aceasta, diferența devine nenegativă, el va spune 4, dacă diferența va fi negativă va spune 5.

Să demonstrăm că strategia descrisă permite primului jucător să realizeze o diferență mai mare sau egală cu  $4 \cdot 10^{n-1}$ .



Dacă ordinul cel mai înalt al scăzătorului este ocupat de cifra 4, atunci la ordinul cel mai înalt al descăzutului va fi cifra 9:

$$\underbrace{900 \dots 0}_n - \underbrace{499 \dots 9}_n > 4 \cdot 10^{n-1}.$$

Dacă ordinul cel mai înalt al descăzutului este ocupat de cifra 5, atunci ordinul cel mai înalt al scăzătorului va fi ocupat de cifra 0 și

$$\underbrace{500 \dots 0}_n - \underbrace{099 \dots 9}_n > 4 \cdot 10^{n-1}$$

Să presupunem că primul jucător a spus cifra 4 și al doilea a completat cu ea ordinul cel mai înalt al descăzutului. Înainte de această mișcare diferența a fost nenegativă, după mișcare ea s-a mărit cu  $4 \cdot 10^{n-1}$  și mai mult nu s-a mai schimbat pentru că la toate mișcările următoare primul jucător a spus zero.

A rămas să se examineze cazul în care primul jucător a spus cifra 5 și al doilea a completat cu ea ordinul cel mai înalt al scăzătorului. Vom împărți cifrele spuse de primul jucător în serii, punând într-o serie cifrele identice consecutive. Vom considera că al doilea jucător nu va așeza una sub alta cifre identice căci în caz contrar ele ar putea fi eliminate și să nu fie considerate în raționamentele ulterioare. Vom demonstra acum că fiecare serie formată din 4 se termină astfel:

$$\begin{aligned} * \dots * a_m a_{m+1} \dots a_n \\ * \dots * 4 b_m b_{m+1} \dots b_n \end{aligned}$$

Faptul că prima serie se termină astfel este evident. Presupunem că a s-a serie formată din 4 se termină astfel. Vom demonstra că și a  $(s+1)$ -a serie se termină astfel. După a s - a serie de 4 urmează seria făcută din 5. Să considerăm cel mai din stînga 5 din această serie (amintim că cifrele șterse nu le considerăm). E clar că ea va intra în descăzut într-un ordin cu număr mai mic decît  $m$ , și sub el va sta fie o stelută fie, dacă va fi în ordinul  $m-1$ , un 4. Acest 5 este ultimul din seria sa. Într-adevăr, după ce el a fost pus diferența devine pozitivă și primul începe să spună cifre de 4. Dacă considerăm acum cea mai din stînga cifră 4 din a  $(s+1)$ -a serie, atunci cu ajutorul aceluiași raționament ne putem convinge că ea este situată în scăzător într-un ordin mai apropiat de primul decît ultimul 5 din seria precedentă, sub ea va fi o stelută și ea este ultima din seria sa.

De aceea, după ce s-a spus ultimul 4 apare următoarea situație

$$\begin{aligned} * * * \dots * a'_{k+1} \dots a'_n \\ * * * \dots * 4 b'_{k+1} \dots b'_n \end{aligned}$$

După aceasta, primul jucător va spune o dată sau de mai multe ori cifra 5 și, fiindcă după fiecare mișcare a sa scăzătorul a rămas mai mic decît descăzutul (prin înlocuirea stelutelor prin zero, făcută în gînd) atunci, înainte de a spune 9, a apărut următoarea situație:

$$\begin{aligned} * a_2 a_3 \dots a_{k-1} a_k a'_{k+1} \dots a'_n \\ 5 a'_2 a'_3 \dots a'_{k-1} 4 b'_{k+1} \dots b'_n \end{aligned}$$

unde pentru fiecare  $i = 2, 3, \dots, k-1$ , sau  $a_i = a'_i$  sau  $a'_i = 5$  și  $a_i$  este o

steluță, iar diferența dintre numerele

$$\begin{aligned} a_2 a_3 \dots a_{k-1} a_k \\ a_2 a_3 \dots a_{k-1} 4. \end{aligned}$$

este negativă. Într-adevăr, dacă ea ar fi pozitivă, atunci înainte de anunțarea lui 9, primul jucător ar anunța 4, iar zero ea nu ar putea fi, întrucît  $a_k$  este sau steluță sau 5. Pe de altă parte este clar că dacă pentru  $i < k$ ,  $a_i$  și  $a'_i$  nu sînt steluțe, atunci  $a_i = a'_i$ ; într-adevăr, ele au coincis în momentul apariției ultimului 4. De aceea, pentru un anumit  $j \leq k$ ,  $a_j$  este steluță iar sub el este un 4 sau un 5. Dar atunci este clar că diferența finală, nu e mai mică decît  $4 \cdot 10^{n-1} + 3 \cdot 10^{n-j} > 4 \cdot 10^{n-1}$ . Problema este rezolvată.

Iu. I. Ionin

**M 154.** Pe o dreaptă sînt date 50 de segmente. Să se demonstreze că este adevărată cel puțin una dintre următoarele propoziții:

- există opt segmente care au un punct comun;
- există opt segmente astfel încît oricare două dintre ele nu au puncte comune.

A.G. Harazișvili

Probabil că se pot da exemple de multe teoreme care să accepte ca un caz particular sau ca o consecință afirmația acestei probleme. Aici vom da numai una dintre ele.

**Teoremă.** Pe o dreaptă este dat un sistem arbitrar de segmente. Vom nota prin  $M$  numărul cel mai mic de puncte pe această dreaptă astfel încît fiecare dintre segmentele sistemului să conțină unul dintre aceste puncte; prin  $m$ , numărul cel mai mare de segmente care nu se intersectează două cîte două luate din sistemul nostru. Atunci  $M = m$ .

Inegalitatea  $M \geq m$  este evidentă: este clar că dacă în sistem sînt  $m$  segmente care nu se intersectează două cîte două, atunci nu pot exista mai puțin de  $m$  puncte astfel încît cîte unul să fie conținut în fiecare dintre segmentele sistemului (chiar pe cele  $m$  segmente alese trebuie să se ia cel puțin  $m$  puncte). A rămas de demonstrat inegalitatea  $M \leq m$ .

Pentru aceasta este suficient să se demonstreze că din sistem totdeauna se poate alege un anumit număr  $k$  de segmente care nu se intersectează  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  și în fiecare dintre ele să se aleagă cîte un punct  $A_1, A_2, \dots, A_k$  astfel încît fiecare dintre segmentele sistemului să conțină cîte unul dintre aceste puncte.

Dacă reușim să găsim aceste  $k$  segmente, atunci evident,  $M \leq k$  și  $k \leq m$ , de unde  $M \leq m$ . (De fapt atunci  $M = k = m$  căci inegalitatea  $M < m$  așa cum am văzut nu e posibilă.)

Să arătăm cum se pot alege aceste segmente și puncte.

Să ne închipuim că dreapta este situată în fața noastră orizontal. Vom lua acel segment  $\alpha_1$  al cărui capăt din stînga  $A_1$  este situat mai la dreapta decît capetele din stînga ale tuturor celorlalte segmente. Alegem din sistem toate segmentele care conțin punctul  $A_1$  (în particular pe  $\alpha_1$  — considerăm că segmentele despre care este vorba în problemă sînt segmente „închise” adică își conțin punctele de la extremități. De altfel afirmația, cum se verifică ușor, rămîne valabilă și pentru segmente-intervale „deschise” care nu-și conțin extremitățile).

Este clar că fiecare dintre segmentele rămase (dacă există) sînt situate în întregime la stînga punctului  $A_1$  și nu se intersectează cu  $\alpha_1$ . Segmentelor



rămase le aplicăm aceeași procedură și obținem segmentul  $\alpha_2$  și punctul  $A_2$ , apoi segmentul  $\alpha_3$  și punctul  $A_3$  și așa mai departe pînă cînd la stînga capătului din stînga  $A_k$  al segmentului  $\alpha_k$  nu mai este nici un segment din sistemul nostru. Segmentele  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  și punctele  $A_1, A_2, \dots, A_k$  satisfac toate cerințele. Teorema este demonstrată.

Să rezolvăm acum problema M 154. Vom demonstra că din  $pq + 1$  segmente de pe o dreaptă, se pot alege totdeauna  $p + 1$  segmente care au un punct comun sau  $q + 1$  segmente care nu se intersectează două cite două. (Pentru  $p = q = 7$ ) este chiar problema M 154.)

Într-adevăr, dacă pentru sistemul dat format din  $pq + 1$  segmente, mărimea  $M = m$  despre care e vorba în teoremă este mai mare decît  $q$ , atunci se pot alege  $m \geq q + 1$  segmente care nu se intersectează, iar dacă această mărime nu este mai mare decît  $q$ , atunci se poate alege o mulțime formată din  $M \leq q$  puncte care are cite un punct comun cu fiecare dintre cele  $pq + 1$  segmente. Atunci, fiecare dintre cele  $M$  puncte trebuie să fie conținut cel puțin în  $p + 1$  segmente: dacă fiecare punct ar fi conținut în cel mult  $p$  segmente, atunci în total numărul segmentelor nu ar fi mai mare decît  $Mp \leq pq$ .

N.B. Vasiliev

M 155. Se dau cîteva pătrate, suma ariilor căroră este egală cu 1. Să se demonstreze că ele pot fi așezate fără suprapuneri într-un pătrat de latură 2.

G.A. Galperin

Vom da două rezolvări ale acestei probleme bazate pe două moduri diferite de așezare a pătratelor și vom prezenta cîteva generalizări. Astfel, să presupunem că ni s-au dat cîteva pătrate de arie totală egală cu 1. Le vom numerota în ordinea de descreștere a laturilor, adică latura celui de al  $k$ -lea pătrat să nu fie mai mică decît latura celui de al  $(k + 1)$ -lea pătrat ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ). Trebuie să demonstrăm că toate aceste pătrate pot fi aranjate într-un pătrat de latură  $\sqrt{2}$ .

**Prima rezolvare.** Vom duce în plan un segment orizontal de lungime  $\sqrt{2}$  și prin extremitățile sale două semidrepte verticale. În „semibanda” formată (fig. 242) vom introduce pătrate.

Modul de aranjare este foarte simplu. Vom așeza pătratul cel mai mare în colțul din stînga jos (vom nota latura acestui pătrat prin  $x$ ) apoi următorul pătrat, după mărime, îl vom așeza la dreapta primului și aliniat după latura orizontală inferioară și așa mai departe pînă cînd pătratul care vine la rînd nu mai încapă în semibandă. Terminînd „primul etaj” punem „planșeul” prelungind latura superioară a pătratului din stînga pe toată lățimea benzii și pe segmentul obținut construim ca mai înainte „etajul al doilea”, apoi al treilea și așa mai departe pînă cînd se termină toate pătratele.

Acum, pentru a demonstra cerința problemei, trebuie să demonstrăm că înălțimea  $h$  (vezi fig. 243) nu depășește numărul  $\sqrt{2}$ . (Înainte de a urmări demonstrația în continuare, încercați să faceți demonstrația singuri.)

Pentru aceasta, considerînd mărimile lui  $h$  și  $x$  date, să încercăm să evaluăm inferior suma ariilor pătratelor din bandă.

Să transferăm în gînd fiecare dintre pătratele care sînt lipite de „zidul din stînga” (în afară de cel mai de jos, pătratul de latură  $x$ ) în capătul din dreapta al etajului precedent, așa cum se vede în figura 244.

Din modul de construire a etajelor, rezultă că fiecare dintre aceste pătrate va ieși dincolo de zidul din dreapta. Vom prelungi acum laturile orizontale



Fig. 242

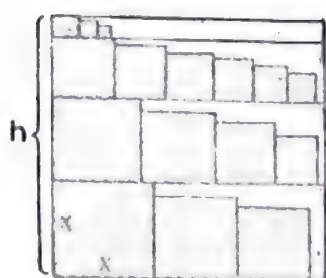


Fig. 243

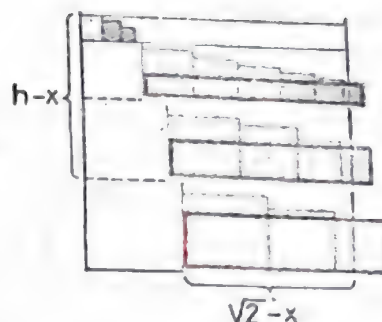


Fig. 244

ale fiecăruia dintre aceste pătrate transferate până la cel mai din stînga pătrat al respectivului etaj (se formează astfel niște dreptunghiuri care pe figura 244 sînt marcate cu roșu). Este clar că suma ariilor tuturor pătratelor (în afară de cel de latură  $x$ ) este mai mare sau egală cu suma ariilor dreptunghiurilor obținute. Întrucît bazele orizontale ale fiecărui dreptunghi sînt cel puțin  $\sqrt{2} - x$ , iar suma înălțimilor lor este egală cu  $h - x$ , rezultă că suma ariilor tuturor pătratelor este cel puțin  $(\sqrt{2} - x)(h - x)$ .

Dar din ipoteza problemei aria lor este egală cu 1. Astfel

$$x^2 + (\sqrt{2} - x)(h - x) \leq 1$$

de unde

$$h \leq \frac{1 - x^2}{\sqrt{2} - x} + x = \sqrt{2} \left[ 3 - \left( y + \frac{1}{y} \right) \right]$$

unde  $y = 2 - x\sqrt{2}$ .

Prin urmare, fiindcă mărimea  $y + \frac{1}{y}$  este mai mare sau egală cu 2, rezultă că  $h \leq \sqrt{2}$ .

**Rezolvarea a doua.** Dacă în prima rezolvare modul de aranjare a pătratelor era ușor de descris și greutatea principală consta în justificarea evaluării ariilor, într-a doua rezolvare situația este inversă, este greu de descris modul de aranjare (iar evaluarea va fi aproape evidentă).

Vom descrie aici modul de aranjare a pătratelor în mod formal. Descrierea „algoritmului” conform căruia vom aranja pătratele, este dată în aliniatul următor. După ce operația este efectuată de  $k$  ori, în pătratul  $\sqrt{2} \times \sqrt{2}$  vor fi așezate primele  $k$  pătrate (considerăm că ele sînt deja numerotate în ordine începînd cu cel mai mare) iar cealaltă parte a pătratului  $\sqrt{2} \times \sqrt{2}$  va fi descompusă în  $k + 1$  dreptunghiuri cărora le dăm numere de la 0 la  $k$ . Unele dreptunghiuri vor fi „închise” (acest lucru înseamnă că în ele nu vom mai introduce pătrate) iar celelalte „deschise” (în orice dreptunghi deschis se așează al  $(k + 1)$ -lea pătrat). Inițial, „dreptunghiul nr. 0” ocupă întregul pătrat  $\sqrt{2} \times \sqrt{2}$ . Astfel, algoritmul de așezare a pătratelor este:

Pasul al  $k$ -lea ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ). Alegem dintre toate dreptunghiurile neînchise pe acela care are numărul cel mai mare. (Fie acest număr  $m$ .) Așezăm în unghiul său al  $k$ -lea pătrat. Prolungim latura acestui pătrat, paralelă cu latura mai mică a dreptunghiului  $m$  (dacă laturile dreptunghiului sînt





egale, alegem pe oricare dintre ele) astfel încît partea din dreptunghiul  $m$  neocupată de pătratul  $k$  să se descompună în două dreptunghiuri, îi dăm numărul  $k$  aceluia care formează un dreptunghi împreună cu pătratul  $k$ , iar numărul  $m$  îl păstrăm pentru partea rămasă a „fostului” dreptunghi  $m$  (fig. 245). Pentru celelalte pătrate și dreptunghiuri, în afară de dreptunghiurile  $m$  și  $k$ , se păstrează vechile numere. Dacă al  $k$ -lea pătrat pe care l-am așezat nu este ultimul, vom verifica dacă al  $(k + 1)$ -lea pătrat nu se poate pune în dreptunghiul  $k$  și în dreptunghiul  $m$  și dacă nu, declarăm respectivul dreptunghi (sau pe ambele închise).

(În fig. 246, ca exemplu, este dată situația posibilă după al 4-lea pas.) Pentru  $k = 5$ , numărul  $m$  va fi egal cu 2; dreptunghiurile colorate sînt.

Mai trebuie demonstrat că nu se poate ivi cazul în care apar închise toate dreptunghiurile începînd chiar cu „numărul 0”. Înainte de a demonstra acest lucru, vom observa că aria dreptunghiului închis cu numărul  $k$  este mai mică decît aria pătratului cu numărul  $k$  (aceasta este ideea principală a modului de așezare a pătratelor). Într-adevăr, este clar că pînă cînd latura mai mică a dreptunghiului  $k$  este egală cu latura pătratului  $k$ , el nu poate fi închis (în el se va așeza chiar al  $k$ -lea pătrat).

Acum să presupunem că la un anumit pas, al  $n$ -lea, dreptunghiul 0 care ar avea pînă la acest pas dimensiunile  $c \times d$  ( $c \geq d$ ) este închis. E clar că la al  $n$ -lea pas,  $m = 0$  adică toate dreptunghiurile cu numere  $m > 0$  sînt închise și aria lor este mai mică decît aria respectivelor pătrate.

Fie  $u$  și  $v$  laturile pătratelor cu numerele  $n$  și  $n + 1$ . Dacă pătratul  $v \times v$  nu este situat în dreptunghiul  $d \times (c - u)$  (fig. 247), atunci  $v \geq c - u$ , de aceea

$$2(u^2 + v^2) \geq (u + v)^2 \geq c^2 \geq cd$$

adică, suma ariilor pătratelor al  $n$ -lea și al  $(n + 1)$ -lea este mai mare sau egală decît jumătatea ariei dreptunghiului  $c + d$ . Se obține, că chiar primele  $(n + 1)$  pătrate reprezintă mai mult decît jumătatea ariei pătratului  $\sqrt{2} \times \sqrt{2}$ . Contradicție.

Propunem cîteva probleme care precizează și generalizează problema M155.

1. Două pătrate congruente de latură  $a$  nu pot fi așezate fără să se intersecteze într-un pătrat de latură mai mică decît  $2a$ .
2. Mai multe pătrate care au suma ariilor egală cu  $S$ , iar latura celui mai mare dintre ele este  $x$ , pot fi așezate într-un pătrat de latură  $x + \sqrt{S - x^2}$ .
3. Aceste pătrate pot fi așezate într-un dreptunghi  $a \times b$ , dacă  $a \geq x$ ,  $b \geq x$  și  $ab \geq 2S$ .
4. Dacă orice sistem de pătrate de arie totală 1 pot fi așezate într-un dreptunghi  $a \times b$ , atunci este adevărată cel puțin una dintre condițiile: 1)  $a \geq \sqrt{3}$  și  $b \geq 1$ ; 2)  $a \geq \sqrt{2}$  și  $b \geq 2/\sqrt{3}$ .

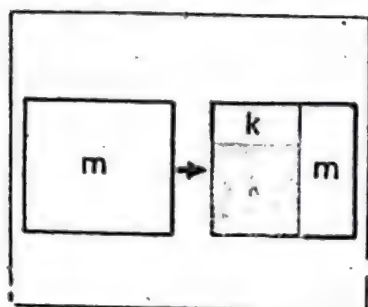


Fig. 245

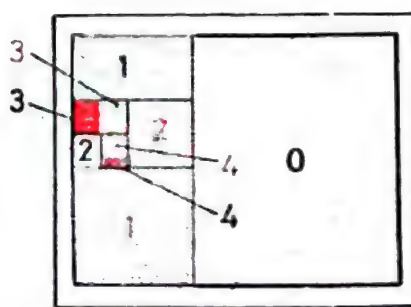


Fig. 246

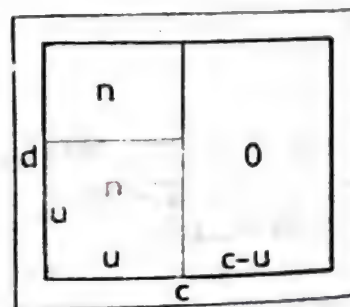


Fig. 247

D. Kleitman și M. Kriger au demonstrat că în dreptunghiul  $1 \times \sqrt{3}$  poate fi așezat orice sistem de pătrate de arie totală 1. Este probabil că o afirmație analoagă este adevărată și pentru dreptunghiul  $\sqrt{2} \times 2/\sqrt{3}$ .

5. Dreptunghiurile a căror arie totală este egală cu  $S$  și au cea mai mare dintre laturile lor egală cu  $x$  pot fi așezate într-un dreptunghi  $a \times b$ , dacă  $a \geq x$  și  $ab \geq 2S + a^2/8$ .

6. Cuburile de volum total  $V$  pot fi așezate într-un cub de volum  $4V$

N.B. Vasiliev, G.A. Galperin

**M 156.** În dreptunghiul  $ABCD$ , punctul  $M$  este mijlocul laturei  $AD$ , și  $N$  este mijlocul laturei  $BC$ . Pe prelungirea segmentului  $DC$ , dincolo de punctul  $D$  se ia punctul  $P$ . Notăm punctul de intersecție a dreptelor  $PM$  și  $AC$  prin  $Q$ . Să se demonstreze că  $\angle QNM = \angle MNP$ .

Iu. V. Miheev

Fie  $O$  centrul dreptunghiului (vezi fig. 248) (punctul de intersecție dintre  $MN$  și  $AC$ ),  $K$  punctul de intersecție a lui  $QN$  cu perpendiculara ridicată pe segmentul  $MN$  în mijlocul său  $O$ . Atunci, așa cum se vede ușor  $QM/MP = QO/OC = QK/KN$  și, prin urmare,  $MK \parallel PN$ . Dar triunghiul  $MKN$  este isoscel căci în el, după construcție,  $KO$  este și înălțime și mediană. De aceea  $\angle QNM = \angle KMN = \angle MNP$ .

Nu e greu să se rezolve problema și cu ajutorul calculelor. De exemplu, se poate utiliza metoda coordonatelor. Dacă luăm sistemul de axe așa cum se vede în figura 249, atunci coordonatele  $(x_0, y_0)$  ale punctului  $Q$  vor satisface următoarele două ecuații:

$$(p - 2b)x - ay = -2ab \text{ (ecuația dreptei } MP)$$

și

$$bx + ay = ab \text{ (ecuația dreptei } CA).$$

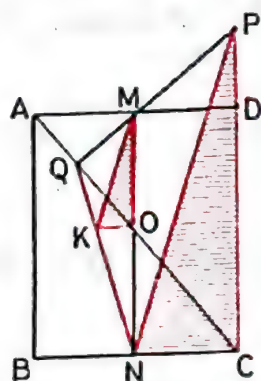


Fig. 248

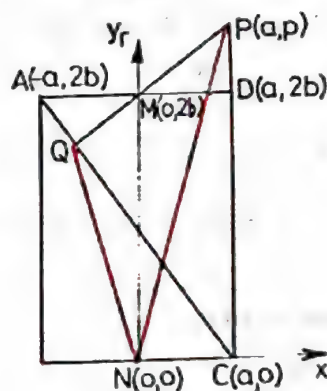


Fig. 249

Vom înmulți a doua ecuație cu 2 și o vom aduna cu prima. Obținem (pentru  $x = x_0, y = y_0$ )  $px_0 + ay_0 = 0$ . Astfel, coeficientul unghiular al dreptei  $NQ$  este egal cu  $y_0/x_0 = -p/a$ , adică, în afară de semn, este egal cu coeficientul unghiular  $p/a$  al dreptei  $NP$ . De aceea  $\angle QNM = \angle MNP$ .

N.B. Vasiliev



M 157. Suma a  $n$  numere pozitive  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  este egală cu 1. Fie  $S$  cel mai mare dintre numerele

$$\frac{x_1}{1+x_1}, \frac{x_2}{1+x_1+x_2}, \dots, \frac{x_n}{1+x_1+x_2+\dots+x_n}.$$

Să se găsească cea mai mică valoare posibilă a lui  $S$ . Pentru ce valori ale lui  $x_1, x_2, \dots, x_n$  se atinge?

Iu. I. Ionin

Să presupunem că numerele pozitive  $a_1, a_2, \dots, a_n$  sînt astfel încît  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$  și

$$\frac{a_1}{1+a_1} = \frac{a_2}{1+a_1+a_2} = \dots = \frac{a_n}{1+a_1+a_2+\dots+a_n}$$

(mai jos vom arăta că o astfel de alegere a numerelor  $a_1, a_2, \dots, a_n$  există). Vom arăta că pentru  $x_1 = a_1, x_2 = a_2, \dots, x_n = a_n$  mărimea  $S$  ia cea mai mică valoare posibilă. Fie  $b_1, b_2, \dots, b_n$  un alt grup de numere pozitive a căror sumă este egală cu 1. Să observăm că dacă  $x_k$  se mărește și toate numerele precedente lui  $(x_1, x_2, \dots, x_{k-1})$  nu se măresc, atunci mărimea

$$\frac{x_k}{1+x_1+\dots+x_{k-1}+x_k} = \frac{1}{\frac{1}{x_k} + \frac{x_1}{x_k} + \dots + \frac{x_{k-1}}{x_k} + 1} = \frac{1}{\frac{1+x_1+\dots+x_{k-1}}{x_k} + 1}$$

se mărește.

De aceea, dacă  $b_1 > a_1$ , atunci  $\frac{b_1}{1+b_1} > \frac{a_1}{1+a_1}$ ; dacă  $b_1 \leq a_1, b_2 > a_2$ , atunci  $\frac{b_2}{1+b_1+b_2} > \frac{a_2}{1+a_1+a_2} = \frac{a_1}{1+a_1}$ ; dacă  $b_1 \leq a_1, b_2 \leq a_2, b_3 > a_3$ , atunci  $\frac{b_3}{1+b_1+b_2+b_3} > \frac{a_3}{1+a_1+a_2+a_3} = \frac{a_1}{1+a_1}$  ș.a.m.d.

Întrucît grupul de numere  $b_1, b_2, \dots, b_n$  este diferit de grupul  $a_1, a_2, \dots, a_n$  și suma numerelor în amîndouă grupurile este aceeași, rezultă că  $b_k > a_k$  pentru un anumit  $k$ . Fie  $k$  cel mai mic indice cu această proprietate, adică  $b_1 \leq a_1, b_2 \leq a_2, \dots, b_{k-1} \leq a_{k-1}, b_k > a_k$ , atunci

$$\frac{b_k}{1+a_1+\dots+a_k} > \frac{a_k}{1+a_1+\dots+a_k} = \frac{a_1}{1+a_1}.$$

Astfel, cel mai mare dintre numerele

$\frac{b_1}{1+b_1}, \frac{b_2}{1+b_1+b_2}, \dots, \frac{b_n}{1+b_1+\dots+b_n}$  este mai mare decît  $\frac{a_1}{1+a_1}$  (care este cel mai mare dintre numerele

$$\frac{a_1}{1+a_1}, \frac{a_2}{1+a_1+a_2}, \dots, \frac{a_n}{1+a_1+a_2+\dots+a_n}).$$

Rămîne să se rezolve în numere pozitive sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1 \\ \frac{x_1}{1+x_1} = \frac{x_2}{1+x_1+x_2} = \dots = \frac{x_n}{1+x_1+x_2+\dots+x_n} \end{cases}$$

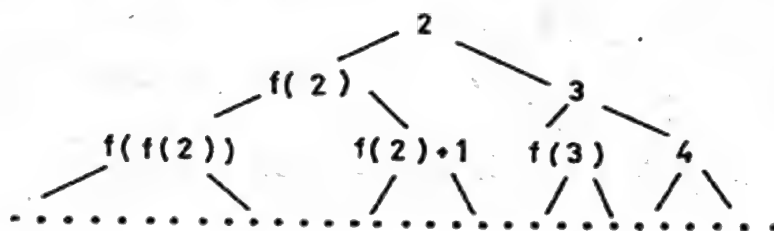
Ecuația  $\frac{x_1}{1+x_1} = \frac{x_k}{1+x_1+x_2+\dots+x_k}$  (pentru  $x_1, x_2, \dots, x_k$  pozitivi) se





număr care s-ar ridica la pătrat ar putea să fie  $r - 1$ . Dar  $s - (r - 1)^2 = 2r - 2$ . Aceasta înseamnă că numărul  $s$  s-a putut obține din numărul  $(r - 1)^2$  numai prin adăugarea de unități, iar pentru acest lucru sînt necesari  $2r - 2$  pași. Astfel, numărul  $s$  se obține din numărul  $a$  prin cel puțin  $2r - 1$  pași așa că  $n - 2 \geq 2r - 1$ . Dar toate numerele care se obțin din numărul  $a$  după un astfel de număr de pași, nu sînt mai puține decît  $a + 2r - 1 > r$  în timp ce numărul  $r$  așezat în aceeași linie ca și  $s$ , se obține din  $a$  după același număr de pași ca și  $s$ . Astfel, la obținerea numărului  $s$  din  $a$  nu a fost nici o ridicare la pătrat. Același lucru se poate spune și despre numărul  $q = s + 1$ . Prin urmare  $q$  este mai mic decît numărul cel mai de la dreapta din rîndul său ceea ce contrazice egalitatea  $q = p$ .

Problema poate fi generalizată în felul următor. Fie  $f$  o funcție definită pe mulțimea numerelor naturale și luînd valori în mulțimea numerelor naturale. Presupunem că  $f(n + 1) - f(n) > n + 1$  pentru fiecare număr natural  $n$ . Vom construi acum un tablou triunghiular ca și în problemă dar aplicînd de fiecare dată funcția  $f$  în locul ridicării la pătrat.



Atunci în fiecare rînd al tabloului toate numerele sînt diferite.

Dăm o consecință interesantă a problemei M158.

Fie un șir infinit de numere pozitive  $a_1, a_2, a_3, \dots$ , astfel încît, pentru fiecare număr natural  $n$

$$a_n < a_{n+1} + a_n$$

deci  $a_2 < a_3 + a_1, a_3 < a_4 + a_2, a_4 < a_5 + a_3$  ș.a.m.d. Atunci din aceste numere se pot alege cîteva, a căror sumă să fie mai mare decît 1000. Numărul 1000 poate fi înlocuit prin orice alt număr (Cum se spune: seria  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$  este divergentă).

Condiția de mai sus este îndeplinită în particular de șirul  $a_n = \frac{1}{n}$  așa că din această consecință se poate obține încă o demonstrație pentru cunoscuta teoremă asupra divergenței seriei armonice  $1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + \dots + 1/n + \dots$ : suma numerelor inverse numerelor naturale poate fi oricît de mare (în funcție de numărul termenilor).

**M 159.** Pot fi aranjate cifrele 0, 1, 2 în pătrățelele unei foi de hîrtie de dimensiune  $100 \times 100$  astfel încît în fiecare dreptunghi  $3 \times 4$  (cu laturi formate din laturile pătrățelelor) să fie trei de 0, patru de 1 și cinci de 2?

V.E. Lapițki

Să presupunem că am reușit să completăm o foaie de hîrtie în modul cerut. Să facem remarca, înainte de toate, că în cele două dreptunghiuri colorate din figura 250 se află același număr de 0, același număr de 1 și același număr de 2 întrucît, ele sînt completate de aceeași figură (partea necolorată) plină la un dreptunghi  $3 \times 4$ . Din același motiv, găsim același număr de 0, același număr de 1 și același număr de 2 în dreptunghiurile colorate din figura 251. Să demonstrăm acum o serie de afirmații privitoare la aranjarea cifrelor 0, 1 și 2.

1. Într-un dreptunghi  $1 \times 3$  nu se găsește mai mult de un zero.

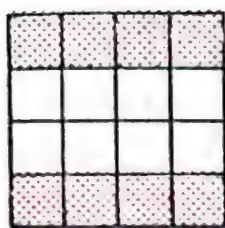


Fig. 250



Fig. 251

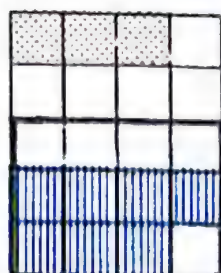


Fig. 252



Fig. 253

Într-adevăr, dacă în dreptunghiul roșu  $1 \times 3$  din figura 252 ar fi mai mult de un zero, atunci vor fi mai multe de un zero în fiecare dintre dreptunghiurile albastre  $1 \times 3$  și  $1 \times 4$ . În același timp, ambele dreptunghiuri albastre intră într-un dreptunghi  $3 \times 4$  în care trebuie să fie de trei zero.

2. Într-un dreptunghi  $1 \times 4$  nu se găsește mai mult de un zero.

Dacă în dreptunghiul roșu  $1 \times 4$  din figura 253 ar fi două zerouri, atunci ele ar fi așezate așa cum se vede în figură. Două zerouri ar trebui să fie și în dreptunghiul albastru și prin urmare câte un zero în fiecare dintre dreptunghiurile galbene. Dar atunci în cele două dreptunghiuri  $1 \times 4$  situate între cel roșu și cel albastru, nu vor fi zerouri (altfel s-ar găsi un dreptunghi  $3 \times 4$  care ar avea mai mult de trei zerouri). Prin urmare, în dreptunghiul  $3 \times 4$  marcat ar fi numai două zerouri.

3. Într-un dreptunghi  $1 \times 4$  se găsește cel puțin un zero.

Dacă în dreptunghiul roșu  $1 \times 4$  din figură nu ar fi zerouri, atunci nu vor fi nici în dreptunghiul albastru. Prin urmare în cele două dreptunghiuri  $1 \times 4$  dintre ele trebuie să fie trei zerouri. În același timp în fiecare dintre acestea nu poate fi mai mult decât unul.

Rezultă că în fiecare dreptunghi  $1 \times 4$  se găsește exact un zero.

4. Într-un dreptunghi  $1 \times 4$  nu se găsesc mai mulți decât doi de 1.

Dacă în dreptunghiul roșu din figura 255 ar fi mai mulți decât doi de 1, atunci ar fi mai mulți decât doi de 1 și în dreptunghiul albastru  $1 \times 4$  și n-ar fi mai puțini decât doi în dreptunghiul galben  $1 \times 3$ . Dar atunci s-ar găsi un dreptunghi  $3 \times 4$  care ar conține mai mulți decât patru de 1.

5. Într-un dreptunghi  $1 \times 4$  nu sînt mai mulți decât doi de 2.

Dacă în dreptunghiul roșu  $1 \times 4$  din figura 256 ar fi mai mulți decât doi de 2 atunci tot așa ar fi în dreptunghiul albastru și cel puțin doi de 2 în galben. În dreptunghiul  $1 \times 4$  situat deasupra dreptunghiului albastru se găsește cel puțin un 2 fiindcă în el sînt cel mult doi de 1 și un zero. Prin urmare, în dreptunghiul  $3 \times 4$  marcat sînt mai mulți de cinci de 2.

6. Într-un dreptunghi  $1 \times 3$  nu se găsesc mai mulți decât unu de 1.

Dacă în dreptunghiul roșu  $1 \times 3$  din figura 256 sînt doi de 1, atunci cîte doi de 1 sînt și în dreptunghiurile albastre  $1 \times 4$  și  $1 \times 3$  fiindcă în dreptunghiul galben se găsește un 1 cel puțin (în el nu sînt mai mulți decât doi de 2 și un zero), rezultă că în dreptunghiul marcat  $3 \times 4$  sînt mai mulți decât patru de 1.

7. Într-un dreptunghi  $1 \times 3$  se găsește cel puțin un 1. Dacă în dreptunghiul roșu  $1 \times 3$  din figura 257 nu ar fi nici un 1, atunci, întrucît în fiecare dintre dreptunghiurile albastre nu se găsește decât cel mult cîte un 1, în dreptunghiul  $3 \times 4$  ar fi numai trei de 1.



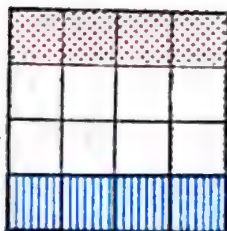


Fig. 254



Fig. 255



Fig. 256



Fig. 257

Astfel în fiecare dreptunghi  $1 \times 3$  se găsește exact un singur 1.

Să luăm un zero. În rând cu el se găsește un 1, căci altfel s-ar găsi un dreptunghi  $1 \times 3$  fără să aibă 1. Fiindcă într-un dreptunghi  $1 \times 4$  trebuie să fie un zero, iar într-un dreptunghi  $1 \times 3$  un 1, urmează că celelalte două pătrățele trebuie să conțină 2:  $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ . În următorul pătrățel după cei doi de 2, trebuie să fie și zero și 1 căci altfel s-ar găsi un dreptunghi  $1 \times 4$  fără zerouri respectiv un dreptunghi  $1 \times 3$  fără 1.

În sfârșit am obținut contradicția necesară.

Toate raționamentele pe care le-am făcut sint justificate, dacă dreptunghiul roșu cu care am început de fiecare dată nu e situat prea aproape de frontiera foi de hirtie. Dimensiunile foi  $100 \times 100$  sint suficiente ca să realizăm acest lucru. Încercați să stabiliți pentru ce dimensiune minimă a foi este adevărată afirmația problemei.

Iu. I. Ionin

**M 160.** După ce s-a terminat un turneu de hochei (într-un tur), s-a văzut că orice grupă de echipe am lua, se poate găsi o echipă (poate să fie din această grupă) care a obținut în jocurile cu echipele din această grupă un număr impar de puncte. Să se demonstreze că la turneu a luat parte un număr par de echipe. (Pierderea = 0 puncte, meci nul = 1 punct, victoria = 2 puncte).

G.A. Kasparov

Fie numărul echipelor  $N$ . Vom pune rezultatele turneului sub forma unui tablou  $N \times N$ . La intersecția liniei  $i$  cu coloana  $j$ , vom scrie numărul de puncte obținute de echipa  $i$  în jocul cu echipa  $j$ ; vom nota acest număr prin  $a_{ij}$ . Vom considera că echipa în jocul cu sine însăși a obținut 0 puncte, deci pe diagonală vor fi 0 ( $a_{ii} = 0$ ).

Să observăm acum că dacă  $a_{ij} = 0$  atunci echipa  $i$  a pierdut la echipa  $j$ , și atunci  $a_{ji} = 2$  fiindcă echipa  $j$  a câștigat la echipa  $i$ . La fel, dacă  $a_{ij} = 1$ , atunci și  $a_{ji} = 1$ . Deci în tabloul turneului este îndeplinită condiția  $a_{ij} + a_{ji} = 2$ .

Fiecărei echipe îi corespunde în tabloul turneului o linie și o coloană. Numărul punctelor obținute de echipa  $i$  în jocurile cu grupa de echipe cu numerele  $j_1, \dots, j_k$  este egal cu suma numerelor  $a_{ij_1}, \dots, a_{ij_k}$  situate la intersecția liniei  $i$  cu coloanele  $j_1, \dots, j_k$ .

Acum putem să uităm de turneul de hochei și să reformulăm problema în limbajul tablourilor.

Fie un tablou pătratic  $N \times N$  format din numere întregi  $a_{ij}$  care satisfac următoarele două condiții:

1) toate numerele  $a_{ii}$  de pe diagonală sa sint pare și suma oricăror două numere simetrice față de această diagonală este tot pară;

2) pentru fiecare grupă de coloane, se găsește o linie astfel încât suma numerelor de la intersecția acestei linii cu coloanele acestei grupe este impară.

Trebuie să se demonstreze că condițiile 1) și 2) se pot realiza atunci și numai atunci când  $N$  este par.

Desigur că rezolvind această problemă nouă, rezolvăm și problema M 160.

Vom demonstra prin reducere la absurd. Să admitem că există un tablou  $N \times N$  cu  $N$  impar care satisface condițiile 1) și 2). Vom arăta că atunci se poate construi un tablou  $(N-2) \times (N-2)$  care să satisfacă și el condițiile 1) și 2). Aplicând această construcție de  $\frac{N-1}{2}$  ori, vom obține un tablou

format dintr-un singur număr și care satisface condițiile 1) și 2). Acest lucru însă nu se poate întâmpla, pentru că un tablou  $1 \times 1$  nu poate satisface ambele condiții 1) și 2) concomitent. Înseamnă că presupunerea făcută se dovedește falsă și deci afirmația problemei este demonstrată.

Pentru ca să obținem dintr-un tablou  $N \times N$  un tablou  $(N-2) \times (N-2)$  păstrind condițiile 1) și 2), vom introduce următoarele transformări ale tablourilor:

**Transformarea 1.** Schimbăm locul liniei  $i$  cu linia  $j$  și a coloanei  $i$  cu coloana  $j$ .

**Transformarea 2.** Coloana  $i$  o înlocuim cu suma dintre coloana  $i$  și coloana  $j$  și apoi înlocuim linia  $i$  cu suma dintre linia  $i$  și linia  $j$ .

Să explicăm transformarea 2; liniile  $i$  și  $j$  pot fi considerate ca niște grupe de  $N$  numere  $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{iN})$  și  $(a_{j1}, a_{j2}, \dots, a_{jN})$ ; se va numi suma celor două linii, următoarea sumă:  $(a_{i1} + a_{j1}, \dots, a_{iN} + a_{jN})$ ;

de exemplu

$$\begin{array}{r} (010102) \\ + (101110) \\ \hline (111212) \end{array}$$

În mod analog se definește suma dintre coloana  $i$  și coloana  $j$ .

Înainte de toate să înlocuim toate numerele pare din tablou prin 0 iar cele impare prin 1. Vom obține un tablou simetric, adică  $a_{ij} = a_{ji}$  și  $a_{ii} = 0$ , deci condiția 1) este îndeplinită. Evident că și condiția 2) se păstrează.

Să considerăm ultima coloană, a  $N$ -a a acestui tablou. Conform proprietății 2), pentru ea se va găsi o linie astfel încât la intersecția lor să fie 1; dacă numărul liniei este  $k$ , atunci  $a_{kN} = 1$  și prin urmare,  $a_{Nk} = 1$  (aici am aplicat condiția 2) la o coloană).

Efectuăm acum transformarea 1: schimbăm locurile liniilor  $k$  cu  $N-1$  și a coloanelor  $k$  cu  $N-1$ .

Ca rezultat, tabloul va avea următorul aspect:

$$A = \begin{vmatrix} 0 & \dots & a_{1(N-1)} & a_{1N} \\ a_{21} & \dots & a_{2(N-1)} & a_{2N} \\ a_{31} & \dots & a_{3(N-1)} & a_{3N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{(N-2)1} & \dots & a_{(N-2)(N-1)} & a_{(N-2)N} \\ a_{(N-1)1} & \dots & 0 & 1 \\ a_{N1} & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$



Aplicând acum de câteva ori transformarea 2, (folosind cele două coloane extreme și cele două linii extreme) putem să aducem tabloul la forma următoare

$$\bar{A} = \left| \begin{array}{cccc} \bar{a}_{11} & \dots & \bar{a}_{1(N-2)} & 0 & 0 \\ \bar{a}_{i1} & \dots & \bar{a}_{i(N-2)} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{a}_{(N-2)1} & \dots & \bar{a}_{(N-2)(N-2)} & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{array} \right|$$

Amintim că numărul 2 l-am înlocuit prin 0. Eliminând din acest tablou ultimile două linii și ultimile două coloane, vom obține un nou tablou  $(N-2) \times (N-2)$ . Rămâne să verificăm că el satisface condițiile 1) și 2).

Transformările 1 și 2 transformă tablouri simetrice tot în tablouri simetrice și nu schimbă paritatea numerelor de pe diagonală. Prin urmare, noul tablou va satisface condiția 1).

Rămâne să verificăm că transformările 1 și 2 păstrează condiția 2). Pentru transformarea 1 acest lucru este cu totul evident. Rămâne să demonstrăm acest lucru pentru transformarea 2.

Dacă grupa de coloane considerată nu conține coloana  $i$  și se poate indica linia  $k$  care să satisfacă condiția 2), unde  $k$  nu este egal cu  $i$ , atunci este evident că și după transformarea liniei  $k$  o va satisface.

Dacă acest lucru nu se poate face, adică  $k = i$  (cel puțin o linie înainte de transformare există) atunci pentru linia  $j$ , suma corespunzătoare este pară. De aici e clar că în tabloul transformat suma pentru linia  $i$ , ca înainte este impară.

În mod analog se judecă situația în care în grupa de coloane intră coloana  $i$ . Dacă în ea, nu intră coloana  $j$ , atunci trebuie să se ia o linie „care deservește” grupa completată cu coloana  $j$  și dacă intră, atunci invers, trebuie eliminată. Am reușit să trecem de la un tablou  $N \times N$  la un tablou  $(N-2) \times (N-2)$ . Astfel problema este complet rezolvată.

Se vede că problema este un caz particular al unei teoreme generale din algebra liniară:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{dacă } a_{ij} + a_{ji} = 0 \text{ și sistemul de ecuații} \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1N}x_N = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2N}x_N = 0 \\ \dots \\ a_{N1}x_1 + a_{N2}x_2 + \dots + a_{NN}x_N = 0 \end{array} \right.$$

are numai soluția banală, atunci  $N$  este par. Această teoremă este adevărată atât pentru numere reale cât și pentru orice elemente dintr-un corp comutativ. Ea se poate demonstra atât cu ajutorul determinantilor, cât și cu ajutorul unor „transformări elementare” ale tabloului format din  $a_{ij}$  așa cum s-a procedat mai sus.

Încercați să demonstrați această teoremă și să deduceți din ea rezolvarea problemei M 160.

**M 161.** Un lac are forma unui poligon neconvex cu  $n$  laturi. Să se demonstreze că mulțimea punctelor lacului din care se vede tot malul său, este sau vidă sau reprezintă interiorul unui poligon convex cu  $m$  laturi, unde  $m \leq n$ .

I.N. Bernștein

Fie  $l$  o latură a poligonului. Dreapta pe care este situată, împarte planul în două semiplane; notăm prin  $D_l$  semiplanul situat de aceeași parte a laturii

rei  $l$  ca și lacul. Această dreaptă nu o includem în semiplanul  $D_l$ . Intersecția  $D$  a tuturor celor  $n$  semiplane astfel obținute este sau vidă sau reprezintă un poligon convex cu un număr de laturi  $m \leq n$ .

Vom demonstra că  $D$  coincide cu mulțimea punctelor din care se poate vedea tot malul lacului.

1. Fie  $O$  un punct din  $D$ . Vom demonstra că tot malul este vizibil din punctul  $O$ . Fie  $A_1, A_2, \dots, A_n$  virfurile poligonului lac. Vom uni prin segmente punctele  $O, A_1, A_2$  și vom examina unde se poate găsi punctul  $A_3$ .

Cum se vede din figura 258, virful  $A_3$  nu se poate găsi de aceeași parte față de dreapta  $OA_2$  ca și virful  $A_1$  (s-a hașurat acea parte a segmentelor de care este lacul). Rezultă că punctele  $A_1$  și  $A_3$  se găsesc de părți diferite ale dreptei  $OA_2$ .

Să presupunem că punctul  $X$  se mișcă pe marginea lacului (de la  $A_1$  la  $A_2$ , de la  $A_2$  la  $A_3$  ș.a.m.d.). Când  $X$  se mișcă de la  $A_1$  la  $A_2$ , segmentul  $OX$  se rotește într-un anumit sens (de exemplu, în sensul acelor ceasului). Fiindcă  $A_1$  și  $A_3$  sînt situate de părți diferite ale segmentului  $OA_2$ , rezultă că prin mișcarea lui  $X$  de la  $A_2$  la  $A_3$  segmentul se va roti în același sens. Raționînd analog pentru punctele  $A_2, A_3, A_4, \dots$ , vedem că prin mișcarea de la  $A_3$  la  $A_4$ , de la  $A_4$  la  $A_5$  ș.a.m.d. segmentul  $OX$  se rotește în același sens.

Cînd segmentul  $OX$  realizează o rotație completă, atunci punctul  $X$  coincide cu punctul  $A_1$ . Într-adevăr, să presupunem că punctul  $X$  nu ar coincide cu  $A_1$ ; de exemplu,  $OX < OA_1$ . Atunci, în deplasarea sa ulterioară punctul  $X$  nu poate să mai ajungă în punctul  $A_1$  fiindcă el nu poate ieși din poligonul  $DA_2A_3\dots A_kA_{k+1}$  (fig. 259) adică conturul poligonului nu s-ar închide.

Prin urmare, în interiorul triunghiului  $OA_1A_2$  nu este nici un punct al conturului și malul  $A_1A_2$ , și deci, întregul mal al lacului se vede din punctul  $O$ .

2. Presupunem că din  $O$  se vede întreg malul lacului. Să considerăm latura  $l = CB$  a poligonului  $A_1\dots A_n$ . Atunci este evident că triunghiul  $OCB$  este situat complet în interiorul lacului deci punctul  $O$  este situat în interiorul lui  $D_l$ . Deci punctul  $O$  în modul acesta este situat în interiorul tuturor semiplanului  $D_l$  adică este situat în  $D$ .

Astfel am demonstrat că mulțimea punctelor din care se vede tot malul coincide cu mulțimea  $D$  și deci este sau vidă sau formează un poligon convex cu  $m$  laturi, unde  $m \leq n$ .

I.N. Bernștein

**M 162.** Șirul următor format din numere naturale

$$a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n < \dots \quad (A)$$

are proprietatea că orice număr natural sau face parte din acest șir sau este suma a doi termeni, eventual egali, ai șirului.

Să se demonstreze că  $a_n \leq n^2$  pentru toți  $n = 1, 2, \dots$

Iu. G. Eroșkin (elev cl. a IX-a)

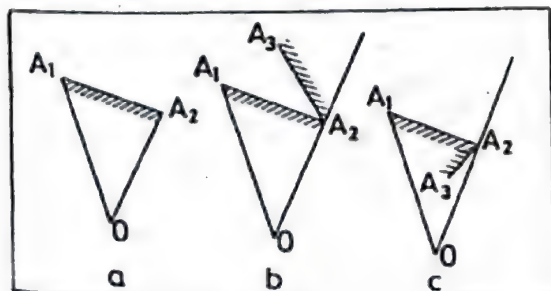


Fig. 258

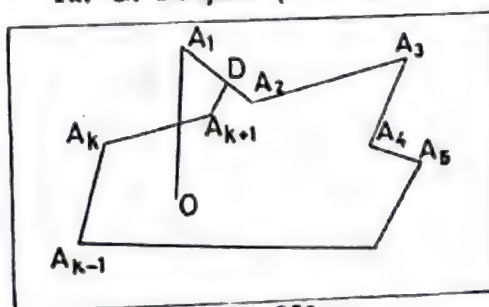


Fig. 259



Să considerăm primii  $n - 1$  termeni ai șirului (A)

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1} \quad (1)$$

și toate numerele naturale care pot fi scrise ca sumă a doi termeni din aceștia

$$a_1 + a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_3, \dots, a_1 + a_{n-1}, a_2 + a_2, a_2 + a_3, \dots, a_2 + a_{n-1}, \dots, a_{n-1} + a_{n-1}. \quad (2)$$

E ușor de văzut că sînt în total  $\frac{n(n-1)}{2}$  sume. Chiar dacă toate numerele din (1) și (2) sînt diferite, în total nu sînt mai multe de

$$(n-1) + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2 + n - 2}{2} < \frac{2n^2}{2} = n^2.$$

Astfel, se va găsi un număr natural între 1 și  $n^2$  care nu este cuprins în (1) și (2). De aceea, dacă șirul satisface condiția problemei (fiecare număr natural poate fi scris ca sumă a cel mult două numere din șirul (A)), atunci  $a_n \leq n^2$ .

Din raționamentul nostru, se poate obține și o evaluare mai precisă

$$a_n \leq \frac{n^2 + n}{2}. \quad (3)$$

Este interesant să se studieze dacă nu se poate găsi o evaluare și mai bună. Șirurile care satisfac condiția problemei construite efectiv sînt foarte departe (pentru  $n$  mare) de limita dată de inegalitatea (3). Vom da două exemple:

1) Să fixăm un anumit număr natural  $k$  și să considerăm șirul  $1, 2, 3, \dots, k-1, 2k-1, 3k-1, 4k-1, \dots$  ( $a_n = nk - (k-1)^2$  pentru  $n = k, k+1, k+2, \dots$ ). Acest șir, evident, satisface condiția problemei. Cum se vede ușor, pentru  $n = 2k$

$$a_n = a_{2k} = 2k^2 - (k-1)^2 = k^2 + 2k - 1 = \frac{n^2 + 4n - 4}{4}. \quad (4)$$

Evaluarea (4) este aproximativ de două ori mai restrictivă decît (3). Pentru  $n$  mare, diferența dintre  $a_n$  și  $(n^2 + n)/2$  se mărește mult.

2) Să considerăm șirul tuturor numerelor naturale care pot fi scrise ca suma dintre pătratele a două numere întregi:  $1, 2, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 16, 17, 18, 20, \dots$ . Întrucît se știe că orice număr natural poate fi scris ca suma a patru pătrate rezultă că acest șir satisface condiția problemei (Cum se poate demonstra, șirul crește mai repede decît orice funcție liniară de  $n$ :  $\lim a_n/n \rightarrow \infty$  dar mai încet decît  $n^2$ :  $\lim a_n/n^2 = 0$ . Rezultă că  $a_n$  crește aproximativ ca  $n/\ln n$ ).

**M 163.** Să se demonstreze că dacă diagonalele unui patrulater convex sînt perpendiculare între ele, atunci proiecțiile punctului lor de intersecție pe cele patru laturi (sau pe prelungirile lor) sînt conciclice.

I.A. Kușnir

(Se vede că completarea „sau pe prelungirile lor“ nu e necesară, întrucît, perpendiculara coborîtă din vîrfurile unghiului drept nu poate să cadă în afara ipotenuzei.)

Observăm că dacă din piciorul înălțimii  $BH$  al unui triunghi oarecare  $ABC$  cu unghiurile  $A$  și  $C$  ascuțite (fig. 260) se duc perpendicularele  $HK$  și  $HN$  pe laturile  $BC$  și  $BA$  respectiv, atunci triunghiurile  $KBN$  și  $ABC$  sînt asemenea (unghiul  $B$  este comun și  $AB \cdot BN = BH^2 = BC \cdot KB$ , adică  $AB : BC = KB : BN$ ), de aceea:

$$\sphericalangle BKN = \sphericalangle BAC \text{ (și } \sphericalangle BNK = \sphericalangle BCA).$$

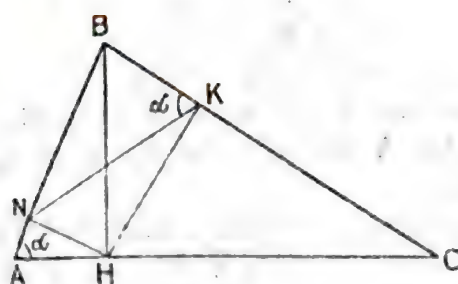


Fig. 260

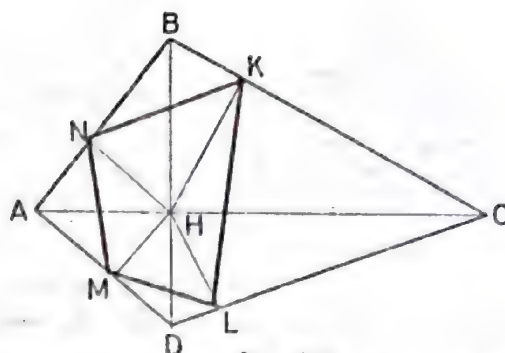


Fig. 261

Folosind acest lucru, se verifică ușor că unghiurile notate în figura 261 cu aceleași litere  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  și  $\delta$  sînt egale două cîte două, deci suma unghiurilor opuse  $K$  și  $M$  ale patrulaterului  $KLMN$  este egală cu

$$(\pi - \alpha - \beta) + (\pi - \gamma - \delta) = (\pi - \beta - \delta) + (\pi - \alpha - \gamma) = \pi$$

deci este inscriptibil.

Este adevărată și reciprocă: dacă într-un patrulater oarecare  $ABCD$  picioarele perpendicularelor coborîte din punctul de intersecție a diagonalelor pe laturi sînt vîrfurile unui patrulater inscriptibil, atunci diagonalele lui  $ABCD$  sînt perpendiculare. Demonstrația este analoagă ca cea de mai sus

I.B. Vasiliiev

**M 164.** În pătrățelele albe ale unei table de șah nemărginite care umple semi-planul superior (vezi fig. 262) se scriu niște numere astfel încît pentru fiecare pătrățel negru suma numerelor din cele două căsuțe vecine, din stînga și din dreapta, este egală cu suma numerelor din cele două căsuțe vecine, de sus și de jos. Se știe numărul situat într-o căsuță de pe linia  $n$  (marcat cu o cruciuliță în fig. 262) și trebuie să se afle numărul situat deasupra lui pe rîndul al  $(n + 2)$ -lea. Cîte numere situate în primele două rînduri (marcate cu puncte) mai trebuie cunoscute pentru aceasta?

M.L. Gherver

Vom introduce următoarele notații (vezi fig. 263):  $x$  numărul necunoscut din rîndul al  $(n + 2)$ -lea,  $d_n$  numărul dat din rîndul al  $n$ -lea. Numerele  $a$  și  $b$  nu ne sînt date dar se știe că  $x + d_n = a + b$ , de unde  $x = d_n + (a - d_n) + (b - d_n)$ . Fiindcă  $b + d_{n-1} = b_n + d_n$ , rezultă că  $b - d_n = b_n - d_{n-1}$ . Analog,

$$b_n - d_{n-1} = b_{n-1} - d_{n-2} = b_{n-2} - d_{n-3} = \dots = b_1 - d_0.$$

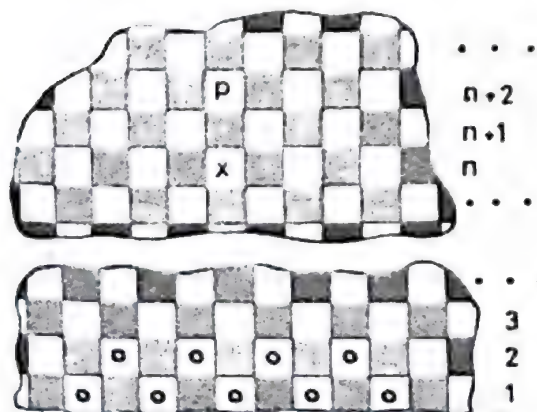
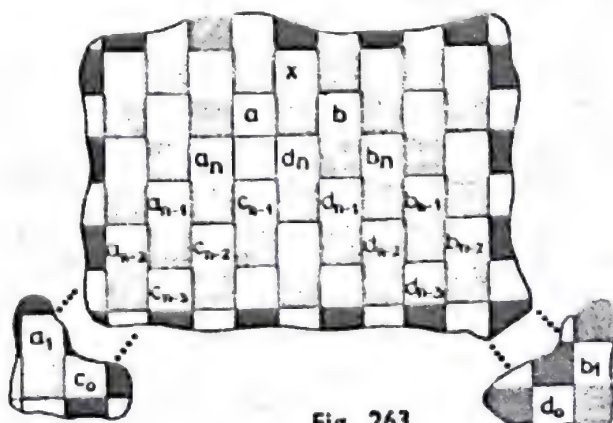


Fig. 262





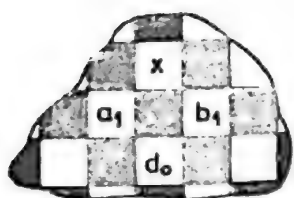


Fig. 264

Deci,  $b - d_n = b_1 - d_0$ . La fel  $a - d_n = a_n - c_{n-1} = a_{n-1} - c_{n-2} = \dots = a_1 - c_0$ .

Rezultă,  $x = d_n + (a_1 - c_0) + (b_1 - d_0)$ .

Astfel, ca să se determine  $x$  este necesar ca în afară de  $d_n$  să se știe în total 4 numere  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $c_0$  și  $d_0$  din primele două rînduri.

Nu se poate să fie mai puțin de patru numere? În cazul  $n = 0$ , se poate: atunci  $x = a_1 + b_1 - d_0$  (vezi fig. 264) și în afară de  $d_0$  este suficient să se mai știe două numere ( $a_1$  și  $b_1$ ).

Pentru  $n \geq 1$ , nu se poate să fie mai puțin decît patru numere și în afară de  $d_n$  trebuie cunoscute exact numerele  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $c_0$  și  $d_0$ ; dacă măcar unul dintre aceste numere nu este cunoscut, atunci chiar dacă s-ar ști toate celelalte numere din primele două linii, nu se poate determina  $x$ . Să demonstrăm acest lucru.

Să presupunem de exemplu că numărul  $a_1$  este necunoscut. Atunci nu ne împiedică nimic ca să-l luăm arbitrar. Acest lucru ar fi normal dacă numărul  $d_n$  nu ar fi dat, căci în acest caz numerele din primele două rînduri nu ar fi legate prin nici o relație — ele pot fi date arbitrar și cu ajutorul lor să determinăm toate celelalte numere în mod succesiv pe rînduri. În acest caz  $d_n = P - N$  unde  $P$  este suma numerelor de pe rîndul 1 situate între  $a_1$  și  $b_1$  (fără  $a_1$  și  $b_1$ ) iar  $N$  este suma numerelor de pe rîndul 0 situate între  $c_0$  și  $d_0$  (fără  $c_0$  și  $d_0$ ); egalitatea  $d_n = P - N$  se demonstrează ușor prin inducție după  $n$ ; pentru aceasta trebuie să se folosească formula stabilită mai sus  $x = d_n + (a_1 - c_0) + (b_1 - d_0)$ .

Astfel,  $d_n = P - N$  este singura relație care leagă pe  $d_n$  de numerele din primele două rînduri:  $a_1$  nu intră în această relație. Însemnează că știind pe  $d_n$  și toate numerele din primele două rînduri în afară de  $a_1$  nu putem să-l determinăm pe  $a_1$ , deci el poate fi dat arbitrar. Dar, fixîndu-i pe  $b_1$ ,  $c_0$ ,  $d_0$  și  $d_n$  și dîndu-i lui  $a_1$  diferite valori vom obține diferite valori pentru  $x$ .

Astfel, condiția necesară și suficientă ca să poată fi determinat  $x$ ,  $d_n$  fiind dat, este ca să fie dați și  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $c_0$  și  $d_0$ .

M.L. Gherver

**M 165.** Pe o circumferință este situată o mulțime  $F$  de puncte formată dintr-o sută de arce. Se știe că la orice rotație  $R$ , mulțimea  $R(F)$  are un punct comun cu  $F$ . (Cu alte cuvinte, pentru orice  $\alpha$  de la  $0^\circ$  la  $180^\circ$ , în mulțimea  $F$  se pot indica două puncte distanțate între ele prin  $\alpha$ .) Care este cea mai mică sumă posibilă a lungimilor celor 100 de arce care formează mulțimea  $F$ ? Care va fi răspunsul pentru  $n$  arce?

Iu.P. Lîsov

Vom rezolva problema pentru  $n$  arce.

Vom nota suma lungimilor celor  $n$  arce care formează mulțimea  $F$  prin  $S$  (întrucît ne interesează numai lungimea relativă a arcelor, o vom măsura în grade).

$S$  poate fi oricît de apropiată de  $\frac{180^\circ}{n}$ . Este suficient să dăm un exemplu: așezăm  $(n - 1)$  arce fiecare de lungime egală cu  $\frac{\alpha^\circ}{n}$  astfel încît centrelor oricăror două arce vecine să fie distanțate cu  $\frac{180^\circ}{n}$  și după al  $(n - 1)$ -lea așezăm



Fig. 265



Fig. 266

al  $n$ -lea arc de lungime  $\frac{180^\circ}{n}$  astfel încât distanța dintre capetele lor cele mai apropiate să fie  $\frac{180^\circ}{n}$ . Se verifică ușor că sistemul format din cele  $n$  arce așezate ca mai sus, satisface condițiile problemei. Pentru o alegere corespunzătoare a lui  $\alpha^\circ$ , suma arcelor poate fi luată oricât de aproape de  $\frac{180^\circ}{n}$ .

Dacă un punct de pe circumferință se consideră ca arc de lungime nulă, atunci, înlocuind în exemplu fiecare dintre arce în afară de ultimul prin puncte, obținem o mulțime  $F$  cu suma lungimilor arcelor egală cu  $\frac{180^\circ}{n}$  (fig. 265).

Vom demonstra că suma lungimilor arcelor,  $S$  nu poate fi mai mică decât acest număr. Să ne închipuim că avem două exemplare din cercul nostru pe care sînt așezate aceleași  $n$  arce. Rotim unul dintre cercuri cu unghiul  $\varphi$ ,  $0^\circ < \varphi < 360^\circ$ . Să considerăm mulțimea  $U_{ij}$  formată din acele valori ale lui  $\varphi$ , pentru care arcul  $i$  al circumferinței rotite se intersectează cu arcul  $j$  al circumferinței nerotite. Vom desena separat circumferința „de control” (cu punctul inițial  $\varphi = 0$  fixat pe ea (fig. 266)) și marcăm pe ea mulțimea  $U_{ij}$  pentru toți  $i, j$  de la 1 la  $n$ . Este evident că  $U_{ij}$  este un arc de lungime egală cu suma lungimilor arcelor  $i$  și  $j$ .

Mulțimile marcate  $U_{ij}$ , trebuie să umple întreaga circumferință „de control” fiindcă pentru orice rotație, anumite două arce trebuie să se intersecteze, de aceea suma lungimilor tuturor  $U_{ij}$  nu este mai mică decât  $360^\circ$ . Pe de altă parte, această sumă este egală cu  $2n \cdot S$ , fiindcă fiecare arc intră în sumă de  $2n$  ori.

De aici se obține că  $S \geq \frac{360^\circ}{2n} = \frac{180^\circ}{n}$ . Se observă ușor că inegalitatea trebuie să fie strictă (dacă nu considerăm punctele izolate ca arce), fiindcă orice două regiuni  $U_{jj}$  și  $U_{ii}$  au o parte comună care conține punctul origine.

Iu. P. Lîsov

**M 166.** a) *Elevii unei clase au mers în două excursii. În prima excursie, numărul băieților a fost mai mic de  $2/5$  din numărul total al participanților la excursie iar în a doua excursie tot așa. Să se demonstreze că în clasă, băieții reprezintă mai puțin decât  $4/7$  din numărul total al elevilor, dacă se știe că fiecare elev a mers cel puțin într-o excursie.*

b) *Presupunem că în excursia  $i$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) băieții au reprezentat a  $\alpha_i$  parte din numărul total al participanților la această excursie. Care este cea mai mare parte pe care o pot reprezenta băieții la întâlnirea tuturor turiștilor (a tuturor celor care au participat cel puțin la una dintre cele  $n$  excursii)?*

a) *La prima excursie, așa cum rezultă din ipoteza problemei, numărul băieților a fost mai mic decât  $2/3$  din numărul total al fetelor care au participat*



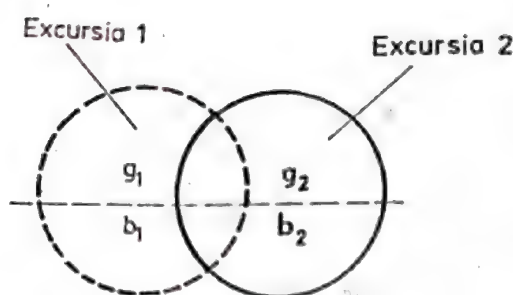


Fig. 267

la această excursie. Cu atât mai mult acest număr este mai mic decât  $2/3$  din numărul total al fetelor din clasă. La fel, numărul băieților participanți la cea de a doua excursie, este mai mic decât  $2/3$  din numărul total al fetelor din clasă. Întrucât fiecare băiat a fost cel puțin într-o excursie, (ca și fiecare elev, de altfel) rezultă că numărul total al băieților din clasă este mai mic decât  $4/3$  din numărul fetelor. Prin urmare, băieții din această

clasă nu sînt mai mulți decît  $4/7$  din numărul total al elevilor.

Cu ajutorul notațiilor evidente din figura 267 ( $b$  și  $g$  sînt inițialele cuvintelor englezești *boy* și *girl*) rezolvarea noastră poate fi scrisă astfel.

După ipoteză,  $5b_1 < 2(b_1 + g_1)$ , de unde  $3b_1 < 2g_1 < 2g$ . La fel se demonstrează că  $3b_2 < 2g_2 < 2g$ . Întrucît  $b \leq b_1 + b_2$ , vom obține

$$3b \leq 3b_1 + 3b_2 < 4g$$

de unde  $7b < 4(b + g)$ .

b) Această problemă se rezolvă în mod analog. Fie  $b_i$  și  $g_i$  numărul băieților respectiv al fetelor participanți la excursia  $i$ ,  $b$  și  $g$  numărul băieților respectiv al fetelor la întîlnirea tuturor participanților la excursii. Atunci, după ipoteză,  $b_i = \alpha_i(b_i + g_i)$ , de unde  $(1 - \alpha_i)b_i = \alpha_i g_i \leq \alpha_i g$ , de aceea, dacă toți  $\alpha_i < 1$ , atunci

$$b \leq \sum_{i=1}^n b_i \leq \sum_{i=1}^n \left( \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_i} g \right) = g \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_i}$$

de unde

$$b \left( 1 + \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_i} \right) \leq (b + g) \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_i}.$$

Astfel, am demonstrat că dacă  $\alpha_i < 1$ , pentru toți  $i$ , rezultă că băieții vor reprezenta cel mult  $\frac{c}{1 + c}$  din numărul total al participanților la excursii, unde

$$c = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_i}$$

Mai trebuie să ne convingem că această margine poate fi efectiv atinsă. Pentru aceasta trebuie ca inegalitățile scrise să se transforme în egalități. Se înțelege ușor că acest lucru se realizează dacă fetele vor fi aceleași în toate excursiile iar băieții diferiți, adică fiecare dintre băieți a participat numai la o excursie. Să arătăm că acest lucru se poate face pentru orice  $\alpha_i$ . Fie  $\frac{\alpha_i}{1 - \alpha_i} =$

$= \frac{m_i}{N}$  (numerele  $\alpha_i$  și deci și  $\alpha_i/(1 - \alpha_i)$  sînt raționale; putem să scriem pe  $\alpha_i/(1 - \alpha_i)$  sub formă de fracții cu același numitor). Dacă în excursia  $i$  au fost  $N$  fete (aceleași) și  $m_i$  băieți (diferiți), atunci la întîlnire vor participa  $M = \sum_{i=1}^n m_i$  băieți și  $N$  fete, raportul  $M/N$  este egal cu  $c$  și raportul  $M/(M + N)$  este egal cu  $c/(1 + c)$ .

Să ne întoarcem pentru exemplificare la problema a).

Dacă numărul de excursii este  $n = 2$  și  $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{2}{5}$ , atunci evaluarea exactă a numărului de băieți este dată de  $\frac{c}{1+c}$  unde

$$c = \frac{\frac{2}{5}}{1 - \frac{2}{5}} + \frac{\frac{2}{5}}{1 - \frac{2}{5}} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}, \text{ adică numărul } \frac{c}{1+c} = \frac{4}{7}.$$

Aici,  $\frac{\alpha_i}{1+\alpha_i} = \frac{2}{3}$  ( $i = 1, 2$ ) dacă în fiecare excursie au fost 3 fete (aceleași) și cite 2 băieți (în prima excursie unii, în a doua alții), adică în total 7 participanți dintre care 4 băieți (dacă considerați că ar fi prea puțini 7 elevi într-o clasă, atunci se pot înmulți toate numerele de mai sus: 3, 2, 7 și 4 să zicem prin 4 sau prin 5). Astfel numărul  $4/7$  din ipoteza problemei nu poate fi înlocuit cu unul mai mic.

Intorcându-ne din nou la problema b), observăm că dacă  $\alpha_j = 1$  pentru un anumit  $j$  (cel puțin pentru unul) nu putem să dăm nici o evaluare superioară a numărului de băieți din totalul participanților la întâlnire (cu excepția numărului total de elevi care este o margine superioară pentru numărul băieților), dacă nu știm numărul participanților la fiecare excursie. Într-adevăr, dacă numărul participanților la excursie  $j$  se ia foarte mare și numai băieți, atunci fracția care reprezintă raportul dintre numărul total al băieților și numărul total al participanților la excursii este foarte apropiată de 1.

**M 167.** Să se demonstreze că în orice progresie aritmetică:

$$a, a+d, a+2d, \dots, a+nd, \dots$$

formată din numere naturale, se găsește un număr nesfârșit de termeni astfel încât în descompunerea lor în factori primi să intre unele și aceleași numere prime.

G. Polya

(Mulți rezolvitori nu au înțeles condițiile problemei. Să o analizăm mai amănunțit.) Așa cum se știe, orice număr natural  $N$  poate fi descompus într-un mod unic în factori primi

$$N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}.$$

În problemă se cere să se arate că din progresia aritmetică dată se poate găsi o mulțime infinită de termeni astfel încât factorii primi din descompunerile acestora  $p_1, p_2, \dots, p_r$  să fie aceeași dar exponenții,  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  pot să fie diferiți.

Înainte de toate să observăm că dacă primul termen  $a$  și rația  $d$  au un factor comun  $q > 1$ , atunci vom considera toți termenii simplificați prin  $q$ . Este evident că este de ajuns să rezolvăm problema pentru noua progresie căci atunci prin înmulțirea cu  $q$  a termenilor găsiți ei vor avea tot aceeași factori primi. Deci putem considera că  $a$  și  $d$  sînt prime între ele. Este adevărată următoarea leamă:

Dacă c.m.M.d.c. al lui  $a$  și  $d$  este 1, atunci există un astfel de  $k$ , încît  $a^k - a$  se divide prin  $d$ .

**Demonstratia lemei.** Să considerăm șirul de numere  $a, a^2, a^3, \dots$  În el se vor găsi două numere care dau același rest la împărțirea prin  $d$ . Fie



acestea  $a^s$  și  $a^t$  ( $s < t$ ). Atunci, diferența lor,  $a^t - a^s = a^s (a^{t-s} - 1)$  se divide prin  $d$ . Întrucât  $a$  și  $d$  sînt prime între ele, rezultă că  $a^{t-s} - 1$  se divide prin  $d$ , de aceea  $a^{t-s+1} - a$  se divide prin  $d$ , adică putem să-l luăm pe  $k = t - s + 1$  (Raționamente analoage se fac și în demonstrația „micii teoreme a lui Fermat” sau în cazul teoremei lui Euler:  $a^{\varphi(d)} - 1$  se divide prin  $d$ , dacă  $a$  și  $d$  sînt prime între ele iar  $\varphi(d)$  este funcția lui Euler care dă numărul numerelor mai mici decît  $d$  și prime cu el.

Atunci pentru orice  $m > 0$  întreg,  $a^{km} - a = (a^k - a)(a^{k(m-1)} + a^{k(m-2)} + \dots + 1)$  se divide prin  $d$ , adică  $a^{km} - a = nd$ , unde  $n$  este un număr natural. Deci, pentru fiecare număr natural  $m$ , numărul  $a^{km} = a + nd$  face parte din progresia dată. Astfel că există un număr nesfîrșit de mare de termeni ai progresiei date care sînt puteri ale primului său termen. Este evident că toți acești termeni admit aceeași factori primi în descompunerea lor.

**M 168.** Într-un trunchi de piramidă regulată (fig. 268), punctul  $K$  este mijlocul unei laturi oarecare  $AB$  a bazei superioare iar punctul  $L$  este mijlocul unei laturi oarecare  $CD$  a bazei inferioare. Să se demonstreze că proiecțiile segmentelor  $AB$  și  $CD$  pe dreapta  $KL$  sînt congruente.

G. Noten

Dacă  $a$  și  $b$  sînt două segmente (în plan sau în spațiu) atunci proiecția segmentului  $a$  pe dreapta pe care este situat  $b$  o vom nota prin  $pr_b a$ . Atunci (fig. 269)

$$pr_b a = a \cos \alpha \quad (1)$$

unde  $\alpha$  este unghiul dintre dreptele pe care sînt situate segmentele  $a$  și  $b$  (în această formulă și în următoarele,  $a$ ,  $pr_b a$ ,  $b$  ș.a. reprezintă lungimile respectivelor segmente). Cel mai mic unghi dintre drepte nu e mai mare decît  $\pi/2$  deci  $\cos \alpha \geq 0$ . Din (1) rezultă egalitatea

$$a \cdot pr_b a = b \cdot pr_b a \quad (2)$$

Vom nota prin  $P$  respectiv  $Q$  centrele bazelor superioară, respectiv inferioară. Vom demonstra următoarea afirmație mai generală decît cerința problemei.

Fie planele în care se găsesc două triunghiuri isoscele asemenea  $ABP$  și  $CDQ$  cu vîrfurile  $P$  și  $Q$ , perpendiculare pe segmentul  $PQ$  (și deci paralele între ele). Vom nota segmentul care unește mijloacele  $K$  și  $L$  ale bazelor  $AB$  și  $CD$  prin  $s$ . Atunci (fig. 270)

$$pr_s k = pr_s l. \quad (3)$$

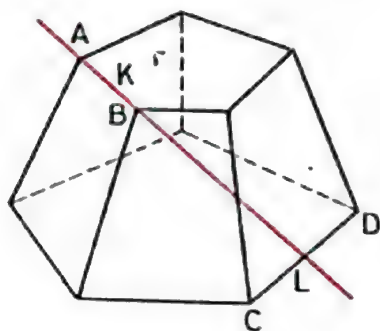


Fig. 268

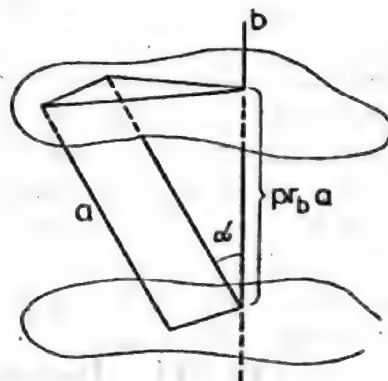


Fig. 269

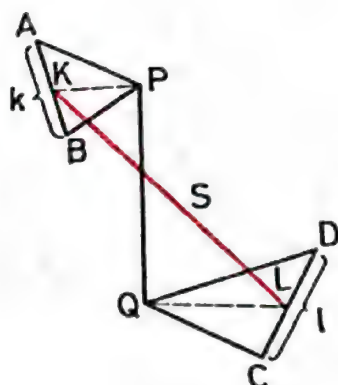


Fig. 270

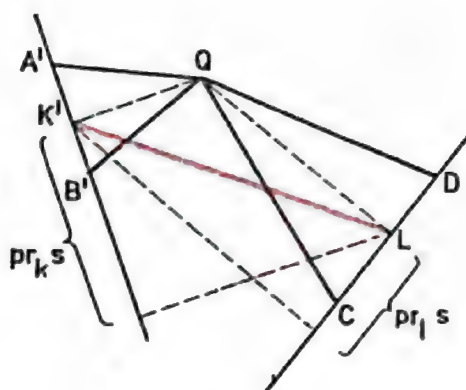


Fig. 271

Folosind pe (2), în locul lui (3) putem demonstra următoarea egalitate:

$$k \cdot \text{pr}_k s = l \cdot \text{pr}_l s. \quad (4)$$

Ne vom folosi acum de faptul, care rezultă din (1), că lungimea lui  $\text{pr}_b a$  nu se schimbă în cazul unor deplasări paralele ale segmentelor  $a$  și  $b$ . De aceea, putem să proiectăm segmentul  $k = AB$  pe planul triunghiului  $CDQ$  și vom obține:

$$\text{pr}_{A'B'} K'L = \text{pr}_{A'B'}, KL = \text{pr}_{AB} KL = \text{pr}_k s \quad (5)$$

unde  $A', B', K'$  sint proiecțiile punctelor  $A, B$  și  $K$  pe planul  $CDQ$  (fig. 271). Astfel, am redus problema la cazul în care ambele triunghiuri sint situate în același plan (și au un vîrf comun).

Dacă segmentele  $AB$  și  $CD$  sint paralele, atunci egalitatea (4) este evidentă, întrucît ambele proiecții sint egale cu zero. Dacă aceste segmente sint neparalele, atunci vom obține:

$$\frac{k}{l} = \frac{A'B'}{CD} = \frac{QK'}{QL} = \frac{\sin \angle OLK'}{\sin \angle OK'L} = \frac{|\cos \angle K'LC|}{|\cos \angle LK'B|} = \frac{\text{pr}_l s}{\text{pr}_k s}$$

de unde rezultă (4).

**M 169.** Fie  $k$  și  $n$  numere naturale,  $k < n$ . Să se așeze numerele  $1, 2, 3, \dots, n^2$  într-un tablou  $n \times n$ , astfel încît în fiecare linie numerele să fie aranjate în ordine crescătoare iar suma numerelor de pe coloana  $k$  să fie: a) minimă; b) maximă.

N.B. Vasiliev

Rezolvăm la început punctul a). Dacă vom așeza numerele așa cum se arată în tabloul 1 a, la început completăm primele  $k$  coloane, linie cu linie cu numere de la 1 la  $kn$ , iar apoi cu restul numerelor completăm ultimile  $n - k$  coloane (cum dorim, respectînd doar cerința de aranjare în ordine crescătoare pe fiecare linie), atunci suma numerelor de pe coloana  $k$ , va fi egală cu

$$k(1 + 2 + \dots + n) = \frac{kn(n+1)}{2} \quad (1)$$

Vom demonstra că această valoare a sumei este minimă. La început vom demonstra că dacă  $a_1, a_2, \dots, a_n$  sint numerele din coloana  $k$  numerotate în ordine crescătoare

$$a_1 < a_2 < \dots < a_i < \dots < a_n, \quad (2)$$



atunci

$$a_i \geq ki \quad (3)$$

Într-adevăr, să considerăm numerele situate în acele linii în care sint  $a_1, a_2, \dots, a_i$  și în primele  $k$  coloane. Din condiția (2) și din aranjarea numerelor pe linii în ordine crescătoare, rezultă că aceste  $ki$  numere nu depășesc numerele  $a_i$ . Prin urmare, printre numerele  $1, 2, 3, \dots, n^2$  sint cel puțin  $ki$  numere care nu depășesc pe  $a_i$ . De aici rezultă (3). Adunînd inegalitățile (3), după toate valorile  $i = 1, 2, \dots, m$  vom obține în dreapta suma (1), de aceea

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq \frac{kn(n+1)}{2}.$$

Problema b) poate fi rezolvată în mod analog, începînd „cu cele mai mari numere” și cu coloanele din dreapta. Dar ea poate fi redusă la problema a) deja rezolvată. Înlocuim în tablou, fiecare număr  $a$  prin  $n^2 + 1 - a$  și apoi în fiecare linie aranjăm numerele în ordine inversă. Este evident că aceasta este o transformare bijectivă a mulțimii tabelelor formate din numerele  $1, 2, \dots, n^2$  care satisfac condițiile problemei. Prin această transformare, fiecare număr din coloana  $k$  a tabelui noi  $A'$  este egal cu un număr de pe aceeași linie din coloana  $n + 1 - k$  a tabelui vechi  $A$ ; de aceea suma numerelor din coloana  $k$  a tabelui  $A'$  este egală cu  $n(n^2 + 1) - S$ , unde  $S$  este suma numerelor din coloana  $n + 1 - k$  a lui  $A$ . Astfel, este suficient să se rezolve problema a) pentru coloana  $n + 1 - k$  și vom obține soluția problemei b) pentru coloana  $k$ : răspunsul poate fi scris astfel: suma maximă în coloana  $k$  este egală cu

$$n(n^2 + 1) - \frac{(n + 1 - k)n(n + 1)}{2} = \frac{n(n - 1)^2 + k(n + 1)}{2}.$$

Un exemplu (obținut prin transformarea  $A \rightarrow A'$ ,  $k \rightarrow n + 1 - k$  din tabela 1 a) este dat în tabela 1 b. În tabelele 2a și 2b sint date două exemple pentru  $n = 6$  și coloana cu numărul  $k = 4$ .

N.B. Vasiliev

Tabela 1 a

			$k$	
1	2.....	$k-1$	$k$	$nk + 1$ .....
$k + 1$	$k+2$ .....	$2k-1$	$2k$	
$2k+1$	$2k+2$ .....	$3k-1$	$3k$	
.....	.....	.....	.....	.....
$(n-1)(k+1)$	.....	$nk-1$	$nk$	..... $n^2$

Tabela 1 b

			$k$
.. $nk-n$	$n^2 - (n - k)$	..... $n^2$	
	$n^2 - 2(n + 1 - k) + 1$	..... $n^2 - (n + 1 - k)$	
	$n^2 - 3(n + 1 - k) + 1$	..... $n^2 - 2(n + 1 - k)$	
.....	.....	.....	
1.....	$nk - n + 1$	..... $kn - k + 1$	

Tabela 2 a

4

1	2	3	4	25	26
5	6	7	8	27	28
9	10	11	12	29	30
13	14	15	16	31	32
17	18	19	20	33	34
21	22	23	24	35	36

Suma: 84

Tabela 2 b

4

16	17	18	34	35	36
13	14	15	31	32	33
10	11	12	28	29	30
7	8	9	25	26	27
4	5	6	22	23	24
1	2	3	19	20	21

Suma: 159

**M 170.** a) Fie  $M$  și  $N$  punctele de tangență ale cercului înscris în triunghiul  $ABC$  cu laturile  $AB$  și  $AC$ ,  $P$  punctul de intersecție a bisectoarei unghiului  $B$  cu dreapta  $MN$ . Să se demonstreze că unghiul  $BPC$  este drept.

b) Să se demonstreze un lucru mai general: dacă punctul  $O$  situat în interiorul triunghiului  $ABC$  este astfel încât  $\angle BOC - \angle BAO = 90^\circ$ , iar  $M$  și  $N$  sînt picioarele perpendiculelor coborîte din punctul  $O$  pe laturile  $AB$  și  $AC$ ,  $P$  este punctul de intersecție a dreptelor  $BO$  și  $MN$ , atunci  $\angle BPC = 90^\circ$  (fig. 272).

Problema a) este într-adevăr un caz particular al problemei b): dacă  $O$  este centrul cercului înscris, atunci suma dintre unghiurile  $BOC$ ,  $OCB$  și  $OBC$  este  $180^\circ$ , iar unghiul  $BAO$  împreună cu ultimele două de mai înainte dau jumătate din suma unghiurilor triunghiului, adică  $90^\circ$ .

De aceea, rezolvăm direct problema b). Să presupunem, ca să precizăm, că  $P$  se găsește pe prelungirea segmentului  $MN$  dincolo de punctul  $N$ , ca în figură. (Alte cazuri se rezolvă analog, le puteți analiza singuri.) Din ipoteză,  $\angle OMA = \angle ONA = 90^\circ$ , de aceea patrulaterul  $OMNA$  este inscriptibil, deci  $\angle ONM = \angle OAM = \angle BAO$ .

Să arătăm acum că punctele  $O$ ,  $N$ ,  $P$  și  $C$  sînt conciclice. Într-adevăr,  $\angle CNP = \angle MNA = 90^\circ - \angle MNO = 90^\circ - \angle BAC$ ,  $\angle COP = 180^\circ - \angle BOC$ . Utilizînd condiția problemei:  $\angle BOC - \angle BAO = 90^\circ$ , vom obține  $\angle CNP = \angle COP$ . În sfîrșit, din faptul că patrulaterul  $CONP$  este inscriptibil, rezultă egalitatea care ne trebuie  $\angle CPO = \angle CNO = 90^\circ$ .

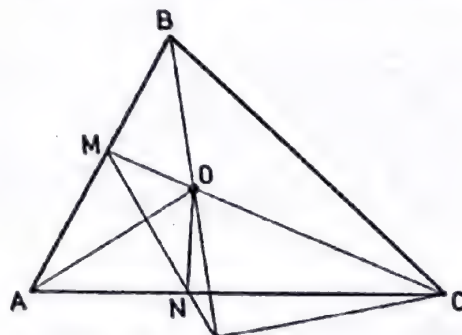


Fig. 272

I.F. Sarlghin



**M 171.** Într-un plan este desenat un hexagon regulat de latură 1. Numai cu ajutorul riglei, să se construiască un segment egal cu  $\sqrt{7}$ .

A.V. Aliaev

Se poate demonstra fără dificultate că lungimea segmentelor roșii din figura 273 este egală cu  $\sqrt{7}$ .

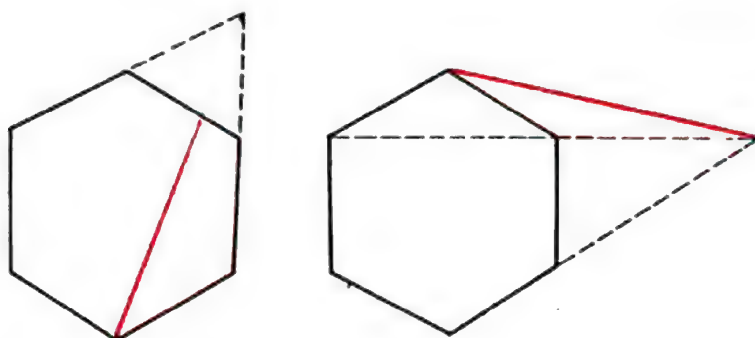


Fig. 273

**M 172.** Să se demonstreze că pentru orice număr prim  $p$ , numărul

$$\underbrace{11 \dots 1}_{p} \dots \underbrace{22 \dots 2}_{p} \dots \underbrace{33 \dots 3}_{p} \dots \underbrace{99 \dots 9}_{p} - 123456789$$

se divide prin  $p$ .

M.L. Gherver

$$\begin{aligned} \text{Introducem următoarele notații: } 123456789 &= A, \underbrace{11 \dots 1}_{p} \dots \underbrace{22 \dots 2}_{p} \dots \underbrace{33 \dots 3}_{p} \dots \\ &\dots \underbrace{99 \dots 9}_{p} = B, \underbrace{10 \dots 0}_{p} \dots \underbrace{20 \dots 0}_{p} \dots \underbrace{30 \dots 0}_{p} \dots \underbrace{80 \dots 0}_{p} \dots \underbrace{09}_{p} = \\ &= 10^{8p} + 2 \cdot 10^{7p} + 3 \cdot 10^{6p} + \dots + 8 \cdot 10^p + 9 = C, \underbrace{11 \dots 1}_{p} = E. \end{aligned}$$

Evident că  $B = E \cdot C$ ,  $C - A = 3(10^{8p} - 10^8) + 2(10^{7p} - 10^7) + 3(10^{6p} - 10^6) + \dots + 8(10^p - 10)$ ,  $10^p - 10 = (9 \cdot E + 1) - 10 = 9(E - 1)$ .

Conform „micii teoreme“ a lui Fermat, numărul  $n^p - n$  se divide prin  $p$  pentru orice număr prim  $p$  și orice număr natural  $n$ . În particular,  $10^p - 10$ ,  $10^{2p} - 10^2$ , ...,  $10^{8p} - 10^8$  se divid prin  $p$  și  $9(E - 1)$  se divide prin  $p$ .

Astfel,  $B - A = EC - AE + AE - A = E(C - A) + A(E - 1)$  se divide prin  $p$ , ceea ce trebuia demonstrat.

M.L. Gherver

**M 173.** Într-un tablou pătratic  $4 \times 4$ , sînt așezate numerele 1, 2, 3, ..., 16, astfel încît suma celor patru numere de pe fiecare linie, de pe fiecare coloană și de pe cele două diagonale este aceeași iar numerele 1 și 16 sînt situate în colțuri opuse ale tabloului. Să se demonstreze că în acest „pătrat magic“ suma oricăror două numere așezate simetric față de centrul pătratului este aceeași.

L.G. Limanov

Se constată ușor, că suma numerelor de pe fiecare linie, coloană și diagonală dintr-un pătrat magic  $4 \times 4$ , este egală cu 34. Într-adevăr suma tuturor numerelor din pătrat este egală cu  $\frac{17 \cdot 16}{2} = 34 \cdot 4$ .

De aceea, trebuie să se demonstreze că în pătratele care satisfac condiția din problemă (numerele 1 și 16 să fie situate în colțuri opuse) suma numerelor simetrice față de centrul pătratului este egală cu 17. Pentru numerele 1 și 16, aceasta se realizează după ipoteză. Vom considera că 1 este situat în colțul din stînga sus și 16 în cel din dreapta jos, atunci celelalte două numere de pe această diagonală, să le notăm prin  $a$  și  $a'$ , vor satisface egalitatea  $a + a' = 17$ . Vom conveni ca numărul care îl completează pe  $x$  pînă la 17, să-l notăm prin  $x'$ :  $x' = 17 - x$ .

Vom folosi acum notațiile din figura 274 ( $S_i$  reprezintă suma numerelor din respectivele căsuțe).

Sînt adevărate următoarele egalități:

$$S_1 + c + d + a + a' + S_2 + S_3 + c + d + a + a' + S_4 + 2(b + c + d + e) = 34 \cdot 6$$

(aceasta este suma numerelor din cele două coloane din mijloc, din cele două linii din mijloc și de două ori de pe diagonale).

$$1 + S_1 + b + b + S_3 + 16 + 16 + S_2 + e + e + S_4 + 1 = 34 \cdot 4$$

(aceasta este suma numerelor din prima linie, din coloana a patra, din linia a patra și din coloana întii).

Din aceste egalități, obținem că  $4(c + d) = 34 \cdot 2$ . Deci  $c + d = 17$  și deci și  $b + e = 17$ , adică  $d = c'$ ,  $e = b'$ .

Trecem acum la figura 275. Evident  $y \neq x'$ , întrucît  $b \neq 1'$ . Vom arăta că  $x'$  și  $y'$  nu pot să fie situate în căsuțele colorate. Observăm că  $x'$  și  $y'$  nu pot să fie situate în căsuțele colorate de pe aceeași coloană; dacă ar fi situate în cele din prima coloană, atunci adunînd numerele din prima linie și din prima coloană, am obține că

$$34 \cdot 2 = 34 + 2 + 17$$

și dacă ar fi situate în cele din ultima coloană, atunci adunînd numerele din prima linie și din prima coloană am obține că

$$34 \cdot 2 = 34 + 2b + 17,$$

ambele aceste egalități nefiind adevărate. Să presupunem acum că  $x'$  este situat într-o căsuță colorată din coloana întii (cazul în care ar fi  $y'$ , se tratează asemănător). Celălalt număr din pătrățelele colorate de pe coloana întii, îl vom nota prin  $z$ . Atunci, adunînd numerele de pe coloana întii și de pe linia întii, vom obține:  $34 \cdot 2 = 2 + 17 + 17 + y + z$ , de unde  $y + z = 32$  ceea ce este imposibil. Astfel, nici  $x'$  nici  $y'$  nu pot fi situați pe coloana întii

1	$S_1$		b
$S_4$	a	c	$S_3$
	d	$a'$	
e	$S_2$		

Fig. 274

1	x	y	b
	a	c	
	$c'$	$a'$	
$b'$	u	v	16

Fig. 275

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

Fig. 276



și împreună nu pot fi situați nici în coloana a patra. Rezultă că sau  $x'$  sau  $y'$  vor fi situați pe locul lui  $u$  sau  $v$ . Să presupunem că va fi  $x'$  (cazul în care ar fi  $y'$ , se judecă analog). Dar  $x' \neq u$ , întrucît  $a \neq c$ , rezultă  $x' = v$ , atunci  $y' = u$  și deci numerele situate în căsuțele colorate de pe coloana a patra completează (pînă la 17) numerele situate în căsuțele simetrice față de centrul pătratului de pe coloana întâi (verificați).

În încheiere, în figura 276, este dat un exemplu de pătrat magic care satisface condițiile problemei (din raționamentele anterioare nu rezulta existența unui astfel de pătrat).

L.G. Limanov

**M 174.** Pe laturile triunghiului  $ABC$  drept baze, se construiesc triunghiurile isoscele  $AB_1C$ ,  $BA_1C$ ,  $AC_1B$  (fig. 277). Să se demonstreze că perpendicularele duse din punctele  $A$ ,  $B$  și  $C$ , respectiv pe dreptele  $B_1C_1$ ,  $C_1A_1$  și  $A_1B_1$  sînt concurente.

A.G. Gheiu

Dăm mai jos cîteva leme din care va rezulta și rezolvarea problemei dar care sînt utile și în cazul altor probleme.

**L e m a 1.** Fie  $A_1$  și  $A_2$  două puncte date în plan și  $k$ ,  $k_1$  și  $k_2$  numere reale. Atunci, locul geometrie al punctelor  $M$  din plan astfel încît

$$k_1(A_1M)^2 + k_2(A_2M)^2 = k$$

va fi:

- a) un cerc, sau un punct sau mulțimea vidă, dacă  $k_1 + k_2 \neq 0$ ;
- b) o linie dreaptă perpendiculară pe segmentul  $A_1A_2$ , dacă  $k_1 + k_2 = 0$  (dar  $k_1 \neq 0$ ).

**Demonstrație a).** Fie  $k_1 > 0$  și  $k_2 > 0$ . Vom lua pe segmentul  $A_1A_2$  punctul  $D$  care împarte acest segment în raportul  $k_2 : k_1$ . Atunci  $k_1(A_1D) = k_2(A_2D)$ . Fie  $\angle MDA_1 = \varphi$  (vezi fig. 278). Vom scrie teorema cosinusului pentru triunghiul  $MDA_1$  și pentru  $MDA_2$ :

$$(A_1M)^2 = (A_1D)^2 + (MD)^2 - 2MD \cdot DA_1 \cos \varphi, \quad (A_2M)^2 = (A_2D)^2 + (MD)^2 + 2MD \cdot DA_2 \cos \varphi.$$

Înmulțind prima egalitate cu  $k_1$ , a doua cu  $k_2$  și adunîndu-le, obținem:

$$k_1(A_1M)^2 + k_2(A_2M)^2 = k_1(A_1D)^2 + k_2(A_2D)^2 + (k_1 + k_2)(MD)^2$$

de unde

$$(MD)^2 = \frac{k - k_1(A_1D)^2 - k_2(A_2D)^2}{k_1 + k_2} = C.$$

Prin  $C$  am notat o constantă. Dacă  $C > 0$ , punctul  $M$  se găsește pe un cerc de rază  $\sqrt{C}$ ; dacă  $C = 0$  punctul  $M$  coincide cu  $D$ ; dacă  $C < 0$ , nu există puncte  $M$  care să satisfacă cerința problemei. Se verifică ușor și afirmația reciprocă: fiecare punct  $M$  al mulțimii obținute satisface relația  $k_1(A_1M)^2 + k_2(A_2M)^2 = k$ .

Am considerat cazul  $k_1 > 0$ ,  $k_2 > 0$ . Cazul  $k_1 < 0$ ,  $k_2 < 0$  se reduce la cel precedent prin schimbarea semnelor lui  $k$ ,  $k_1$ ,  $k_2$ , iar în cazul  $k_1 > 0$ ,  $k_2 < 0$  (sau invers) se poate proceda ca mai sus dar punctul  $D$  va fi situat în afara segmentului  $A_1A_2$  (fig. 279; verificați calculele). Formula scoasă mai sus rămîne valabilă și o vom folosi în continuare. Demonstrația punctului b).

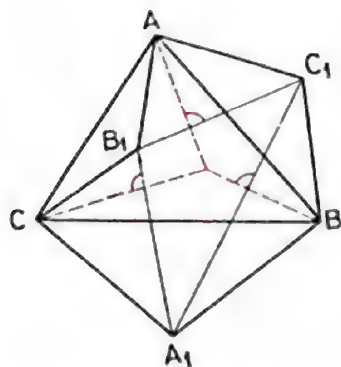


Fig. 277

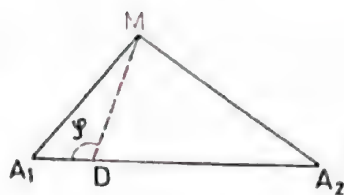


Fig. 278

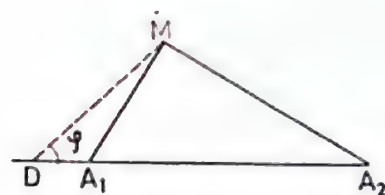


Fig. 279

Relația  $k_1(A_1M)^2 - k_1(A_2M)^2 = k$  este echivalentă cu relația  $(A_1M)^2 - (A_2M)^2 = \frac{k}{k_1}$ .

Fie  $D$  proiecția punctului  $M$  pe dreapta  $A_1A_2$ . Atunci, după teorema lui Pitagora (vezi fig. 280 și 281)

$$(A_1M)^2 = (A_1D)^2 + (MD)^2,$$

$$(A_2M)^2 = (A_2D)^2 + (MD)^2,$$

de unde

$$(A_1M)^2 - (A_2M)^2 = (A_1D)^2 - (A_2D)^2 = \frac{k}{k_1}.$$

Astfel problema s-a redus la găsirea pe dreapta  $A_1A_2$  a punctului  $D$  care să satisfacă ultima relație. Un astfel de punct se găsește ușor (indicați cum) și el este unic. Punctul  $M$  este situat oriunde pe perpendiculara ridicată în punctul  $D$  pe dreapta  $A_1A_2$ .

Este adevărată și afirmația reciprocă (demonstrați-o): pentru toate punctele unei drepte perpendiculare pe  $A_1A_2$ , diferența pătratelor distanțelor la  $A_1$  respectiv  $A_2$  este constantă.

Lema 1 este demonstrată.

Este adevărată și generalizarea sa pentru un număr mai mare de puncte (enunțați și demonstrați).

**L e m a 2.** Fie  $A_1, A_2, \dots, A_n$  puncte date în plan,  $k_1, k_2, \dots, k_n$  (toți  $k_i \neq 0$ ) numere date. Atunci, locul geometric al punctelor  $M$  care satisfac relația

$$k_1(A_1M)^2 + k_2(A_2M)^2 + \dots + k_n(A_nM)^2 = \text{constant}$$

va fi:

- un cerc, un punct sau mulțimea vidă dacă  $k_1 + k_2 + \dots + k_n \neq 0$ ;
- o dreaptă sau tot planul dacă  $k_1 + k_2 + \dots + k_n = 0$ .

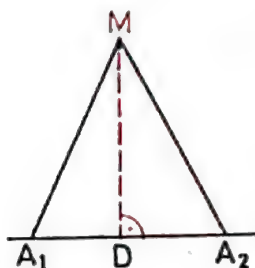


Fig. 280

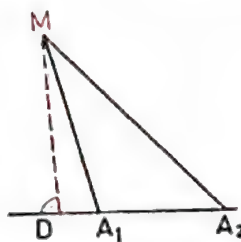


Fig. 281



**Demonstrație.** Demonstrația se va face prin inducție. Pentru  $n = 2$  s-a demonstrat mai sus (cazul întregului plan se obține atunci când  $k_1 + k_2 = 0$  și  $A_1$  coincide cu  $A_2$ . Atunci, pentru toate punctele planului  $(A_1M)^2 - (A_2M)^2 = 0$ ).

Să presupunem acum că afirmația este adevărată pentru un  $n$  oarecare. Vom demonstra că ea este adevărată și pentru  $n + 1$ . Observăm că dacă  $n \geq 2$  și toți  $k_1, k_2, \dots, k_n, k_{n+1}$  nu sînt nuli, atunci printre ei se găsesc doi a căror sumă să nu fie nulă. Fie aceștia  $k_1$  și  $k_2$ . Vom lua punctul  $D$  construit în demonstrația de la 1 a) și vom folosi formula găsită acolo. Atunci egalitatea

$$k_1(A_1M)^2 + k_2(A_2M)^2 + k_3(A_3M)^2 + \dots + k_{n+1}(A_{n+1}M)^2 = k$$

poate fi scrisă în forma

$$(k_1 + k_2)(DM)^2 + k_3(A_3M)^2 + \dots + k_{n+1}(A_{n+1}M)^2 = k - k_1(A_1D)^2 - k_2(A_2D)^2.$$

Acum în dreapta este o constantă, iar în stînga numărul punctelor s-a micșorat cu unul iar suma tuturor coeficienților nu s-a schimbat. Conform ipotezei de inducție, pentru ultima egalitate afirmația lemei 2 este adevărată. Înseamnă că este adevărată și pentru  $n + 1$ , deci lema 2 este demonstrată.

**Lema 3.** Pentru ca perpendicularele coborîte din punctele  $A_1, B_1$  și  $C_1$  respectiv pe laturile  $BC, AC$  și  $AB$  ale triunghiului  $ABC$  să fie concurente, este necesar și suficient să fie îndeplinită egalitatea:

$$(A_1B)^2 - (BC_1)^2 + (C_1A)^2 - (AB_1)^2 + (B_1C)^2 - (CA_1)^2 = 0.$$

**Demonstrație. Necesitatea.** Fie  $P$  punctul de intersecție a perpendicularelor coborîte din  $A_1, B_1$  și  $C_1$  respectiv pe  $BC, AC$  și  $AB$ . Din lema 1 b) rezultă egalitățile:

$$(A_1B)^2 - (CA_1)^2 = (PB)^2 - (CP)^2; \quad (B_1C)^2 - (AB_1)^2 = (PC)^2 - (AP)^2; \\ (C_1A)^2 - (BC_1)^2 = (PA)^2 - (BP)^2.$$

Adunînd aceste trei egalități, obținem îndeplinirea condiției cerute.

**Suficiența.** Presupunem că este îndeplinită condiția din textul lemei și fie  $P$  punctul de intersecție a perpendicularelor coborîte din  $A_1$  pe  $BC$  și din  $B_1$  pe  $AC$ . Din lema 1 b) rezultă că

$$(A_1B)^2 - (CA_1)^2 + (B_1C)^2 - (AB_1)^2 = (PB)^2 - (AP)^2.$$

Dar din condiția dată în lema 3 rezultă că membrul stîng este egal cu  $(BC_1)^2 - (C_1A)^2$ , adică  $(BC_1)^2 - (C_1A)^2 = (PB)^2 - (AP)^2$ , dar acest lucru înseamnă că punctul  $P$  este situat pe perpendiculara coborîtă din  $C_1$  pe  $AB$  ceea ce trebuia demonstrat.

**Lema 4.** Dacă perpendicularele coborîte din vîrfurile  $A_1, B_1, C_1$  ale triunghiului  $ABC$  pe laturile  $BC, AC$  și  $AB$  ale triunghiului  $ABC$  sînt concurente, atunci și perpendicularele coborîte din punctele  $A, B$  și  $C$ , respectiv pe dreptele  $B_1C_1, A_1C_1$ , și  $A_1B_1$  sînt de asemenea concurente.

Afirmația lemei rezultă direct din simetria relației de la lema 3.

Cu ajutorul lemelor 3 sau 4 putem rezolva problema M 174.

Conform lemei 3 trebuie să verificăm îndeplinirea relației

$$(AB_1)^2 - (B_1C)^2 + (CA_1)^2 - (A_1B)^2 + (BC_1)^2 - (C_1A)^2 = 0.$$

Această relație este îndeplinită pentru că

$$AB = B_1C, \quad CA = A_1B, \quad BC = C_1A.$$

Se poate utiliza de asemenea și lema 4. Atunci este suficient să observăm că perpendicularele coborîte din punctele  $A_1, B_1, C_1$  pe laturile  $ABC$  trec

prin mijloacele laturilor triunghiului  $ABC$  și de aceea se intersectează într-un punct care este centrul cercului circumscris triunghiului  $ABC$ .

I.F. Sarighin

**M 175.** Fiecare latură a unui triunghi echilateral este împărțită în  $m$  părți congruente și prin punctele de diviziune se duc drepte paralele cu laturile triunghiului care împart triunghiul în  $m^2$  triunghiuri mai mici. Dintre vîrfurile triunghiurilor obținute trebuie marcate  $N$  vîrfuri astfel încît pentru oricare două vîrfuri marcate  $A$  și  $B$  segmentul  $AB$  să nu fie paralel cu nici una dintre laturile triunghiului. Care este cea mai mare valoare posibilă a lui  $N$ , pentru  $m$  dat?

b) împărțim fiecare muchie a unui tetraedru în  $m$  părți congruente și prin punctele de diviziune ducem plane paralele cu fețele. Dintre vîrfurile poliedrelor obținute trebuie să alegem  $N$  vîrfuri, astfel încît oricare dintre acestea să nu fie situate pe o dreaptă paralelă cu una dintre fețe. Care este cea mai mare valoare posibilă a lui  $N$ ?

c) dintre soluțiile întregi ale ecuației

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k = m$$

care satisfac condițiile  $0 \leq x_i \leq m$  (pentru  $i = 1, 2, \dots, k$ ) trebuie să se aleagă  $N$  soluții astfel încît în oricare două dintre soluțiile alese nici o necunoscută  $x_i$  să nu ia aceeași valoare. Care este valoarea maximă posibilă a lui  $N$ ? (Problemele a) și b) sînt cazuri particulare ale problemei c), pentru  $k = 3$  respectiv  $k = 4$ .)

M.L. Gherver

Mai înainte să verificăm faptul că problema a) este caz particular al problemei c) pentru  $k = 3$ .

Considerăm distanța dintre două drepte paralele care împart triunghiul, egală cu 1 (fig. 282). Fiecărui punct al triunghiului îi punem în corespondență trei numere  $x_1, x_2, x_3$  care exprimă (într-o anumită unitate de lungime) distanțele de la acest punct la laturile triunghiului (fig. 283).

Se verifică ușor că suma  $x_1 + x_2 + x_3$  este constantă pentru orice punct al triunghiului. Într-adevăr, să notăm prin  $2a$  lungimea unei laturi a triunghiului; atunci,  $ax_1, ax_2, ax_3$  sînt ariile triunghiurilor  $OA_2A_3, OA_1A_3$  și  $OA_1A_2$  (fig. 283); de aici  $a(x_1 + x_2 + x_3)$  este aria triunghiului  $A_1A_2A_3$  adică  $x_1 + x_2 + x_3$  nu depinde de alegerea punctului  $O$ . În unitatea aleasă,  $x_1 + x_2 + x_3 = m$  (unde  $m$  este numărul de segmente în care a fost împărțită latura triunghiului).

Vîrfurile triunghiurilor mici formate vor avea cele trei numere  $x_1, x_2$  și  $x_3$  întregi (fig. 284).

În problema a) se cere ca pentru nici o pereche de vîrfuri alese  $A$  și  $B$ , segmentul  $AB$  să nu fie paralel cu o latură a triunghiului  $A_1A_2A_3$ . În problema c) se cerea ca în oricare două dintre soluțiile alese nici una dintre

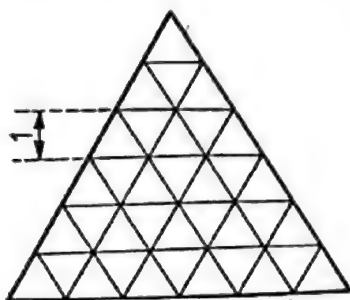


Fig. 282

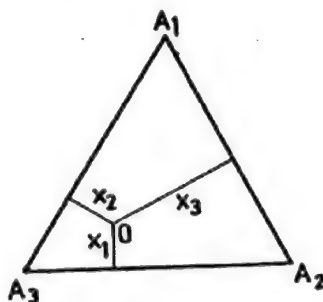


Fig. 283

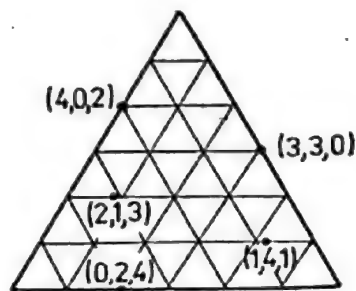


Fig. 284



necunoscutele  $x_i$  să nu ia aceeași valoare. Ambele cerințe (a doua pentru  $k = 3$ ) înseamnă, desigur, același lucru.

În mod analog se verifică că problema b) este echivalentă cu problema c) pentru  $k = 4$ .

Astfel rămâne de rezolvat problema c). Să o reformulăm:

Presupunem că într-un tablou dreptunghiular format din  $k$  coloane și  $n$  linii se pot pune niște numere naturale astfel încât suma numerelor de pe orice linie să fie egală cu  $m$  și astfel încât pe orice coloană să nu fie două numere la fel. Fie  $k$  și  $m$  date. Care este cea mai mare valoare posibilă  $N$ , pe care o poate lua  $n$ ?

Noua formulare este desigur echivalentă cu cea inițială dar permite să se expună mai simplu și mai scurt rezolvarea.

Vom demonstra că  $N \leq \left[ \frac{2m}{k} \right] + 1$ , unde  $\left[ \frac{2m}{k} \right]$  reprezintă cel mai mare întreg care nu-l depășește pe  $\frac{2m}{k}$ . Întrucît numerele dintr-o coloană nu sînt mai multe decît  $N$  și ele nu se repetă, rezultă că suma lor nu este mai mică decît

$$0 + 1 + \dots + (N - 1) = \frac{N(N - 1)}{2}.$$

În tablou sînt  $k$  coloane. Rezultă că suma numerelor din tot tabloul nu e mai mică decît  $\frac{kN(N - 1)}{2}$ .

Pe de altă parte, suma tuturor numerelor de pe o linie este egală cu  $m$  deci suma numerelor din tot tabloul este egală cu  $Nm$ .

Astfel,  $Nm \geq \frac{kN(N - 1)}{2}$ . Prin urmare,  $m \geq \frac{k(N - 1)}{2}$  și  $\frac{2m}{k} \geq N - 1$ . Fiindcă  $N - 1$  este întreg, rezultă că  $\left[ \frac{2m}{k} \right] \geq N - 1$ . Astfel  $N \leq \left[ \frac{2m}{k} \right] + 1$ .

Se poate afirma că  $N = \left[ \frac{2m}{k} \right] + 1$ ? Pentru  $k = 1$ , evident că nu:  $N = 1$  dar  $\left[ \frac{2m}{k} \right] + 1 = 2m + 1$ . Dar, se arată că acest caz este singura excepție: pentru  $k \geq 2$ ,  $N = \left[ \frac{2m}{k} \right] + 1$ .

Pentru ca să demonstrăm acest lucru, vom construi pentru orice întregi  $k$  și  $m$  ( $k \geq 2$ ,  $m \geq 0$ ) tablouri  $k \times N$  care să satisfacă toate cerințele problemei.

Fie, la început,  $k$  un număr natural arbitrar par:  $k = 2r$ ,  $r \geq 1$ . Dacă  $m = rt$ , unde  $t$  este orice număr natural, atunci  $N = t + 1$  (vezi tabela 1)

Tabela 1

0.....0	..t....t....
1.....1	t-1....t-1
.....	.....
.....	.....
t-1....t-1	1.....1
t.....t	0.....0

$r$  coloane

$r$  coloane

Tabela 2

0....0	t....t	t + q
1....1	t-1....t-1	t + q - 1
.....	.....	.....
.....	.....	.....
t-1....t-1	1....1	q + 1
t....t	0....0	q

$r$  coloane

$(r-1)$  coloane

Dacă  $m = rt + q$ , unde  $0 < q < r$ , atunci la toate numerele ultimei coloane a tabelului 1 trebuie adăugat câte un  $q$  (vezi tabelul 2);  $N$  rămâne  $t + 1$ . Astfel, pentru  $k$  par, tabelul este construit pentru orice  $m$ .

Pentru construirea tabelului pentru orice  $k > 1$ , impar să ne ocupăm separat de cazul  $k = 3$ .

Pentru  $k = 3$ , dacă  $m = 3t$  sau  $m = 3t + 1$  rezultă  $N = 2t + 1$  (tabelul 3 și 4) și dacă  $m = 3t - 1$  atunci  $N = 2t$  (tabelul 5).

Tabela 3

0	$t$	$2t$
2	$t - 1$	$2t - 1$
4	$t - 2$	$2t - 2$
.	.	.
.	.	.
$2t$	0	$t$
1	$2t$	$t - 1$
3	$2t - 1$	$t - 2$
5	$2t - 2$	$t - 3$
.	.	.
.	.	.
$2t - 1$	$t + 1$	0

Tabela 4

0	$t$	$2t + 1$
2	$t - 1$	$2t$
4	$t - 2$	$2t - 1$
.	.	.
.	.	.
$2t$	0	$t + 1$
1	$2t$	$t$
3	$2t - 1$	$t - 1$
5	$2t - 2$	$t - 2$
.	.	.
.	.	.
$2t - 1$	$t + 1$	1

Tabela 5

0	$t - 1$	$2t$
2	$t - 2$	$2t - 1$
4	$t - 3$	$2t - 2$
.	.	.
.	.	.
$2t - 2$	0	$t + 1$
1	$2t - 1$	$t - 1$
3	$2t - 2$	$t - 2$
5	$2t - 3$	$t - 3$
.	.	.
.	.	.
$2t - 1$	$t$	0

Observație. Fig 284 corespunde tabelului 3 pentru  $k = 3$ ,  $m = 6$ .

Fie acum,  $k = 3 + 2r$  un număr impar oarecare mai mare decât trei și  $m$  orice număr natural. Vom nota prin  $p$  restul împărțirii lui  $m$  prin  $k$  și vom considera două cazuri: 1)  $0 \leq p \leq r + 1$ , 2)  $r + 2 \leq p \leq 2r + 2$ .

În primul caz  $m = kt + q$ ,  $0 \leq q = p \leq r + 1$ ,  $N = 2t + 1$  iar respectiva tabelă se obține adăugând la tabelul 3,  $2r$  coloane care se obțin dacă în tabelul 2 se înlocuiește  $t$  prin  $2t$ .

În al doilea caz  $m = k(t - 1) + r + 2 + q$ ,  $0 \leq q \leq r$ ,  $N = 2t$ , iar respectiva tabelă se obține prin adăugarea la tabelul 5 a  $2r$  coloane care se obțin dacă în tabelul 2 se înlocuiește  $t$  prin  $2t - 1$ .

M.L. Gherver

**M 176.** De care latură a triunghiului  $ABC$  este mai aproape ortocentrul triunghiului dacă  $\angle A < \angle B < \angle C$ ? De care vîrf este mai aproape?

L. Snaider (elevă clasa a IX-a)

Vom nota înălțimile prin  $AK$ ,  $BM$ ,  $CP$  și punctul lor de intersecție prin  $O$ . Distanțele de la punctul  $O$  la laturi sînt egale cu  $OK$ ,  $OM$ ,  $OP$ .

Presupunem că  $C \neq 90^\circ$ . Atunci  $OK < OM < OP$ .

Vom demonstra prima inegalitate (a doua se demonstrează analog). Într-adevăr,

$$\frac{OM}{OC} = \frac{AP}{AC} = \cos \angle A, \quad \frac{OK}{OC} = \frac{BP}{BC} = \cos \angle B.$$

Întrucît  $\angle A < \angle B$ , rezultă  $\cos \angle A > \cos \angle B$ , de unde  $OM > OK$  c.c.t.d.



Distanțele de la 0 la vîrfuri sînt situate în ordinea următoare

$$OA > OB > OC.$$

Vom demonstra prima inegalitate (a doua se demonstrează analog).

$$\frac{OA}{OP} = \frac{1}{\sin \angle OAP} = \frac{1}{\cos \angle B}, \quad \frac{OB}{OP} = \frac{1}{\sin \angle OBP} = \frac{1}{\cos \angle A}$$

de unde  $OA > OB$ . Rezolvarea dată este valabilă pentru toate triunghiurile afară de cele dreptunghice. Găsiți răspunsul pentru acest caz singuri.

M 177. Să se găsească toate soluțiile ecuației

$$\sqrt[n]{x^n - a^n} + \sqrt[n]{2a^n - x^n} = a$$

unde  $a$  este un număr real dat iar  $n$  este un număr natural mai mare decît 1.

T. Temirov

Analizăm la început cazul particular  $a = 0$ . Obținem

$$\sqrt[n]{x^n} + \sqrt[n]{-x^n} = 0$$

Dacă  $n$  este par, atunci singura soluție va fi  $x = 0$ . Dacă  $n$  este impar atunci orice număr real  $x$  este soluție.

Fie acum  $x \neq 0$ . Notăm  $\sqrt[n]{x^n - a^n}$  prin  $y$  și  $a - y = z$  și obținem sistemul

$$\begin{cases} y + z = a \\ y^n + z^n = a^n. \end{cases} \quad (1)$$

Fie

$$\begin{cases} y = a \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} y = 0 \\ z = a. \end{cases}$$

În aceste cazuri ambele ecuații sînt satisfăcute. Să calculăm pe  $x$ :

$$x^n = 2a^n \quad \text{sau} \quad x^n = a^n.$$

Aceste egalități sînt îndeplinite pentru

$$x = \begin{cases} a \sqrt[n]{2} \\ \pm a \sqrt[n]{2} \end{cases} \quad \text{și} \quad x = \begin{cases} a \text{ dacă } n \text{ este impar} \\ \pm a \text{ dacă } n \text{ este par} \end{cases}$$

respectiv. Înlocuind aceste valori ale lui  $x$  în ecuația inițială obținem în ambele cazuri același lucru:

$$\sqrt[n]{a^n} = a.$$

Aceasta este adevărată:

pentru orice  $a$ , dacă  $n$  este impar,

pentru  $a \geq 0$  dacă  $n$  este par.

Să demonstrăm acum că dacă  $a \neq 0$ ,  $y \neq 0$ ,  $z \neq 0$ , sistemul (1) nu are soluție. Este suficient să se considere cazul în care  $a > 0$ ,  $y \geq z$ . Într-adevăr, dacă  $\{y, z, a\}$  este soluția sa cu  $a < 0$  atunci și  $\{-y, -z, -a\}$  este soluție. Mai departe, dacă în soluție  $y$  și  $z$  schimbă locurile obținem din nou o soluție.

Însemnează că dacă există o soluție pentru  $a \neq 0$  există soluție și pentru  $a > 0$ , astfel încît  $y \geq z$ .

Să considerăm două cazuri

a)  $z > 0$ . Atunci

$$y^n + z^n = (y + z)^n \quad (2)$$

de unde  $z^n = (y + z)^n - y^n = (y + z - y)[(y + z)^{n-1} + \dots + y^{n-1}]$ . Dar  $z^n < z(y + z)^{n-1}$  deci egalitatea (2) nu este posibilă.

b)  $z < 0$ . Punem  $z = -w$ .

Pentru  $n$  par, sistemul (1) ia forma

$$\begin{cases} y - w = a \\ y^n + w^n = a^n \end{cases}$$

Nu are soluții, fiindcă din prima ecuație rezultă  $y > a$ , de unde  $y^n > a^n$  și cu atât mai mult  $y^n + w^n > a^n$ . Pentru  $n$  impar, sistemul (1) are forma:

$$\begin{cases} y - w = a \\ y^n - w^n = a^n \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} a + w = y \\ a^n + w^n = y^n \end{cases}$$

care este analog cu cazul a).

Astfel, iată răspunsul definitiv.

Dacă  $n$  este impar, pentru orice  $a \neq 0$ ,  $x_1 = a\sqrt[n]{2}$ ,  $x_2 = a$ ; pentru  $a = 0$ , orice număr este soluție.

Dacă  $n$  este par, atunci, pentru  $a > 0$ ,  $x_{1,2} = \pm a\sqrt[n]{2}$ ,  $x_{3,4} = \pm a$ , pentru  $a = 0$ ,  $x = 0$  și pentru  $a < 0$ , nu are soluții.

A.L.Toom

**M 178.** Coborîm dintr-un punct arbitrar  $P$  al bisectoarei unghiului  $A$  al triunghiului  $ABC$  perpendicularele  $PA_1$ ,  $PB_1$ ,  $PC_1$  respectiv pe laturile  $BC$ ,  $CA$  și  $AB$ . Fie  $R$  punctul de intersecție a dreptelor  $PA_1$  și  $B_1C_1$ . Să se demonstreze că dreapta  $AR$  împarte latura  $BC$  în două părți egale.

Vom duce prin punctul  $R$  o dreaptă paralelă cu latura  $BC$ . Ea intersectează laturile  $AC$  și  $AB$  respectiv în punctele  $B_2$  și  $C_2$ . Vom demonstra că  $R$  este mijlocul segmentului  $B_2C_2$ ; în acest caz și numai în acest caz dreapta  $AR$  împarte pe  $BC$  în două părți egale. Întrucît  $PR \perp B_2C_2$ , pentru acest lucru trebuie demonstrat că triunghiul  $B_2PC_2$  este isoscel. Vom demonstra congruența unghiurilor  $C_2B_2P$  și  $B_2C_2P$ . Patrulaterul  $RC_2C_1P$  este inscriptibil (acest lucru rezultă din  $\angle C_2RP = \angle C_2C_1P = 90^\circ$ ), rezultă că  $\angle RC_2P = \angle RC_1P$ . La fel se dovedește inscriptibil patrulaterul  $AC_1PB_1$  ( $\angle AC_1P = \angle AB_1P = 90^\circ$ ), prin urmare,  $\angle B_2C_2P = \angle PC_1B_1 = \angle PAB_1$ . Raționamente analoge pentru patrulaterul  $B_2B_1RP$ , și  $B_1AC_1P$  arată că  $\angle C_2B_2P = \angle PAC_1$ . Dar  $AP$  este bisectoarea unghiului  $A$ , astfel încît congruența unghiurilor  $C_2B_2P$  și  $B_2C_2P$  este demonstrată. Problema este rezolvată.

I.F. Șarighin



M 179. Pentru orice triunghi care nu este dreptunghic,  $T$ , vom nota prin  $T_1 = H(T)$  triunghiul ortic, adică triunghiul ale cărui vîrfuri sînt picioarele înălțimilor triunghiului  $T$ ; prin  $T_2 = H(T_1)$  triunghiul ortic al triunghiului  $T_1$ , și așa mai departe,  $T_3 = H(T_2)$ ,  $T_4 = H(T_3)$  ...

Cum trebuie să fie unghiurile triunghiului  $T$ , pentru ca:

- triunghiul  $H(T)$  să fie ascuțitunghic?
- în șirul  $T_1, T_2, T_3, \dots$  să se întâlnească un triunghi dreptunghic  $T_n$  (în acest caz  $H(T_n) = T_{n+1}$  nu este definit)?
- triunghiul  $T_3 = H(H(H(T)))$  să fie asemenea cu triunghiul  $T$ ?
- Pentru fiecare  $n = 1, 2, 3, \dots$  să se indice cîte triunghiuri  $T$  neasemenea între ele există, astfel încît  $T_n$  să fie asemenea cu  $T$ .

N.B. Vasiliev

Fie  $AA_1, BB_1, CC_1$  înălțimile triunghiului  $T$ .

Măsurile  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ , ale unghiurilor  $A_1, B_1, C_1$  ale triunghiului  $A_1B_1C_1$  se exprimă prin măsurile  $\alpha, \beta, \gamma$  ale unghiurilor  $A, B, C$  ale triunghiului  $ABC$  în felul următor

$$\alpha_1 = \pi - 2\alpha, \quad \beta_1 = \pi - 2\beta, \quad \gamma_1 = \pi - 2\gamma \quad (I_1)$$

dacă nici unul dintre unghiurile  $\alpha, \beta, \gamma$ , nu depășește  $\frac{\pi}{2}$ :

$$\alpha_1 = 2\alpha - \pi, \quad \beta_1 = 2\beta, \quad \gamma_1 = 2\gamma \quad (I_2)$$

dacă  $A$  este obtuz;

$$\alpha_1 = 2\alpha, \quad \beta_1 = 2\beta - \pi, \quad \gamma_1 = 2\gamma \quad (I_3)$$

dacă  $B$  este obtuz;

$$\alpha_1 = 2\alpha, \quad \beta_1 = 2\beta, \quad \gamma_1 = 2\gamma - \pi \quad (I_4)$$

dacă  $C$  este obtuz.

Pentru demonstrație se poate folosi faptul că punctele  $A_1$  și  $B_1$  sînt situate pe cercul de diametru  $AB$  și considerații analoage pentru celelalte perechi de puncte (fig. 285 și 286).

Din formulele I rezultă că toate cele trei unghiuri  $A_1, B_1, C_1$  sînt ascuțite, atunci și numai atunci cînd este îndeplinită una dintre următoarele două condiții: sau toate măsurile  $\alpha, \beta, \gamma$  sînt cuprinse între  $\frac{\pi}{4}$  și  $\frac{\pi}{2}$  sau două

dintre ele sînt mai mici decît  $\frac{\pi}{4}$  iar a treia este mai mică decît  $\frac{3\pi}{4}$ .

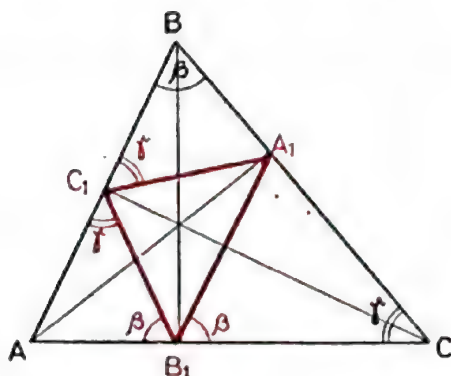


Fig. 285

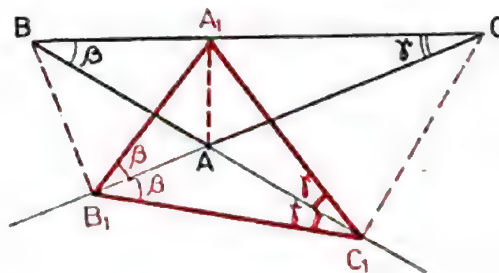


Fig. 286

Să observăm că  $\alpha_1$ , pentru  $\alpha$  dat poate să fie egal numai cu unul dintre următoarele trei numere:  $2\alpha - \pi$ ,  $\pi - 2\alpha$ , sau  $2\alpha$ ; respectiv  $\alpha$  poate să fie egal cu  $\frac{\pi + \alpha_1}{2}$ ,  $\frac{\pi - \alpha_1}{2}$  sau  $\frac{\alpha_1}{2}$ . De aici rezultă că  $\alpha_i = \frac{\pi k}{2^m}$  ( $k, m$  numere întregi oarecare) atunci și numai atunci când  $\alpha = \frac{\pi l}{2^{m+1}}$  ( $l$  este un număr întreg oarecare). De aceea, șirul  $T_1, T_2, T_3 \dots$  „degenerează” (adică un anumit triunghi  $T_{n+1}$  este dreptunghic) atunci și numai atunci când unul dintre numerele  $\alpha, \beta$  sau  $\gamma$  este egal cu  $\frac{\pi s}{2^n}$ , unde  $s$  și  $n$  sînt numere întregi pozitive oarecare.

Acum vom trece la o chestiune mai dificilă: în ce caz triunghiul  $T_n$  este asemenea cu  $T$ . Vom începe cu  $n=1$ . Pentru ca triunghiurile care au unghiurile de măsuri  $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$  respectiv  $(\alpha, \beta, \gamma)$  să fie asemenea trebuie ca tripletul de numere  $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$  după o anumită permutare a lor să coincidă cu  $(\alpha, \beta, \gamma)$ . Este evident că se poate studia numai cazul

$$\alpha \geq \beta \geq \gamma. \quad (2)$$

Unghiurile oricărui triunghi pot să fie notate astfel încît măsurile lor să satisfacă inegalitățile (2).

Dacă  $\alpha < \frac{\pi}{2}$  (adică toate unghiurile sînt ascuțite), atunci, întrucît din (2) rezultă inegalitățile  $2\pi - \alpha \leq 2\pi - \beta \leq 2\pi - \gamma$ , pentru asemănarea triunghiurilor  $T_1$  și  $T$  trebuie să fie adevărat sistemul

$$\pi - 2\alpha = \gamma, \quad \pi - 2\beta = \beta, \quad \pi - 2\gamma = \alpha$$

de unde  $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$ .

Dacă  $\alpha > \frac{\pi}{2}$ , atunci din (2) putem folosi numai faptul că  $2\beta \geq 2\gamma$  și trebuie examinate trei relații posibile între unghiurile  $\alpha_1, \beta_1$  și  $\gamma_1$ :  $2\beta \geq 2\gamma \geq 2\alpha - \pi$ ,  $2\beta \geq 2\alpha - \pi \geq 2\gamma$  și  $2\alpha - \pi \geq 2\beta \geq 2\gamma$ . Prima dintre ele duce la sistemul

$$2\beta = \alpha, \quad 2\gamma = \beta, \quad 2\alpha - \pi = \gamma$$

de unde găsim o soluție interesantă:  $\alpha = \frac{4\pi}{7}$ ,  $\beta = \frac{2\pi}{7}$ ,  $\gamma = \frac{\pi}{7}$ , iar celelalte două, așa cum se vede ușor, conduc la soluții „degenerate” (unul dintre unghiuri este nul) care nu convin sau, cum se spune „nu intră în domeniul valorilor admisibile”.

Pentru alte valori ale lui  $n$  indicăm planul raționamentelor ulterioare. Din (I) prin inducție se pot obține formulele următoare pentru unghiurile triunghiului:

$$\alpha_n = s2^n\alpha + p\pi$$

$$\beta_n = s2^n\beta + q\pi$$

$$\gamma_n = s2^n\gamma + r\pi$$

unde  $s$  este egal cu  $+1$  sau  $-1$ ,  $p, q$  și  $r$  sînt numere întregi (demonstrăm că pentru  $\alpha, \beta$  și  $\gamma$  dați și cu condițiile suplimentare  $\alpha_n \geq 0$ ,  $\beta_n \geq 0$ ,  $\gamma_n \geq 0$ ,  $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n = \pi$ , parametrii  $p, q, r$  se determină din (3) în mod unic). Vom scrie șase sisteme egalînd tripletul  $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$  cu cele șase permutări



ale lui  $(\alpha, \beta, \gamma)$  și-l vom rezolva pe fiecare. Dintre soluțiile găsite (care depind de parametrii  $p, q, r, s$ ) alegem pe acelea care satisfac condițiile  $\alpha \geq \beta \geq \gamma$ . Pentru ca să răspundem la întrebarea: câte soluții există (pentru un  $n$  dat) trebuie să vedem câte soluții în numere întregi  $p, q, r, s$  (unde  $s = \pm 1$ ) admit cele șase sisteme de inecuații. Pentru ca să se realizeze acest plan ar trebui să umplem multe pagini de calcule. Dar se poate găsi răspunsul fără nici un sistem și nici o inegalitate dacă chemăm în ajutor... geometria. Ne vom mulțumi aici să indicăm cum se alege o interpretare geometrică comodă a problemei (cu totul deosebită de cea cu care am început).

Desenăm un triunghi echilateral  $y$  de înălțime egală cu  $\pi$ . Fiecare triplet de numere pozitive  $(\alpha, \beta, \gamma)$  astfel încât  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$  corespunde unui punct din interiorul triunghiului care are distanțele la cele trei laturi egale, respectiv cu  $\alpha, \beta$  și  $\gamma$  (fig. 287). Această corespondență dintre tripletele  $(\alpha, \beta, \gamma)$  și punctele  $T$  ale triunghiului este bijectivă. Permutările „coordonatelor”  $\alpha, \beta, \gamma$ , corespund la transformările lui  $y$  în el însuși cu păstrarea distanței (rotații și simetrii). Transformarea  $H$  dată de formulele (I) este reprezentată în figura 288; pe liniile mijlocii ale lui  $y$  ea nu este definită; pe fiecare dintre cele patru triunghiuri (corespunzătoare celor patru cazuri ale formulei (I)) ea îl mărește de două ori și îl reprezintă pe întregul triunghi  $y$  (o asemănare de raport 2 care transformă un segment într-un segment paralel). În figura 289 este dat răspunsul la punctul a). Sînt colorate acele puncte ale triunghiului  $y$  care corespund unui triunghi  $H(T)$  ascuțitunghic.

Prin inducție după  $n$  se stabilește că transformarea  $H^n$  poate fi caracterizată astfel: pe dreptele paralele cu laturile triunghiului și care împart înălțimea în  $2^n$  părți congruente,  $H^n$  nu este definită; în fiecare dintre cele  $2^{2n}$  triunghiuri în care aceste drepte împart triunghiul  $y$ ,  $H^n$  este o asemănare de raport  $2^n$  care reprezintă acest triunghi în întregul triunghi  $y$  (în fig. 290 este reprezentată  $H^2$ ).

Condiția  $\alpha \geq \beta \geq \gamma$  determină unul dintre cele șase triunghiuri în care este împărțit triunghiul  $y$  de înălțimile sale. Pe acest triunghi dreptunghic îl notăm  $y_1$ , iar pe celelalte așa cum se vede în figura 291 respectiv  $y_2, \dots, y_6$ . Fie  $f_j : y \rightarrow y$  o transformare a lui  $y$  astfel încât  $f_j(y_j) = y_1$ . Dacă fiecare dintre cele  $2^{2n}$  triunghiuri mici în care este împărțit triunghiul  $y$  se împarte în șase triunghiuri de către înălțimile sale, atunci  $y_1$  se va împărți în  $2^{2n}$  triunghiuri asemenea cu el (în raportul  $1 : 2^n$ ) pe care le vom nota  $x_j$ ,  $1 \leq j \leq 6$  (fig. 292). După transformarea  $H^n$ , fiecare triunghi  $x_i$  trece într-un anumit  $y_j$  și apoi, dacă permutăm numerele din tripletul  $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$  în ordine descrescătoare, adică aplicăm pe  $f_j$ , atunci produsul celor două transformări  $f_j \cdot H^n$  îl transformă pe  $x_i$  în  $y_1$  (o transformare de asemănare cu raportul  $2^n$ ).

Afirmăm că în fiecare dintre cele  $2^{2n}$  triunghiuri  $x_i \subset y_1$  există exact un singur punct  $P_i \in x_i$  astfel încât  $f_j(H^n(P_i)) = P_i$ . Din aceste puncte — care de fapt ar constitui răspunsul de la punctul d) — trebuie excluse punctele

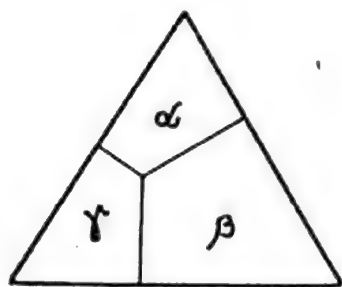


Fig. 287

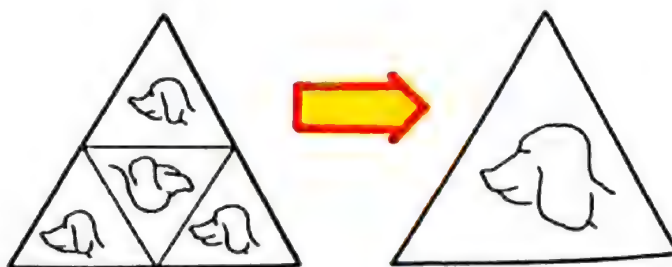


Fig. 289

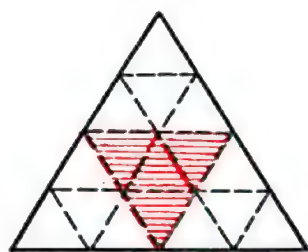


Fig. 289

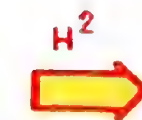
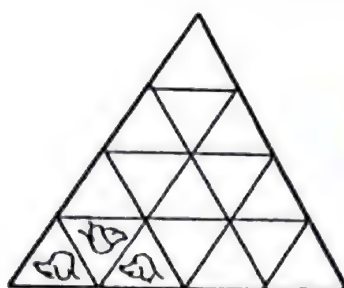


Fig. 290

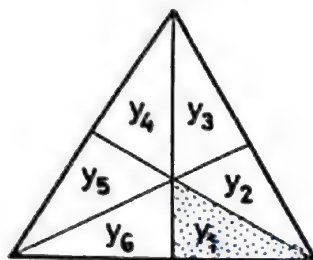


Fig. 291

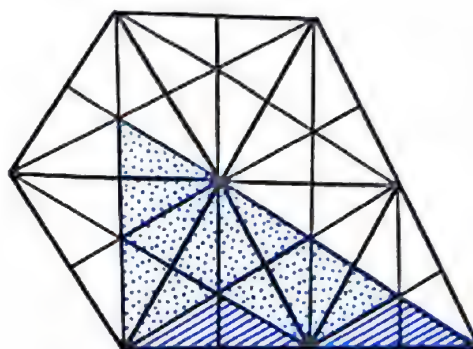


Fig. 292

fixe ale acelor triunghiuri  $x_i$  ale căror catete mari sînt așezate pe cateta mare a triunghiului  $y_1$  (acestea sînt în număr egal cu raportul de asemănare  $2^n$ ), întrucît pentru acestea (și cum se vede ușor numai pentru acestea) punctul fix cade pe frontieră, acolo unde transformarea  $H^n$  nu este definită. De aici rezultă că răspunsul la punctul d) este  $2^{2n} - 2^n$ .

Rămîne să demonstrăm afirmația privitoare la punctele fixe. Pentru aceasta, vom aplica triunghiului  $y_1$  și transformării  $p$ ,  $p: y_i \rightarrow x_i$ , inversa transformării  $f_j: H^n$  următoarea teoremă:

**T e o r e m ă:** Fie  $Z$  o figură oarecare din plan (toate punctele de frontieră ale lui  $Z$  se consideră că aparțin lui  $Z$ ) și  $p: Z \rightarrow Z$  o transformare de asemănare de raport  $k < 1$ . Atunci există un singur punct fix al transformării  $p$ , care aparține lui  $Z$ , adică un punct  $z_0 \in Z$  pentru care  $p(z_0) = z_0$ .

**Demonstrația teoremei** pentru o figură mărginită  $Z$  (și numai acest caz ne interesează), cel mai simplu se poate face astfel. Fie  $Z_n = p^n(Z)$  (rezultatul aplicării de  $n$  ori a lui  $p$ ). Atunci  $Z \supset Z_1 \supset Z_2 \supset Z_3 \supset \dots$  și intersecția tuturor  $Z_n$  constă dintr-un singur punct  $z_0$  (fig. 293). Acesta este chiar punctul fix al transformării  $p^*$ .

O altă demonstrație care permite să se indice punctul fix și este valabilă și pentru figurile nemărginite  $Z$  se poate obține cu ajutorul numerelor complexe. Orice transformare care este asemănare a planului, poate fi scrisă ca rezultatul aplicării succesive a unei rotații, unei omotetii de coeficient  $k$  și a unei translații:  $z \xrightarrow{p} az + b$  și eventual a unei simetrii relative la o dreaptă:  $z \xrightarrow{p} a\bar{z} + b$  (aici  $a$  și  $b$  sînt numere complexe,  $|a| = k$ ,  $\bar{z} = x - iy$

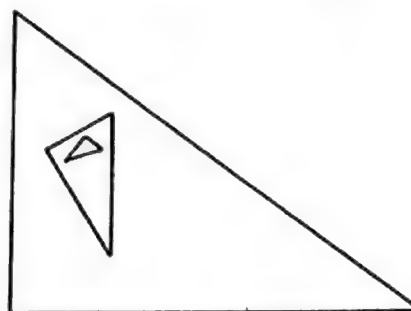


Fig. 293

\* Nota trad. Deși afirmația este corectă, demonstrația este „numai schițată”.



conjugatul lui  $z = x + iy$ ). În primul caz, punctul fix se găsește ca soluția ecuației

$$z_0 = az_0 + b \Rightarrow z_0 = \frac{b}{1-a} = \frac{b+ab}{1-k^2}$$

În al doilea caz, ca soluție a sistemului de ecuații

$$\begin{cases} z_0 = az_0 + b \\ \bar{z}_0 = \bar{a}z_0 + \bar{b} \end{cases} \Rightarrow z_0 = \frac{b+ab}{1-a\bar{a}} = \frac{b+ab}{1-k^2}.$$

În ambele cazuri este clar că  $z_0$  nu poate să fie în afara figurii  $Z$ : dacă distanța  $\rho$  de la  $z_0$  până la cel mai apropiat de el punct al lui  $Z$  ar fi pozitivă, atunci distanța de la  $z_0$  până la  $p(z_1)$  ar trebui să fie egală cu  $k\rho < \rho$  și deci  $p(z_1)$  nu ar putea să aparțină lui  $Z$  deși după ipoteză  $p(Z) \subset Z$ .

Desigur că teorema despre existența punctului fix pentru o asemănare de coeficient  $k < 1$ , se poate demonstra și pur geometric fără treceri la limită și numere complexe.

N.B. Vasilev

**M 180.** Două persoane joacă următorul joc. Unul se gîndește la un număr natural  $n$ , iar celălalt pune întrebări de tipul „este adevărat că  $n \geq x$ ” ( $x$  se poate lua după aprecierea sa) și primește răspunsuri „da” sau „nu”. Fiecărei strategii posibile  $T$  a celui de al doilea jucător îi asociem funcția  $f_T(n)$  egală cu numărul întrebărilor (pînă la ghicire) dacă a fost gîndit numărul  $n$ .

Fie de exemplu, strategia  $T$  care constă în faptul că la început se pun întrebările: „este adevărat că  $n \geq 10$ ?”, „este adevărat că  $n \geq 20$ ?”, ..., pînă cînd, la o anumită întrebare „este adevărat că  $n \geq 10(k+1)$ ?” se va da răspunsul „nu” și apoi se pun întrebările „este adevărat că  $n \geq 10k+1$ ?”, „că  $n \geq 10k+2$ ?” ș.a.m.d. Atunci  $f_T(n) = \frac{n-a}{10} + a + 2$ , unde  $a$  este ultima cifră a numărului

$n$ , deci  $f_T(n)$  crește aproximativ ca  $\frac{n}{10}$ .

a) Propuneți o strategie în care funcția  $f_T(n)$  să crească cît mai încet posibil.  
b) Comparînd două strategii este util să introducem în locul funcției  $f_T(n)$  funcția  $f'_T(n) = \max_{1 \leq k \leq n} f_T(k)$  care arată după ce număr de întrebări se poate ghici orice număr care nu-l depășește pe  $n$ . Evaluați inferior pe  $f'_T(n)$  pentru o strategie oarecare  $T$ .

Ia. M. Barzdîn

Presupunem la început că  $n$  nu este un număr natural arbitrar ci este cuprins în intervalul  $1 \leq n \leq N$  unde  $N$  este un număr dat. Atunci problema minimalizării numărului maxim de întrebări pentru ghicirea lui  $n$  este cunoscută.

Cea mai bună strategie, să o numim  $S_n$ , constă în faptul că fiecare întrebare nouă, împarte intervalul valorilor pe care le-ar mai putea lua necunoscuta  $n$ , în două părți egale (sau diferind prin 1). Anume, dacă știm deja că  $a \leq n < b$ , atunci trebuie pusă întrebarea: „este adevărat că  $n \geq \frac{a+b}{2}$ ?”.

Strategia  $S_n$  este descrisă.

Se poate demonstra că numărul maxim de întrebări pentru ghicirea numărului  $n \leq N$ , prin utilizarea lui  $S_n$  este egal cu  $\lceil \log_2 N \rceil$  unde  $\lceil \cdot \rceil$  reprezintă cel mai mic număr întreg, mai mare sau egal cu  $\cdot$ .

Răspundem acum la întrebarea b). Vom demonstra că pentru orice strategie  $T$  și orice număr  $n$ ,

$$f'_T(n) \geq \lfloor \log_2 n \rfloor.$$

**Demonstrație.** Presupunem că s-a dat numărul natural  $N$  și numărul necunoscut  $n$  se găsește în intervalul de la 1 la  $N$ . Fie  $2^{m-1} < N \leq 2^m$ .

Atunci, cel mai mare interval  $P_1$  al valorilor pe care le mai poate lua  $n$  după prima întrebare, este strict mai mare decât  $2^{m-2}$ , cel mai mare interval  $P_2$  în care se poate găsi  $n$  după a doua întrebare este mai mare decât  $2^{m-3}$  ș.a.m.d. Prin inducție obținem că cel mai mare interval  $P_{m-1}$  în care se poate găsi numărul  $n$  după  $m - 1$  întrebări este mai mare decât 1. Rezultă că numărul maxim de întrebări (pentru răspunsurile cele mai nefavorabile) nu e mai mic decât

$$m = \lfloor \log_2 N \rfloor. \quad (1)$$

Să ne ocupăm de chestiunea (a) a problemei.

Presupunem că am pus câteva întrebări de tipul „este adevărat că  $n \geq x$ ” și am obținut răspunsurile „da”; numărul  $n$  este tot timpul mai mare sau egal cu  $x$ . E clar că următorul  $x$  trebuie să se ia mai mare decât toți cei deja utilizați (altfel această întrebare va fi inutilă).

Astfel, la începutul jocului, trebuie să se mărească  $x$  pînă cînd cel care răspunde va zice prima oară „Nu”. Fie  $x_1 < x_2 < x_3 < \dots$  șirul pe care cel care ghicește a hotărît să-l spună pînă cînd primește primul răspuns „nu”. El trebuie să fie infinit fiindcă  $n$  poate să fie oricît de mare.

Acum urmează a doua etapă a jocului: la întrebarea  $k$ , primul jucător răspunde prima oară „nu”. Astfel  $x_{k-1} \leq n < x_k$ .

Mai departe se poate aplica strategia analoagă cu strategia  $S_n$  descrisă mai sus, împărțind intervalul rămas de fiecare dată în două. Evident că, astfel, se vor folosi pentru acest lucru, pînă la  $\lfloor \log_2(x_k - x_{k-1}) \rfloor$  întrebări.

Pentru a determina complet strategia rămîne să alegem șirul crescător  $x_k$ .

Vom analiza trei strategii concrete care se deosebesc doar prin alegerea șirului  $x_k$ .

1. Strategia  $T^1$ :  $x_k = 10k$ . Atunci, așa cum s-a arătat în textul problemei,  $f_T(n)$  crește aproximativ ca  $\frac{n}{10}$ .

2. Strategia  $T^2$ :  $x_k = 2^k$ . Atunci numărul întrebărilor în prima etapă nu e mai mare decât  $\lfloor \log_2 n \rfloor$ , iar numărul întrebărilor din etapa a doua nu e mai mare decât  $\left\lfloor \log_2 \frac{n}{2} \right\rfloor$ . În total se obțin aproximativ  $2 \log_2 n$  întrebări.

3. Strategia  $T^3$ :  $x_k = 2^{2^k}$ . Acum numărul întrebărilor din prima etapă se micșorează mult. Într-adevăr, fie

$$2^{2^{k-1}} \leq n < 2^{2^k}. \quad (2)$$

Atunci numărul întrebărilor din prima etapă a jocului este egal cu  $k$  și nu depășește

$$k \leq \log_2 \log_2 n + 1,$$

adică pentru  $n$  mare, este destul de mic față de  $\log_2 n$ . În a doua etapă utilizăm aproximativ

$$\log_2(2^{2^k} - 2^{2^{k-1}}) \approx \log_2 2^{2^k} = 2^k$$

întrebări. Acest lucru este un rezultat bun sau rău? Aceasta depinde de numă-



rul  $n$ . Se arată că pentru cel mai mare  $n$  din intervalul (2), această strategie este mai bună decât pentru cel mai mic  $n$  din același interval.

Fie  $n = 2^{2^k} - 1$ . Atunci  $f_{T^2}(n) \approx \log_2 \log_2 n + 2^k \approx \log_2 n + \log_2 \log_2 n$ . Pentru  $n$  mare, al doilea termen este simțitor mai mic decât primul și raportul dintre  $f_{T^2}(n)$  și evaluarea inferioară  $\log_2 n$  (vezi formula (1)) este aproape de 1.

Fie acum  $n = 2^{2^{k-1}}$ . Atunci mărimea  $f_{T^2}(n)$  este aceeași și exprimată prin  $n$  ea este

$$f_{T^2}(n) \approx \log_2 \log_2 n + 2^k \approx 2 \log_2 n + \log_2 \log_2 n$$

adică aproximativ de două ori depășește evaluarea inferioară (1). Astfel, pentru aceste valori ale lui  $n$ , strategia  $T^3$  nu este mai bună decât strategia  $T^2$ .

Această situație este ilustrată grafic în figura 294. Pe acest grafic, linia roșie reprezintă evaluarea inferioară de mai sus:  $\log_2 n$  (graficul este neprecis).

Linia neagră în trepte reprezintă graficul funcției  $f_{T^2}(n)$ . Această funcție este constantă pe fiecare interval de formă (2). La capătul unui astfel de interval evaluarea inferioară aproape că o atinge și apoi deodată, printr-un salt  $f_{T^2}(n)$  se mărește și devine aproximativ de două ori mai mare.

Se ridică întrebarea: există o astfel de strategie  $T^4$ , pentru care  $f_{T^4}(n)$  pentru toți  $n$  să nu difere prea mult de evaluarea inferioară? (Graficul presupus al lui  $f_{T^4}(n)$  este trasat cu albastru.)

Vom descrie acum strategia  $T^4$  astfel încît

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{T^4}(n)}{\log_2 n} = 1, \quad (3)$$

adică depășirea funcției  $f_{T^4}(n)$  față de  $\log_2 n$  să tindă către zero pentru  $n$  mare.

Prima etapă a jocului, ca și mai sus este definită de șirul de numere  $x_k = 2^{2^k}$ . Presupunem că la întrebarea  $k$ , obținem primul răspuns „nu”, de unde  $2^{2^{k-1}} \leq n < 2^{2^k}$ . Descriem strategia  $T^4$ , pentru etapa a doua. Atașăm fiecărui  $n$  din intervalul (2) o „ponderare” egală cu  $1/n$ . Vom pune acum întrebări astfel încît să se împartă aproximativ în două nu numărul de valori pe care le poate lua  $n$  ci suma ponderilor lor.

Să calculăm aproximativ câte întrebări vor duce la ghicirea unui număr oarecare  $n$  din intervalul (2). Punem  $m = 2^{2^{k-1}}$ . La început suma ponderilor este aproximativ egală cu

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \dots + \frac{1}{m^2} &\approx \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m^2}\right) - \left(1 + \dots + \frac{1}{m}\right) \approx \\ &\approx \ln(m^2) - \ln m = \ln m \leq \ln n. \end{aligned}$$

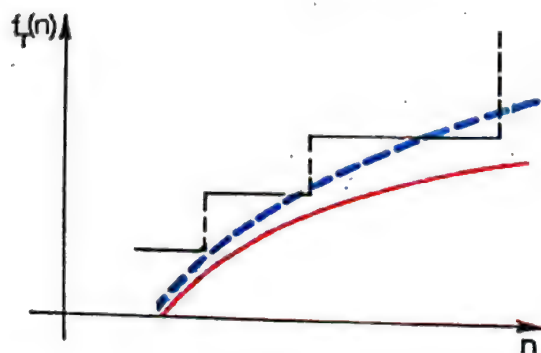


Fig. 294

Dacă îl ghicim pe  $n$ , atunci vom aduce suma ponderilor pînă la  $\frac{1}{n}$ .

Rezultă că suma ponderilor se micșorează aproximativ de  $n \ln n$  ori. Să presupunem că de fiecare dată am reușit să o împărțim în două părți exact. Atunci sînt necesare un număr de

$\log_2 n \ln n = \log_2 n + \log_2 \ln n = \log_2 n$  întrebări (al doilea termen, pentru

$n$  mare, este simțitor mai mic decât primul). Întrucât suma ponderilor, de obicei nu reușim să o împărțim în două părți egale, numărul întrebărilor, în realitate este ceva mai mare. Se poate arăta (dar acest lucru este mai greu) că acest număr nu depășește pe  $\log_2 n + \text{const} \cdot \log_2 \log_2 n$ . Adăugând numărul întrebărilor din prima etapă, mărim coeficientul termenului al doilea. Astfel am construit o strategie care permite să se ghicească orice  $n$ , după un număr nu mai mare de

$$\log_2 n + \text{const.} \cdot \log_2 \log_2 n$$

întrebări.

Se poate demonstra ușor că această funcție satisface condiția (3).

Ia. M. Bardzin, A.L. Toom

**M 181.** Care este cea mai mică lungime pe care trebuie să o aibă o bucată de sîrmă din care se poate face o colivie pentru un cub cu latura de 10 cm? (Sîrma poate trece de-a lungul unei muchii de două ori, se poate îndoi la  $90^\circ$  și la  $180^\circ$  dar nu se poate rupe.)

**Răspuns.** Trebuie cel puțin 150 cm de sîrmă. În figura 295 se arată cum se poate face colivia dintr-o sîrmă de această lungime. Rămîne să se demonstreze că dintr-o bucată mai scurtă de sîrmă, nu se poate face colivia. Presupunem temporar că îndoim sîrma numai în vîrfurile cubului și că sîrma din care este făcută colivia începe și se termină în vîrfurile cubului. Să evaluăm numărul de muchii ale acestei colivii. Desigur că nu vom număra muchiile cubului — acestea sînt 12 — ci numărul muchiilor făcute din sîrmă. În colivie, există un singur vîrf în care se termină sîrma și un singur vîrf din care începe (ele pot să și coincidă). Vom numi aceste vîrfuri extreme și pe toate celelalte, de trecere. La fiecare vîrf de trecere ajung un număr par de muchii. Într-adevăr, sîrma care intră în acest vîrf, trebuie să și iasă din el. La un vîrf extrem ajung cel puțin trei muchii. De aceea numărul muchiilor este cel puțin  $\frac{6 \cdot 4 + 2 \cdot 3}{2} = 15$ . Într-adevăr, fiecare muchie ajunge la două vîrfuri, de aceea, dacă la vîrfurile cu numărul  $i$  ajung  $c_i$  muchii ( $i = 1, 2, \dots, 8$ ), atunci  $c_1 + c_2 + \dots + c_8$  este egală cu dublul numărului muchiilor. Astfel în colivie sînt cel puțin 15 muchii și fiindcă lungimea unei muchii este de 10 cm rezultă că trebuie cel puțin 150 cm de sîrmă.

A mai rămas de demonstrat că dacă se îndoie sîrma în punctele interioare ale muchiilor, tot nu se poate face o colivie cu mai puțin de 150 cm de sîrmă. Această situație se poate reduce la cea precedentă în modul următor: fără a mări lungimea sîrmei, orice colivie se poate transforma astfel încît toate îndoiturile să fie în vîrfuri. Nu vom descrie această transformare ci vom da numai niște schițe lămuritoare (vezi fig. 296 a-e); în ele este reprezentată o muchie a cubului și sîrma care o acoperă.

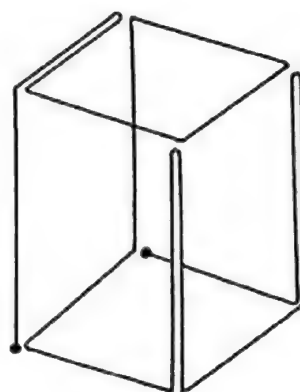


Fig. 295



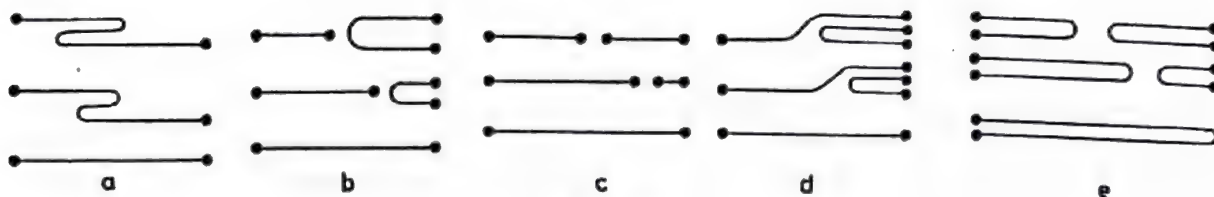


Fig. 296

M 182. Să se demonstreze că dacă

a)  $a > 0, b > 0, c > 0$ , atunci

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

b)  $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$ , atunci

$$\frac{a}{b+c+d} + \frac{b}{a+c+d} + \frac{c}{a+b+d} + \frac{d}{a+b+c} \geq \frac{4}{3}.$$

c)  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  sînt numere pozitive ( $n \geq 2$ ), atunci

$$\frac{a_1}{a_2 + a_3 + \dots + a_n} + \frac{a_2}{a_1 + a_3 + \dots + a_n} + \dots + \frac{a_n}{a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}} \geq \frac{n}{n-1}.$$

Rezolvăm direct problema c). Vom nota suma  $a_1 + a_2 + \dots + a_n$  prin  $s$  și numerele  $s - a_i$  prin  $b_i$ . Cu aceste notații, trebuie să se demonstreze că

$$\frac{s-b_1}{b_1} + \frac{s-b_2}{b_2} + \dots + \frac{s-b_n}{b_n} \geq \frac{n}{n-1}.$$

Această inegalitate este echivalentă cu următoarea:

$$s \left( \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \dots + \frac{1}{b_n} \right) \geq \frac{n}{n-1} + n = \frac{n^2}{n-1}. \quad (1)$$

Vom folosi acum cunoscuta relație dintre media aritmetică și geometrică (media aritmetică a  $n$  numere nenegative este mai mare sau egală cu media geometrică a aceluiași numere). Aplicînd-o rezultă că

$$\left( \frac{\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \dots + \frac{1}{b_n}}{n} \right)^n \geq \frac{1}{b_1 b_2 \dots b_n}$$

și că

$$b_1 b_2 \dots b_n \leq \left( \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n} \right)^n.$$

Din aceste două inegalități rezultă că

$$\left( \frac{\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \dots + \frac{1}{b_n}}{n} \right)^n \geq \left( \frac{n}{b_1 + b_2 + \dots + b_n} \right)^n$$

și în sfârșit

$$\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \dots + \frac{1}{b_n} \geq \frac{n^2}{b_1 + b_2 + \dots + b_n}.$$

Dar,  $b_1 + b_2 + \dots + b_n = ns - a_1 - a_2 - \dots - a_n = (n-1)s$  de unde

$$s \left( \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \dots + \frac{1}{b_n} \right) \geq \frac{sn^2}{s(n-1)} = \frac{n^2}{n-1}.$$

Iată și o altă rezolvare a problemei, bazată pe inegalitatea dintre mediile aritmetice și geometrice numai a două numere.

Trebuie să demonstrăm că

$$(n-1) \left( \frac{s-b_1}{b_1} + \dots + \frac{s-b_n}{b_n} \right) \geq n.$$

Observăm că  $b_1 + b_2 + \dots + b_n = (n-1)s$ . De aceea,

$$\begin{aligned} (n-1) \frac{s-b_1}{b_1} &= \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n - (n-1)b_1}{b_1} = \frac{b_2 + \dots + b_n}{b_1} - (n-2) = \\ &= \frac{b_2}{b_1} + \frac{b_3}{b_1} + \dots + \frac{b_n}{b_1} - (n-2). \end{aligned}$$

Vom transforma de asemenea restul termenilor  $(n-1) \frac{s-b_i}{b_i}$  și adunăm toți cei  $n$  termeni. Apoi grupăm în perechi fracțiile  $b_i/b_j$  și  $b_j/b_i$  și vom folosi inegalitatea:  $b_i/b_j + b_j/b_i \geq 2$ . Întrucît vor fi în total  $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$  perechi de indici  $i$  și  $j$  ( $1 \leq i < j \leq n$ ), vom obține ca rezultat:

$$(n-1) \left( \frac{s-b_1}{b_1} + \dots + \frac{s-b_n}{b_n} \right) \geq C_n^2 \cdot 2 - (n-2)n = n^2 - n - n^2 + 2n = n.$$

Și din prima și din a doua rezolvare se vede că inegalitatea se transformă în egalitate numai pentru  $b_1 = \dots = b_n$  adică pentru  $a_1 = \dots = a_n$ .

Vom prezenta acum cîteva considerații cu ajutorul cărora se poate demonstra inegalitatea mediilor. Fie  $c_1 + c_2 + \dots + c_n = 1$  (acest lucru nu limitează generalitatea). Să presupunem că pentru aceste numere inegalitatea mediilor nu este adevărată, adică

$$\frac{c_1 + c_2 + \dots + c_n}{n} < \sqrt[n]{c_1 c_2 \dots c_n}.$$

Să presupunem că nu toate numerele  $c_i$  sînt egale și atunci se pot găsi două — să zicem  $c_1$  și  $c_2$  — astfel încît  $c_1 < \frac{1}{n}$  și  $c_2 > \frac{1}{n}$ . Să înlocuim pe  $c_1$  prin  $c'_1 = \frac{1}{n}$  și pe  $c_2$  prin  $c'_2 = c_1 + c_2 - \frac{1}{n}$ . Atunci, pentru numerele  $c'_1, c'_2, c_3, c_4, \dots, c_n$  inegalitatea mediilor de asemenea nu este îndeplinită. Demonstrația acestui lucru rezultă din inegalitatea  $\frac{1}{n} \left( c_1 + c_2 - \frac{1}{n} \right) > c_1 c_2$  (pentru  $c_1 < 1/n$  și  $c_2 > 1/n$ ) care rămîne să o demonstrați singuri.

Continuînd aceste înlocuiri, ajungem pînă la  $c_1 = c_2 = \dots = c_n = \frac{1}{n}$ .

Rezultă că dacă inegalitatea mediilor nu este adevărată pentru o anumită



grupare de numere  $c_1, c_2, \dots, c_n$ , atunci nu este adevărată nici pentru gruparea  $1/n, 1/n, \dots, 1/n$ . Dar pentru acestea inegalitatea mediilor este adevărată. Contradicția obținută demonstrează proprietatea.

L.G. Limanov

**M 183.** Să se găsească înălțimea unui trapez care are bazele egale cu  $a$  și  $b$  ( $a < b$ ), unghiul dintre diagonale este egal cu  $90^\circ$  iar unghiul dintre prelungirile laturilor neparalele este de  $45^\circ$ .

Fie în trapezul  $ABCD$  (vezi fig. 297) în care  $AB \parallel CD$ ,  $AB = a$ ,  $CD = b$ ,

$BC = x$ ,  $AD = y$  punctul  $E$  pe baza  $CD$  astfel încât  $ABCE$  este paralelogram:  $AE = x$ ,  $DE = b - a$ . Dublul ariei triunghiului  $ADE$  este

$$xy \sin 45^\circ = (b - a)h \quad (1)$$

unde  $h$  este înălțimea trapezului. După teorema cosinusului obținem

$$(b - a)^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos 45^\circ \quad (2)$$

și, în sfârșit, cu ajutorul teoremei lui Pitagora aplicată în cele patru triunghiuri dreptunghice  $AOB$ ,  $BOC$ ,  $COD$ ,  $DOA$ , deducem că

$$x^2 + y^2 = a^2 + b^2 \quad (3)$$

Înlocuim acum pe (3) și (1) în (2) și obținem:

$$(b - a)^2 = a^2 + b^2 - 2(b - a)h$$

deci

$$h = \frac{ab}{b - a}.$$

Unii cititori au indicat și modul de construire a trapezului dacă  $a$  și  $b$  sînt date (vezi fig. 298). Se arată că trapezul există dacă  $\frac{b}{a} \geq 1 + \sqrt{2}$ .

N.B. Vasiliev

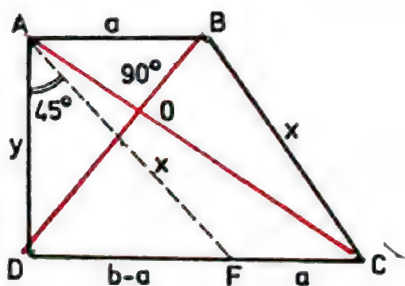


Fig. 297

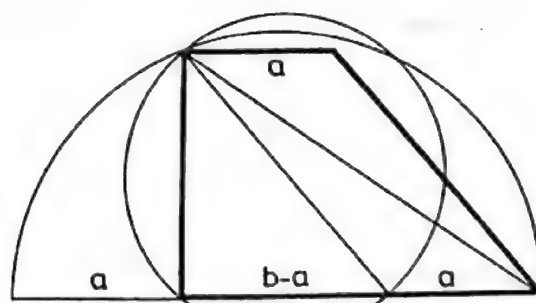


Fig. 298

**M 184.** Să se demonstreze identitatea

$$\frac{C_n^0}{x} - \frac{C_n^1}{x+1} + \dots + (-1)^n \frac{C_n^n}{x+n} = \frac{n!}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n)}$$

G.E. Esipenko

Vom demonstra identitatea prin metoda inducției matematice. Pentru  $n = 1$  ea este adevărată, întrucît  $C_1^0 = C_1^1 = 1! = 1$ :

$$\frac{C_1^0}{x} - \frac{C_1^1}{x+1} = \frac{1!}{x(x+1)}.$$

Să admitem că este adevărată identitatea:

$$\frac{C_n^0}{x} - \frac{C_n^1}{x+1} + \frac{C_n^2}{x+2} + \dots + (-1)^n \frac{C_n^n}{x+n} = \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)}. \quad (1)$$

Înlocuim în (1) pe  $x$  cu  $x+1$ . Vom obține identitatea

$$\frac{C_n^0}{x+1} - \frac{C_n^1}{x+2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{C_n^{n-1}}{x+n} + (-1)^n \frac{C_n^n}{x+n+1} = \frac{n!}{(x+1)\dots(x+n+1)} \quad (2)$$

Dacă scădem relația (2) din relația (1) și folosim formulele

$$C_n^0 = C_n^n = C_{n+1}^0 = C_{n+1}^{n+1} = 1, \quad C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$$

pentru fiecare  $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ , vom obține:

$$\begin{aligned} & \frac{C_{n+1}^0}{x} - \frac{C_{n+1}^1}{x+1} + \frac{C_{n+1}^2}{x+2} - \dots + (-1)^n \frac{C_{n+1}^n}{x+n} + (-1)^{n+1} \frac{C_{n+1}^{n+1}}{x+n+1} = \\ & = \frac{n!}{(x+1)(x+2)\dots(x+n)} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x+n+1} \right) = \frac{(n+1)!}{x(x+1)\dots(x+n+1)}. \end{aligned} \quad (3)$$

Astfel pasul cerut de inducție a fost făcut, deci identitatea este demonstrată pentru orice  $n$ .

Pentru cei familiarizați cu aceste chestiuni, facem observația că în această problemă s-a obținut formula diferenței de ordinul  $n$  pentru șirul  $f(x) = 1/x$ :

$$\Delta^n f(x) = \frac{(-1)^n n!}{x(x+1)\dots(x+n)}.$$

Se poate demonstra o afirmație privind unicitatea identității (1).

Dacă avem

$$\frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)} = \sum_{k=0}^n \frac{A_k}{x+k} \quad (4)$$

unde  $A_k$  sînt coeficienți nedeterminați, atunci:

$$A_k = (-1)^k C_n^k = \frac{(-1)^k n!}{k!(n-k)!}. \quad (5)$$

Într-adevăr, este suficient să se înmulțească ambii membri ai egalității (4) prin numitorul comun  $x(x+1)\dots(x+n)$  și să se pună în egalitatea obținută  $x = -k$ . Atunci în membrul drept, toți termenii vor fi nuli cu excepția unuia:  $A_k(-k)(-k+1)\dots(-1) \cdot 1 \cdot 2 \dots (n-k) = A_k(-1)^k k!(n-k)!$  și ajungem la (5).

**M 185.** Pe un caftan de arie 1 se pun 5 petece fiecare avînd aria de cel puțin  $1/2$ . Să se demonstreze că există două petece care se suprapun pe o porțiune de arie cel puțin  $1/5$ .

E.B. Dînkîn

Vom nota prin  $x_k$  aria acelei părți din caftan acoperită de exact  $k$  petece ( $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ ). Din ipoteză rezultă că aria caftanului este 1 iar suma



ariilor petecelor este cel puțin  $5/2$  și atunci:

$$S_0 = x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1,$$

$$S_1 = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 \geq \frac{5}{2}.$$

Suma ariilor tuturor celor 10 suprapuneri de perechi de petece va fi egală cu

$$\begin{aligned} S_2 &= x_2 + 3x_3 + 6x_4 + 10x_5 \geq -3x_0 - x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 = \\ &= 2S_1 - 3S_0 \geq 2; \end{aligned}$$

de aceea cel puțin una dintre cele 10 suprapuneri de petece trebuie să aibă aria cel puțin  $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$  (egalitatea este posibilă dacă  $x_0 = x_1 = x_4 = x_5 = 0$  și toate cele 10 intersecții sînt de arii egale).

**M 186.** Să se găsească toate soluțiile ecuației

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$$

în numere întregi diferite de 1.

V. Slepenco (elev cl. a X-a)

Dacă  $k$  este un număr întreg diferit de 1, atunci  $1/k < 1/2$ . De aici rezultă că nici unul dintre numerele  $x, y, z$  nu poate fi negativ; dacă de exemplu,  $x < 0$ , atunci

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} < 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Astfel că  $x, y, z$  sînt numere naturale, nenule.

Putem considera că  $1 < x \leq y \leq z$ ; celelalte soluții se obțin prin permutări. Cu alte cuvinte, este suficient să se găsească acele soluții pentru care

$$1 > \frac{1}{x} \geq \frac{1}{y} \geq \frac{1}{z}.$$

Este clar că  $x$  nu poate fi mai mare decît 3; dacă  $x > 3$ , atunci

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} < \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1.$$

De aceea sînt posibile numai două cazuri:

1)  $x = 3$  (și atunci, evident  $y = z = 3$ );

2)  $x = 2$ . În acest caz trebuie ca  $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$ .

În acest caz  $y$  nu poate fi mai mare decît 4, altfel

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} < \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

De aceea, sau  $y = 4$  (și atunci  $z = 4$ ) sau  $y = 3$  (și atunci  $z = 6$ ). Astfel ecuația are în total 10 soluții în numere naturale diferite de 1: șase se obțin prin permutarea numerelor (2, 3, 6), trei prin permutarea numerelor (2, 4, 4) și încă una (3, 3, 3).

M 187. În plan se dau două puncte  $A$  și  $B$ . Să se găsească locul geometric al celui de al treilea vîrf  $C$  al triunghiului  $ABC$ , astfel ca:

- înălțimea  $AA'$  să fie congruentă cu latura  $BC$ ;
- mediانا  $AA_1$  să fie congruentă cu latura  $AC$ ;
- mediانا  $AA_1$  să fie congruentă cu latura  $BC$ ;
- înălțimea  $CC'$  să fie congruentă cu mediana  $BB_1$ ;
- înălțimea  $BB'$  să fie congruentă cu mediana  $CC_1$ .

M.A. Kvantov

a) Locul geometric căutat va fi o figură simetrică față de dreapta  $AB$ ; de aceea este suficient să se cerceteze punctele unuia dintre cele două semiplane în care dreapta  $AB$  împarte planul.

Vom construi punctul  $D$  astfel încît  $DM \perp AB$  și  $DB = BA$ . În semiplanul în care lucrăm, un astfel de punct  $D$  este unic. Dacă înălțimea  $AA'$  este congruentă cu  $CB$ , atunci (fig. 299)

$$\triangle AA'B = \triangle CBD$$

(unghiurile  $A'AB$  și  $CBD$  sînt congruente, intrucît ambele sînt ascuțite,  $AA' \perp BC$  și  $AB \perp BD$ ). Astfel,

$$\sphericalangle BCD = 90^\circ \quad (1)$$

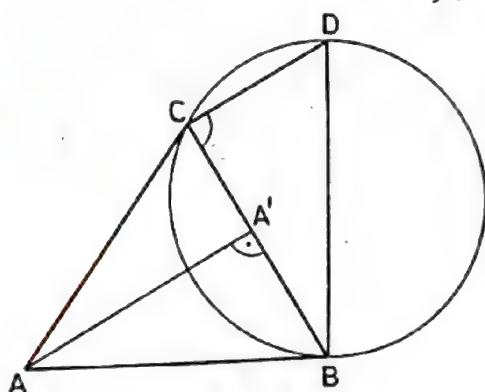


Fig. 299

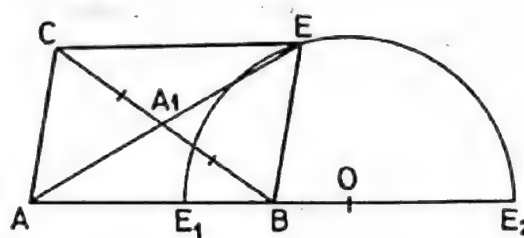


Fig. 300

Reciproc, dacă pentru un anumit punct  $C$ , unghiul  $BCD$  este drept, atunci evident că  $\triangle AA'B = \triangle CBD$  și  $AA' = BC$ . Astfel, este suficient să se găsească mulțimea punctelor  $C$  pentru care este îndeplinită condiția (1) ( $B$  și  $D$  sînt puncte fixe). Această mulțime — așa cum se știe — este cercul de diametru  $BD$ .

b) Fie  $E$  un punct pe prelungirea medianei  $AA_1$  astfel încît  $A_1E = AA_1$ . Atunci  $ACEB$  este un paralelogram (fig. 300). Condiția  $AA_1 = AC$  este echivalentă cu:

$$AE = 2BE. \quad (2)$$

Vom folosi teorema: Dacă  $A$  și  $B$  sînt două puncte din plan, atunci mulțimea punctelor  $E$  din plan pentru care  $\frac{AE}{BE} = k$  ( $k$  este un număr pozitiv dat, diferit de 1), este un cerc de diametru  $E_1E_2$ , unde  $E_1$  și  $E_2$  sînt punctele dreptei  $AB$  pentru care  $\frac{AE_1}{BE_1} = k$  și  $\frac{AE_2}{BE_2} = k$  ( $E_1$  este situat în interiorul segmentului  $AB$ ,  $E_2$  în exterior).



Din această teoremă rezultă că mulțimea punctelor  $E$  este un cerc de diametru  $E_1E_2$ , iar  $E_1$  și  $E_2$  fiind puncte pe dreapta  $AB$  astfel încît  $AE_1/BE_1 = AE_2/BE_2 = 2$  (unul interior altul exterior) și pentru ca să se obțină mulțimea punctelor  $C$  trebuie să se facă o translație a acestui cerc cu vectorul  $\overrightarrow{BA}$  (căci  $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{EC}$ ).

A mai rămas să se demonstreze teorema. Pur geometric, demonstrația poate fi făcută astfel: dacă  $AE/BE = k = AE_1/BE_1 = AE_2/BE_2$  atunci  $EE_1$  și  $EE_2$  sînt bisectoarele unghiurilor dintre dreptele  $AE$  și  $BE$ ; de aceea  $\angle E_1EE_2 = 90^\circ$  așa că  $E$  este situat pe un cerc de diametru  $E_1E_2$ . Reciproc, dacă  $O$  este centrul acestui cerc, atunci pentru orice punct  $E$  al său avem  $EO^2 = AO \cdot BO$  adică triunghiurile  $AOE$  și  $EOB$  sînt asemenea și  $EA/EB = AO/OE = OE/OB = k$ .

c) Condiția  $AA_1 = 2 BA_1$  este echivalentă cu

$$AA_1 = 2 BA_1. \quad (3)$$

Astfel locul geometric al punctului  $A_1$  este cercul care s-a folosit și în rezolvarea punctului precedent (fig. 301) numai că nu mai trebuie traslatat ci supus la o omotetie de coeficient 2 și cu centrul în punctul  $B$  (căci  $BC = 2 BA_1$ ).

d) Coborîm din punctul  $B_1$  — mijlocul laturei  $AC$  — o perpendiculară  $B_1K$  pe dreapta  $AB$ . Desigur  $CC_1 = 2 \cdot B_1K$ , de aceea condiția  $CC' = BB_1$  este echivalentă cu condiția  $BB_1 = 2 \cdot B_1K$  (cateta este congruentă cu jumătatea ipotenuzei) (fig. 302). Prin urmare  $\angle B_1BK = 30^\circ$ . De aceea, locul geometric al punctelor  $B_1$  este format din patru semidrepte care pleacă din punctele  $B$  și formează cu segmentul  $AB$  unghiuri de  $30^\circ$  și  $150^\circ$ . Mulțimea punctelor  $C$  se obține din acestea printr-o omotetie de coeficient 2 și de centru  $A$ .

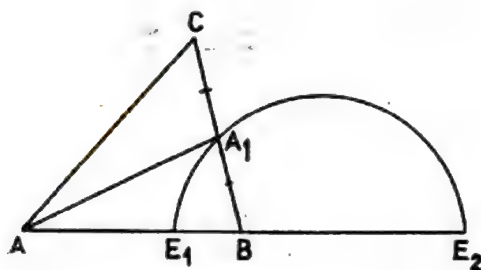


Fig. 301

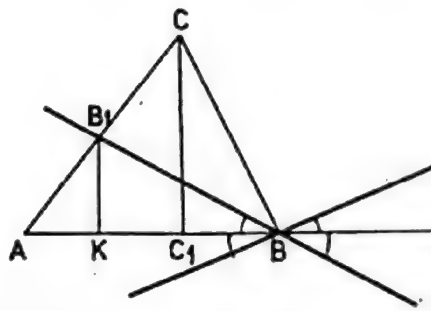


Fig. 302

e) Fie  $L$  proiecția punctului  $C_1$  (mijlocul segmentului  $AB$ ) pe dreapta  $AC$ . Intrucît, (fig. 303)  $BB' = CC_1$ , rezultă că  $2 C_1L = CC_1$  și  $\angle LCC_1 = 30^\circ$ . Prin urmare  $\angle ACC_1$  este de  $30^\circ$  sau  $150^\circ$  și locul geometric al punctului  $C$  va fi o pereche de cercuri care trec prin punctele  $A$  și  $C_1$ .

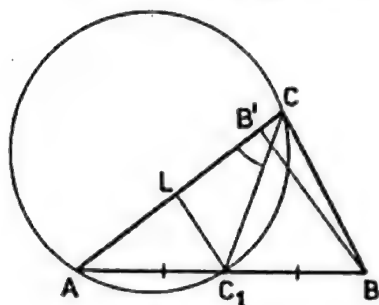


Fig. 303

În figura 304 sînt reprezentate răspunsurile la problemă, punctele  $a - e$ . Punctele  $C$  situate chiar pe dreapta  $AB$  le-am exclus din mulțimile respective de puncte (ele conduc la triunghiuri  $ABC$  „degenerate”); mai sus n-am menționat acest lucru de fiecare dată.

N.B. Vasiliev

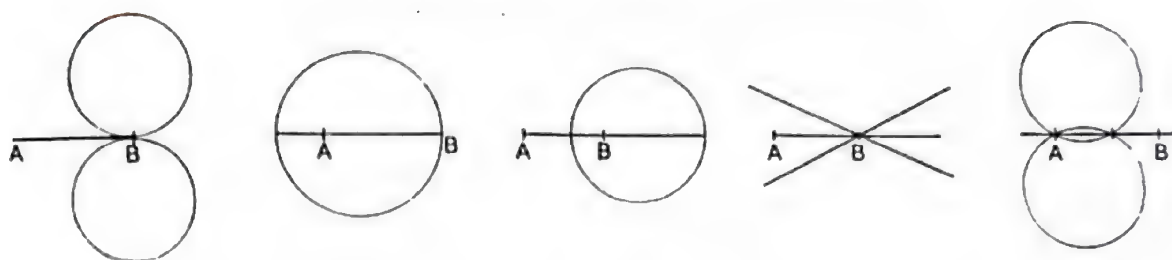


Fig. 304

**M 188.** *Între unele dintre cele  $2n$  orașe, s-au stabilit legături aeriene și fiecare oraș este legat cu cel puțin  $n$  alte orașe (prin curse fără escală). Să se demonstreze că chiar dacă se suspendă oricare  $n - 1$  curse, tot se poate ajunge din orice oraș în oricare altul cu avionul (cu transbordări). Să se indice toate cazurile în care această legătură se întrerupe dacă se suspendă  $n$  curse.*

A.K. Kelmans

Să presupunem că după suspendarea anumitor  $t$  curse, legătura se întrerupe. Atunci înseamnă că există  $k$  orașe, unde  $k < n$ , astfel încât din ele nu se poate ajunge în celelalte  $2n - k$  orașe. Într-adevăr, să considerăm un anumit oraș  $A$  și toate orașele în care se poate ajunge din el (eventual cu transbordări). Dacă acestea (împreună cu  $A$ ) nu sunt mai multe decât  $n$ , atunci cele  $k$  orașe sunt găsite. Dacă ele sunt în număr de  $m$  și  $m > n$ , atunci din ele nu se poate ajunge în celelalte  $2n - m$  orașe și din acestea  $2n - m < n$  orașe nu se poate ajunge în cele  $m$  orașe rămase. Așa că, în orice caz se găsesc  $k$  orașe, unde  $k \leq n$  din care nu se poate ajunge în celelalte  $2n - k$  orașe. Inițial, fiecare dintre aceste orașe a fost legat prin linii aeriene cu cel puțin  $n$  orașe, de aceea cel puțin  $n + 1 - k$  linii l-au legat nu cu cele  $k$  orașe și prin urmare au fost suspendate. Rezultă că în total au fost suspendate cel puțin  $k(n + 1 - k)$  curse. Dar  $k(n + 1 - k) > n - 1$  pentru  $k = 1, 2, \dots, n$ . Prin urmare dacă se suspendă  $n - 1$  curse, legătura nu se întrerupe.

Să răspundem acum la a doua întrebare a problemei. Observăm că  $k(n + 1 - k) = n$  numai pentru  $k = 1$  și  $k = n$ . Dacă  $k = 1$ , înseamnă că un anumit oraș a fost legat prin curse cu exact  $n$  orașe și toate aceste curse au fost suspendate. Dacă  $k = n$ , înseamnă că anumite  $n$  orașe  $A_1, A_2, \dots, A_n$  sunt legate două câte două prin linii aeriene, celelalte  $n$  orașe rămase  $A'_1, A'_2, \dots, A'_n$  de asemenea sunt legate două câte două prin linii aeriene și mai există  $n$  linii care unesc orașele  $A_1$  cu  $A'_1, A_2$  cu  $A'_2, \dots, A_n$  cu  $A'_n$ . În figura 305 se văd schemele liniilor aeriene pentru  $n = 2$  și  $n = 3$ .

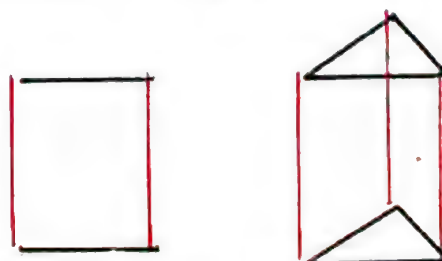


Fig. 305

L.G. Limănov

**M 189.** *Trei segmente  $AB, EF, CD$  trec prin același punct  $O$  iar punctul  $E$  este situat pe segmentul  $AC$  și punctul  $F$  pe segmentul  $BD$ . Să se demonstreze că  $EF$  este mai mic decât cel puțin unul dintre segmentele  $AB$  sau  $CD$  (vezi fig. 306).*

D. Iu. Grigoriev



Ne vom folosi de faptul că lungimea bisectoarei dintr-un triunghi nu e mai mare decât semisuma lungimilor laturilor dintre care pleacă (demonstrați!). Să presupunem că segmentul  $EF$  este mai mare cu  $\Delta$  decât cel mai mare dintre segmentele  $AB$  și  $CD$ , pe care-l vom nota  $\max(AB, CD)$ . Fie  $\angle AOE \neq \angle EOC$  — în caz contrar,  $EF \leq \frac{AB+CD}{2}$  și  $EF$  nu poate fi mai mare decât  $\max(AB, CD)$ . Să presupunem, ca să precizăm că  $\angle AOE > \angle EOC$ . Vom construi atunci un astfel de segment  $E_1F_1$  (vezi fig. 307) încât  $\angle E_1OE = \angle EOC$ . E clar că punctul  $E_1$  aparține segmentului  $AC$ , iar punctul  $F_1$ , segmentului  $BD$ .  $EF \leq \frac{CD + E_1F_1}{2}$  de aceea,  $E_1F_1$  este cu cel puțin  $2\Delta$  mai lung decât  $\max(AB, CD)$ . Astfel, am reușit să trecem de la un segment „mai mare cu  $\Delta$ ” la un segment „mai mare cu  $2\Delta$ ”, unde  $\Delta$  este un anumit număr pozitiv. Repetând această construcție de  $k$  ori, ajungem la segmentul  $E_kF_k$  care este mai mare decât  $\max(AB, CD)$  cu cel puțin  $2^k\Delta$ . Alegând pe  $k$  suficient de mare, putem să facem lungimea segmentului  $E_kF_k$  mai mare decât a sumei  $AB + CD$  ceea ce este imposibil. Contradicția obținută, arată că  $EF$  nu poate fi mai mare decât  $\max(AB, CD)$ . Problema este rezolvată.

Iată altă rezolvare a acestei probleme. Vom duce prin punctele  $E$  și  $F$  drepte perpendiculare pe  $EF$ . Prelungim segmentele  $OA, OB, OC, OD$  pînă la intersecția cu aceste drepte și facem notațiile din figura 308. Presupunem că punctul  $A$  este situat în interiorul benzii dintre drepte și punctul  $C$  în afara

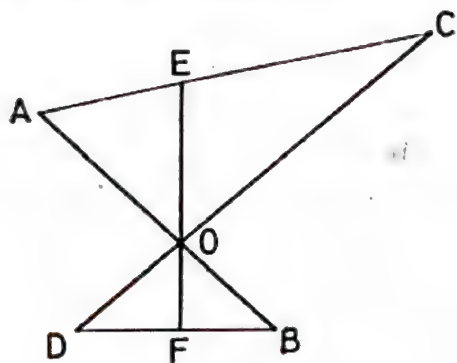


Fig. 306

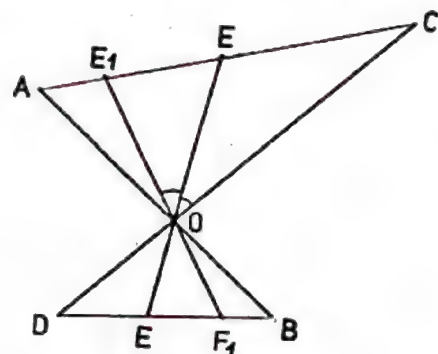


Fig. 307

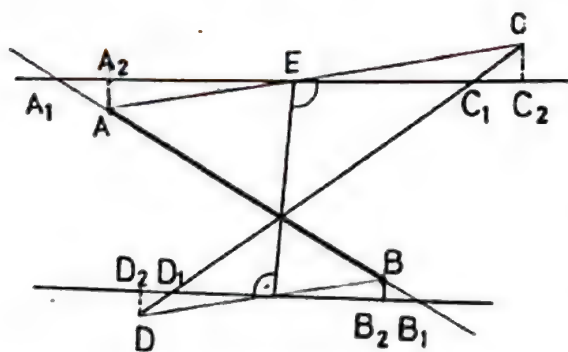


Fig. 308

ei; atunci  $D$  trebuie să fie situat în interiorul benzii (altfel este evident că  $CD > EF$ ) și  $B$  în exterior. Din inegalitățile

$$\frac{AA_2}{CC_2} = \frac{A_2E}{EC_2} \leq \frac{A_1E}{EC_1} = \frac{B_1F}{FD_1} \leq \frac{B_2F}{FD_2} = \frac{BB_2}{DD_2}$$

rezultă că sau  $AA_2 \leq BB_2$  (și atunci  $AB > EF$ ) sau  $CC_2 \geq DD_2$  (și atunci  $CD > EF$ ).

D. Iu. Grigoriev

**M 190.** Într-un plan sînt date două drepte  $a$  și  $b$ . În punctul  $A_1$  situat pe dreapta  $a$ , la o distanță mai mică decât 1 la dreapta  $b$ , se găsește un purece. Apoi purecele sare pe rînd în punctele  $B_1, A_2, B_2, A_3, B_3, \dots$ , conducîndu-se după următoarele reguli;

1) punctele  $A_1, A_2, A_3, \dots$  sînt situate pe dreapta  $a$ , iar punctele  $B_1, B_2, B_3, \dots$ , pe dreapta  $b$ ;

$$2) A_1B_1 = B_1A_2 = A_2B_2 = B_2A_3 = A_3B_3 = \dots = 1;$$

3) punctul  $A_n$  nu coincide cu  $A_{n+1}$  decât în cazul în care  $A_nB_n \perp a$  și analog,  $B_n$  coincide cu  $B_{n+1}$  numai dacă  $B_nA_{n+1} \perp b$  (se vede ușor că prin condițiile 1) — 3) șirul de sărituri, începînd cu  $B_1A_2$  este unic determinat).

Să se demonstreze că dacă unghiul dintre dreptele  $a$  și  $b$  se exprimă printr-un număr irațional de grade, atunci drumul purecelui va fi periodic, adică la un moment dat el ajunge în punctul inițial  $A_1$  și apoi va trece prin aceleași puncte  $B_2, A_2, B_2$ , ca și la începutul drumului și dacă este număr rațional, atunci purecele nu va trece prin nici un punct mai mult de două ori.

Este interesant de stabilit nu numai dacă drumul purecelui este sau nu „ciclic”, dar și să stabilim modul în care este format șirul de puncte

$$A_1, B_1, A_2, B_2, \dots, A_n, B_n, \dots \quad (1)$$

și alte chestiuni colaterale.

Mai jos vom spune adesea în loc de cuvîntul „purece”, cuvîntul „punct”.

Traectoria purecelui poate fi reprezentată printr-un șir de versori  $\vec{A_1B_1}, \vec{B_1A_2}, \vec{A_2B_2}, \dots$ , (fig. 309). (2)

Să observăm că dacă știm vectorul  $\vec{u} = \vec{A_nB_n}$ , atunci putem determina unde sînt situate punctele  $A_n$  și  $B_n$ . Într-adevăr, este adevărată următoarea leamă:

Fie  $a$  și  $b$  două drepte care se intersectează. Pentru orice vector  $\vec{u}$  din planul lor se pot găsi două puncte  $A$  pe dreapta  $a$  și  $B$  pe dreapta  $b$  astfel încît vectorul  $\vec{AB}$  să fie echipolent cu vectorul dat  $\vec{u}$ . Punctele  $A$  și  $B$  sînt unic determinate.

**Demonstrație.** (fig. 310). Dacă originea vectorului echipolent cu  $\vec{u}$  o luăm pe dreapta  $a$ , atunci extremitatea sa se va găsi pe dreapta  $a'$  obținută din  $a$  printr-o translație de vector  $\vec{u}$  (dreapta punctată din figura 310). De aceea, punctul  $B$  trebuie să se găsească la intersecția dintre dreptele  $a'$  și  $b$ . Apoi punctul  $A$  se determină ușor.

Vom lua în plan punctul  $O$  și vom construi vectori echipolenți cu cei din șirul (2) avînd originea în  $O$ . Vom nota acești vectori astfel:

$$\vec{OC_1}, \vec{OD_1}, \vec{OC_2}, \vec{OD_2}, \dots \quad (3)$$

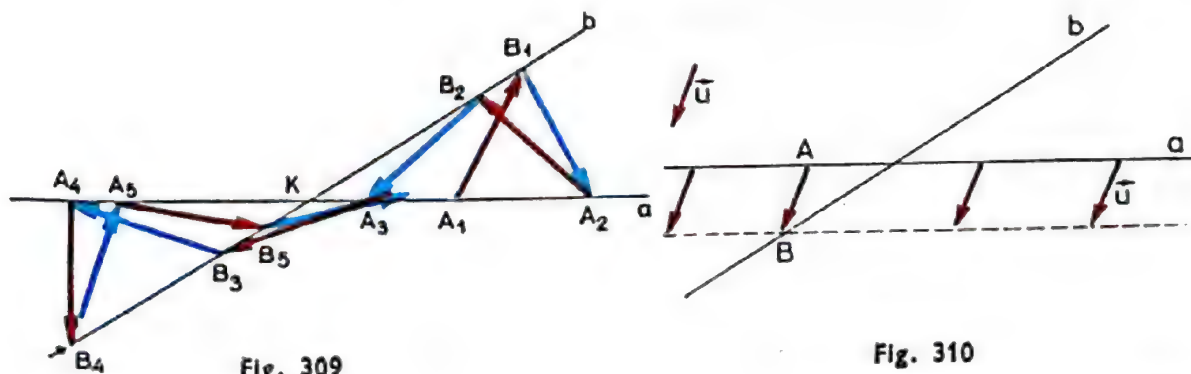


Fig. 309

Fig. 310



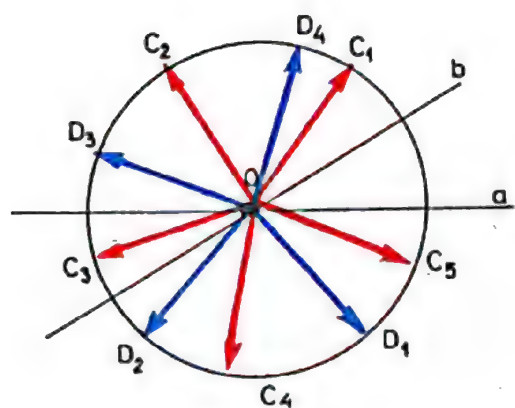


Fig. 311

Din lema demonstrată mai sus rezultă că dacă știm șirul (3), atunci putem găsi șirul de puncte (1); de exemplu, știind pe  $\vec{OC}_n$  putem găsi și pe  $A_n$  și pe  $B_n$ .

În figura 311 sînt reprezentați vectorii corespunzători săriturilor din figura 309. Se observă că vectorii  $\vec{OC}_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) formează între ei unghiuri congruente. Se arată că acesta este un lucru general adevărat pentru orice șir de sărituri. Îl formulăm sub forma unei teoreme:

**Teoremă.** Dacă unghiul dintre dreptele  $a$  și  $b$  este  $\gamma$ , atunci unghiul dintre vectorii  $\vec{OC}_n$  și  $\vec{OC}_{n+1}$  este  $2\gamma$ .

Aceasta este principala considerație pentru rezolvarea problemei. Teorema poate fi demonstrată folosindu-ne de faptul că două segmente din linia frîntă determinată de (2) sînt laturi congruente ale unui triunghi isoscel iar baza acestui triunghi este situată cînd pe dreapta  $a$  cînd pe dreapta  $b$ . Principala dificultate a problemei apare datorită faptului că segmentele liniei frînte pot să fie situate diferit față de cele două drepte. De exemplu, ca să se demonstreze teorema pentru  $\gamma = 60^\circ$  trebuie să se ia în considerare 10 cazuri (reprezentate în figura 312) celelalte se obțin din acestea printr-o simetrie față de punctul de intersecție a dreptelor  $a$  și  $b$ . Vom proceda altfel: folosind noțiunile de „transformare” și de „produs de transformări” vom da o demonstrație generală care va cuprinde deodată toate cazurile.

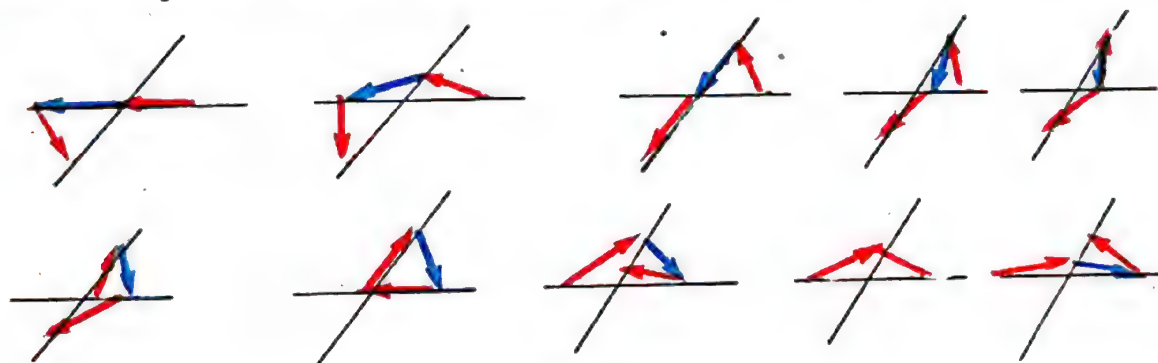


Fig. 312

Să comparăm încă o dată figurile 309 și 311. Extragem din ele fragmentele formate din două segmente consecutive (care formează triunghiurile isoscele de care a fost vorba mai sus; figura 313 a și b, figura 314 a și b). Privind la aceste desene, se formulează ușor regula după care se construiește șirul (3).

Vom nota prin  $p$  și  $q$  dreptele duse prin punctul  $O$  și paralele respectiv cu dreptele  $a$  și  $b$ ; atunci în șirul (3), după vectorul  $\vec{OC}_n$  va urma vectorul  $\vec{OD}$  simetric cu acesta față de dreapta  $p$ ; după vectorul  $\vec{OD}_n$  va urma vectorul  $\vec{OC}_{n+1}$  simetric cu acesta față de dreapta  $q$  ( $n = 1, 2, \dots$ ).

**Exercițiu.** Verificați că această regulă este echivalentă cu condițiile 1) — 3) din textul problemei.

**Exercițiu.** Demonstrați că dacă punctele șirului (1) ajung în punctul  $A_1$  de mai mult de două ori, atunci șirul va fi periodic și în acest caz un anumit

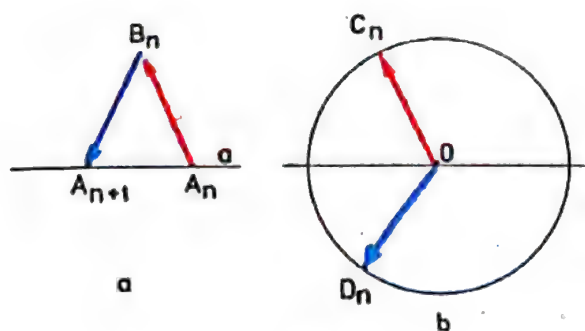


Fig. 313

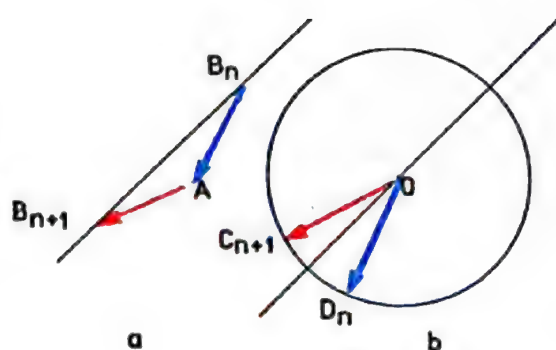


Fig. 314

punct  $C_n$  va coincide cu  $C_1$ . Dați un exemplu în care șirul ajunge în punctul  $A_1$  de două ori:  $A_2$  coincide cu  $A_1$  dar  $B_2$  nu coincide cu  $B_1$ . Reformulăm acum problema M 190, dar nu vom vorbi de transformările vectorilor  $\vec{OC}_n$  și  $\vec{OD}_n$  ci de transformările extremităților lor care sînt puncte situate pe un cerc de rază 1.

Fie  $p$  și  $q$  două drepte duse prin punctul  $O$ . Vom nota prin  $S_p$  simetria față de dreapta  $p$  și prin  $S_q$  simetria față de dreapta  $q$ . (Putem considera aceste transformări extinse la întreg planul deși în continuare vom avea de a face numai cu transformări ale cercului dat în el însuși). Fie  $C_1$  un punct oarecare situat la distanța 1 de  $O$  și

$$D_1, C_2, D_2, C_3, D_3, \dots, \quad (4)$$

șirul determinat prin condițiile

$$D_n = S_p(C_n), \quad C_{n+1} = S_q(D_n) \quad (5)$$

(vezi fig. 315). Trebuie să demonstrăm că punctul  $C_n$ , pentru un anumit  $n$  coincide cu  $C_1$ , atunci și numai atunci cînd unghiul dintre dreptele  $p$  și  $q$  are un număr rațional de grade.

Astfel problema săriturilor pe două drepte s-a redus la problema săriturilor pe un cerc. Iar teorema care trebuie demonstrată în primul rînd afirmă că  $C_n C_{n+1} = 2\gamma$  unde  $\gamma$  este unghiul dintre  $p$  și  $q$ . Regula (5) de trecere de la un punct la altul se simplifică și mai mult dacă considerăm șirul

$$C_1, C_2, C_3, \dots \quad (6)$$

în care

$$C_{n+1} = S_q(S_p(C_n)) \quad (7)$$

unde asupra punctului  $C_n$  se aplică întîi simetria  $S_p$  și apoi  $S_q$ , deci  $C_{n+1}$  se obține din  $C_n$  aplicîndu-i acestuia produsul de simetrii  $S_q S_p$ . Se știe că produsul a două simetrii este echivalent cu o rotație de centru, punctul de intersecție a celor două axe de simetrie și de unghi congruent cu dublul

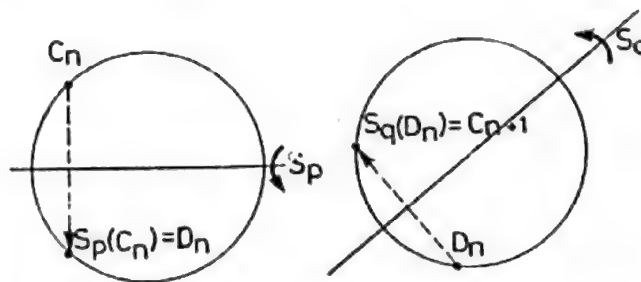


Fig. 315



unghiului format de cele două axe. De aici rezultă direct afirmația teoremei  $\cup C_n C_{n+1} = 2\gamma$ .

Astfel, am lămurit că în șirul (6) fiecare punct se obține din cel precedent printr-o rotație de unghi  $2\gamma$ . De aceea  $C_{n+1}$  se obține din  $C_1$  printr-o rotație de „unghi”  $2n\gamma$ . Pentru ca punctele  $C_{n+1}$  și  $C_1$  să coincidă trebuie ca  $2n\gamma$  să fie un multiplu întreg de  $360^\circ$ , adică  $2n\gamma = 360^\circ k$  unde  $k$  și  $n$  sînt întregi deci  $\gamma$  se exprimă printr-un număr rațional de grade. Reciproc, dacă  $\gamma = \frac{s}{t}$  grade atunci pentru  $n = 180^\circ t$  vom obține  $2n\gamma = 360^\circ s$  unde  $s$  este întreg deci  $C_{n+1} = C_1$ .

N.B. Vasiliev

**M 191.** Într-un plan sînt date punctele  $A$  și  $B$  și dreapta  $d$  care trece prin punctul  $A$  și nu trece prin punctul  $B$ . Prin punctele  $A$  și  $B$  se duce un cerc arbitrar. Fie  $O$  centrul său și  $C$  punctul de intersecție cu dreapta  $d$ , diferit de  $A$ . Să se găsească locul geometric al mijloacelor segmentelor  $OC$ .

P. Paramonov (elev cl. a IX-a)

Vom găsi pe rînd locurile geometrice ale punctelor (toate vor fi linii drepte, vezi fig. 316):

$O$ , centrele cercurilor, loc geometric notat prin  $m_1$ ;

$K$ , mijloacele segmentelor  $OA$ , notat prin  $m_2$ ;

$P$ , mijloacele înălțimilor  $OL$  ale triunghiurilor isoscele  $AOC$ , notat prin  $m_3$ ;

$M$ , mijloacele segmentelor  $OC$ , notat prin  $m_4$ .

Mulțimea de puncte  $m_1$ , după cum bine se știe, este o dreaptă perpendiculară pe segmentul  $AB$  dusă prin mijlocul său. Vom nota prin  $D$  și  $E$  punctele de intersecție a dreptei  $m_1$  respectiv cu dreapta  $d$  și cu perpendiculara dusă pe dreapta  $d$  în  $A$  (cazul în care dreptele  $m_1$  și  $d$  sînt paralele, este foarte simplu dar trebuie considerat separat); notăm prin  $G$  mijlocul segmentului  $AE$ , prin  $F$  și  $H$  acele puncte ale dreptei  $d$  astfel încît  $AF = FD = DH$  (fig. 316). Acum trebuie demonstrate trei afirmații:

1) Locul geometric al punctelor care sînt mijloacele unor segmente cu un capăt  $A$  fix, iar cu celălalt pe o dreaptă  $DE$  este o dreaptă ( $FG$  din fig. 317).

2) Locul geometric al mijloacelor segmentelor paralele cu o direcție dată  $AE$  și cu capetele pe două drepte date ( $ED$  și  $AD$ ) este o dreaptă ( $DG$ ; fig. 318).

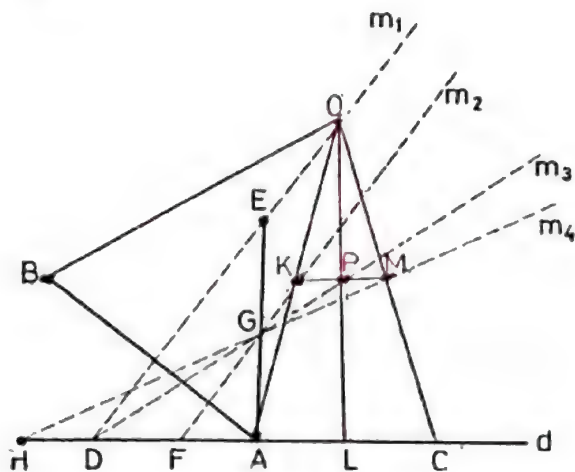


Fig. 316

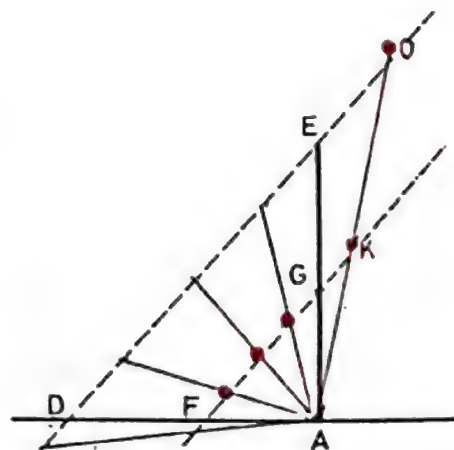


Fig. 317

3) Locul geometric al extremităților unor segmente paralele cu dreapta dată  $d$  care au celelalte extremități și mijloacele pe două drepte date ( $FG$  și  $DG$ ) este o dreaptă ( $HG$  din fig. 319).

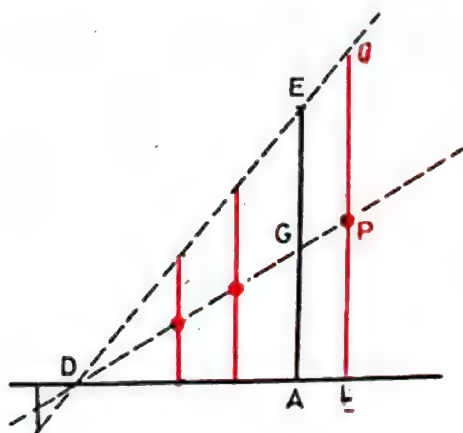


Fig. 318

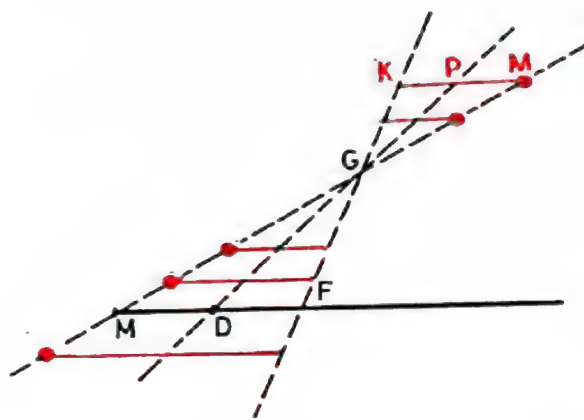


Fig. 319

Toate aceste afirmații se demonstrează ușor și aproape la fel. Vom demonstra de exemplu afirmația 3). În primul rând, este clar că orice punct  $M$  de pe dreapta  $HG$  satisface condiția cerută: dacă prin punctul  $M$  se duce o dreaptă paralelă cu  $d$  și notăm prin  $K$  și  $P$  punctele sale de intersecție cu dreptele  $FG$  și  $DG$ , atunci  $P$  va fi mijlocul segmentului  $KM$  (aceasta se demonstrează ușor cu ajutorul asemănării, folosind egalitatea  $HD = GF$ ). În al doilea rând, pe orice dreaptă paralelă cu  $d$  se găsește numai un punct al mulțimii căutate. De aceea alte puncte (care nu sînt situate pe dreapta  $HG$ ) în această mulțime nu pot să fie.

Celelalte demonstrații, efectuați-le singuri.

Considerați de asemenea cazul în care  $AB \perp d$ ; în acest caz toate cele trei locuri geometrice  $m_2, m_3, m_4$  se confundă într-o dreaptă paralelă cu  $d$  și care împarte segmentul  $AB$  în raportul 1:3.

**M 192.** Se dau numerele 1, 2, 3, ..., 1 000. Să se găsească cel mai mare număr natural  $m$  care are următoarea proprietate: dacă se vor elimina oricare  $m$  numere dintre cele date, atunci printre cele 1 000 —  $m$  rămase se găsesc două dintre care unul se divide la celălalt.

Vom demonstra că cel mai mare număr  $m$  este 499. Mai înainte, să arătăm că nici un număr  $n$  mai mare sau egal cu 500 nu are proprietatea necesară. Într-adevăr, dacă  $m \geq 500$ , atunci eliminînd primele  $m$  numere (de la 1 la  $m$ ) rămînem cu numerele de la  $m + 1 \geq 501$  la 1 000 printre care evident că nu este nici unul care să se dividă la altul.

Acum vom demonstra că  $m = 499$  are proprietatea cerută. Cu alte cuvinte vom demonstra că printre oricare 501 numere luate de la 1 la 1 000 se vor găsi două dintre care unul să se dividă la celălalt.

Vom pune în corespondență fiecărui număr dintre cele 501 cel mai mare divizor al său impar; numărul  $2^n(2n + 1)$  este pus în corespondență cu numărul  $2n + 1$ . Numere impare mai mici decît 1 000 sînt în total 500. Prin urmare la anumite două numere din cele 501 le va corespunde unul și același număr impar. Dintre aceste două numere cel mai mare se obține, în mod obligator, din cel mai mic înmulțit cu un factor putere a lui 2.



M 193. Să se demonstreze că suma ariilor celor cinci triunghiuri formate de câte o pereche de laturi și o diagonală ale unui pentagon convex (vezi fig. 320) este mai mare decât aria întregului pentagon.

N.B. Vasiliev

Vom da una dintre soluțiile cele mai scurte datorate lui A. Makarțev (Lvov). Vom demonstra că suma ariilor anumitor patru triunghiuri dintre cele menționate în textul problemei, este mai mare decât aria pentagonului.

Fie dat un pentagon convex oarecare. Vom nota vîrfurile sale prin literele  $A, B, C, D, E$  astfel încît aria triunghiului  $ABC$  să fie cea mai mică dintre ariile triunghiurilor  $ABC, BCD, CDE, DEA$  și  $EAB$  (fig. 320). Fie  $F$  punctul de intersecție dintre  $AD$  și  $EC$ . Întrucît punctul  $F$  este situat pe segmentul  $EC$ , aria  $S_{ABF}$  este cuprinsă între  $S_{ABE}$  și  $S_{ABC}$  (fig. 321). Dar știm că  $S_{ABC} \leq S_{ABE}$ . De aceea,  $S_{ABF} \leq S_{ABE}$ .

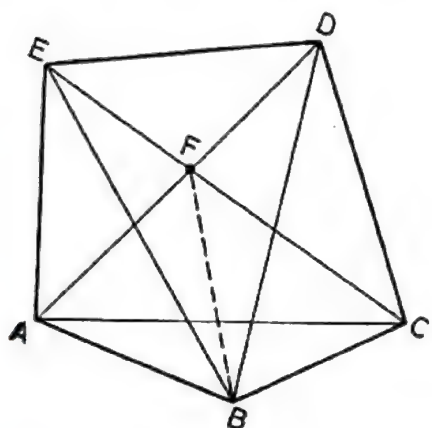


Fig. 320

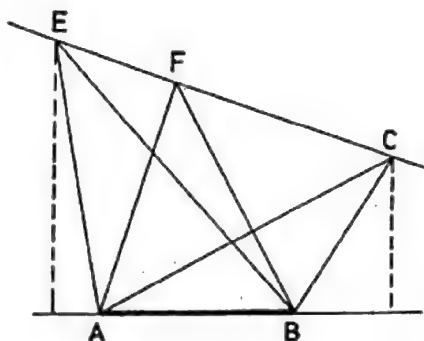


Fig. 321

În mod analog, întrucît punctul  $F$  este situat pe segmentul  $AD$  și  $S_{ABC} \leq S_{BCD}$ , rezultă că  $S_{BCF} \leq S_{BCD}$ .

Dar triunghiurile  $AED, EDC, ABF$  și  $BCF$  acoperă pentagonul (porțiunea  $EFD$  de două ori). De aceea suma ariilor lor este mai mare decât  $S_{ABCDE}$ . Cu atît mai mult

$$S_{ABE} + S_{AED} + S_{EDC} + S_{BCD} \geq S_{ABCDE}.$$

Afirmația este demonstrată.

Exemplul dat în figura 322 arată că raportul dintre ariile celor cinci triunghiuri și aria pentagonului poate fi foarte aproape de 1. Nu e greu de văzut că acest raport nu este mai mare decît 2. Figura 323 arată că el poate fi făcut oricît de aproape de 2.

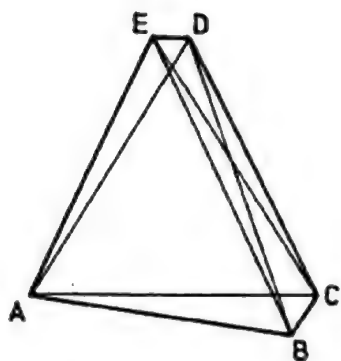


Fig. 322

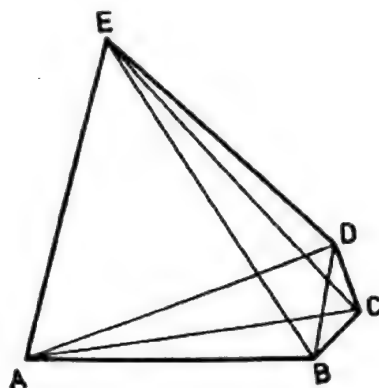


Fig. 323

**M 194.** Se dau două numere naturale prime între ele  $a$  și  $b$ . Se știe că orice număr întreg poate fi scris sub forma  $ax + by$ , unde  $x$  și  $y$  sînt numere întregi. Considerăm mulțimea  $M$  a tuturor numerelor care pot fi reprezentate sub forma  $ax + by$  unde  $x$  și  $y$  sînt numere naturale.

a) Care este cel mai mare număr  $c$  care nu aparține mulțimii  $M$ ?

b) Să se demonstreze că dintre două numere  $n$  și  $c - n$  (unde  $n$  este orice număr întreg) unul aparține mulțimii  $M$ , iar celălalt nu. (În figura 324 pentru  $a = 5$  și  $b = 3$ , punctele de coordonate întregi care aparțin mulțimii  $M$  sînt colorate.)

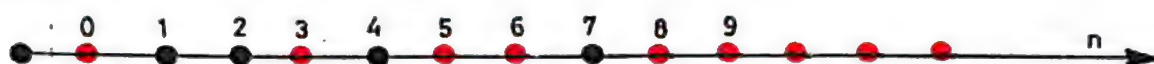


Fig. 324

Vom desena în plan sistemul de coordonate  $Oxy$  și vom reformula problema în limbaj geometric. Fiecare pereche de numere întregi  $(x, y)$  va fi numită „punct întreg” și va fi reprezentată cu cerculeț dacă ambele sale coordonate sînt numere naturale ( $x \geq 0, y \geq 0$ ) și cu punct negru dacă cel puțin una dintre coordonate va fi negativă (fig. 325).

Numererele naturale prime între ele  $a$  și  $b$  le considerăm date (în fig. 324,  $a = 5$  și  $b = 3$ ). Pentru fiecare  $n$ , ecuația  $ax + by = n$  definește, așa cum se știe, o dreaptă. O vom nota prin  $d_n$ . Desigur, toate dreptele  $d_n$  sînt paralele între ele. Fie  $n$  un număr întreg. Vom considera dreapta  $d_n$  trasată cu roșu dacă trece cel puțin printr-un punct reprezentat printr-un cerculeț și cu negru în caz contrar (vom demonstra mai jos că orice dreaptă  $d_n$  trece printr-un punct întreg). Trebuie să stabilim care este cel mai mare număr  $c$  căruia îi corespunde o dreaptă neagră  $d_c$  și să demonstrăm că atunci dintre două drepte  $d_n$  și  $d_{c-n}$  una este desenată cu roșu și una este cu negru.

Vom folosi în rezolvare transformările planului în el însuși care transformă mulțimea punctelor întregi în ea însăși și care transformă orice dreaptă  $d_n$  în ea însăși sau în alta  $d_n$ , din familie. Aceste transformări sînt în primul rînd translațiile de orice vector  $(p, q)$  cu  $p$  și  $q$  întregi:

$$(x, y) \rightarrow (p + x, y + q)$$

și în al doilea rînd rotațiile cu  $180^\circ$  (sau, ceea ce este același lucru, simetria față de un punct) cu orice centru  $\left(\frac{p}{2}, \frac{q}{2}\right)$  unde  $p$  și  $q$  sînt întregi:

$$(x, y) \rightarrow (p - x, q - y).$$

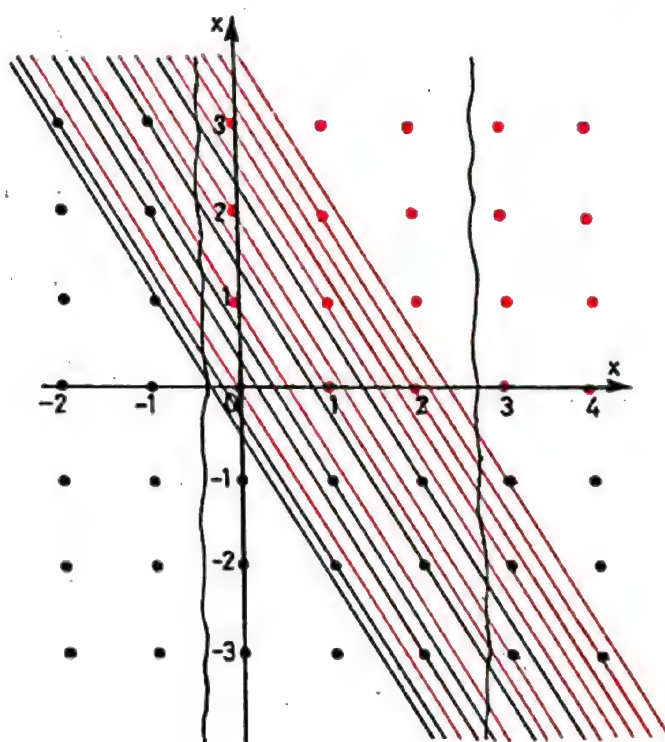


Fig. 325



Vom demonstra că pe fiecare dreaptă  $d_n$ , punctele întregi se întâlnesc după intervale egale.

**Te m a 1.** Dacă  $(x_0, y_0)$  este un punct întreg pe dreapta  $d_n$ , atunci cele mai apropiate puncte întregi de pe dreapta  $d_n$  vor fi  $(x_0 - b, y_0 + a)$  și  $(x_0 + b, y_0 - a)$  ( $a$  și  $b$  sînt prime între ele).

Să considerăm dreapta  $d_0$  care trece prin punctul  $(0, 0)$ . Fie  $(-b_1, a_1)$  cel mai apropiat punct întreg de  $(0, 0)$  de pe dreapta  $d_0$  astfel încît  $b_1 > 0$  și  $a_1 > 0$  (încă nu știm că  $b_1 = b$  și  $a_1 = a$ ) și  $(x_0, y_0)$  un punct întreg al dreptei  $d_n$ . Printr-o translație de vector  $(x_0, y_0)$  segmentul dreptei  $d_0$  de la  $(0, 0)$  la  $(-b_1, a_1)$  trece în segmentul dreptei  $d_n$  de la  $(x_0, y_0)$  la  $(x_0 - b_1, y_0 + a_1)$ . Astfel, punctul  $(x_0 - b_1, y_0 + a_1)$  va fi cel mai apropiat punct de  $(x_0, y_0)$  al dreptei  $d_n$ , în sus. În mod analog, printr-o translație de vector  $(x_0 + b_1, y_0 - a_1)$  același segment al dreptei  $d_0$  trece în segmentul dreptei  $d_n$  de la  $(x_0 + b_1, y_0 - a_1)$  la  $(x_0, y_0)$ . Prin urmare și pe acest segment punctele întregi vor fi numai extremitățile sale.

De aici rezultă că dacă pe o dreaptă oarecare  $d_n$  există cel puțin un punct întreg atunci distanța dintre două puncte întregi este aceeași:  $a_1$  unități pe axa  $Oy$  și  $b_1$  unități pe  $Ox$ . Aceasta, în particular se referă și la dreapta  $d_0$ . Intrucît  $(-b, a)$  aparține lui  $d_0$ , rezultă că  $b = tb_1$  și  $a = ta_1$  unde  $t$  este un număr întreg oarecare. Dar numerele  $a$  și  $b$ , din ipoteza problemei sînt prime între ele. Rezultă că  $t = 1$ , adică  $a = a_1$  și  $b = b_1$ . Lema 1 este demonstrată.

Din această leamnă rezultă că fiecare dreaptă  $d_n$ , unde  $n$  este întreg, trece exact printr-un singur punct din interiorul benzii  $0 \leq x \leq b - 1$ . În această situație (vezi fig. 325) este evident că dacă dreapta este roșie, adică trece undeva printr-un punct roșu, atunci punctul întreg din banda menționată este tot roșu (și punctul din bandă al unei drepte negre este tot negru).

Să observăm acum că prin simetria față de punctul  $\left(\frac{b-1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ :

$$(x, y) \rightarrow (x', y') = (b - 1 - x, -1 - y)$$

banda  $0 \leq x \leq b - 1$  se transformă în ea însăși, iar punctele roșii trec în puncte negre și invers. După această simetrie, dreapta  $d_n$  trece în dreapta  $d_{ab-a-b-n}$ ; dacă  $ax + by = n$ , atunci  $ax' + by' = a(b - 1 - x) + b(-1 - y) = ab - a - b - n$  (Se poate ca prin centrul de simetrie nici una dintre drepte să nu treacă, pentru că  $a\left(\frac{b-1}{2}\right) + b\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{ab - a - b}{2}$ ;

în figură centrul este punctul  $\left(1, -\frac{1}{2}\right)$ .

Este clar că cea mai de jos dreaptă roșie este  $d_0$ . Prin urmare, cea mai de sus dreaptă neagră este  $d_{ab-a-b}$ . Astfel, cel mai mare număr care nu aparține mulțimii este

$$c = ab - a - b$$

și dintre două numere  $n$  și  $c - n$  unul aparține lui  $M$  și altul nu.

Ne-am folosit de faptul că orice număr întreg  $n$  poate fi scris sub forma  $ax + by$  unde  $x$  și  $y$  sînt întregi. Acest lucru se poate demonstra ușor tot cu ajutorul „rețelei“.

**Te m a 2.** Pe fiecare dreaptă  $d_n$ , unde  $n$  este un număr întreg, se găsește cel puțin un punct întreg.

Este suficient să se demonstreze că punctul întreg  $(x_0, y_0)$  se găsește pe dreapta  $d_1$ : dacă  $ax_0 + by_0 = 1$ , atunci  $a(nx_0) + b(ny_0) = n$  așa că  $(nx_0, ny_0)$  va aparține dreptei  $d_n$ .

Să considerăm paralelogramul cu vîrfurile în  $(0, 0)$ ;  $(0, 1)$ ;  $(b, 1 - a)$ ;  $(b, -a)$  care are laturile mai mici de lungime 1, iar laturile mai mari sînt situate pe dreptele  $d_0$  și  $d_b$ . În interiorul acestui paralelogram (nu în vîrfuri) sînt  $b - 1$  puncte întregi: pe fiecare dreaptă  $x = 1, x = 2, \dots, x = b - 1$  cite unul. Pe de altă parte, acest paralelogram intersectează de același număr de ori  $(b - 1)$  dreptele  $d_1, d_2, \dots, d_{b-1}$  (fără  $d_0$  și  $d_b$ ). Întrucît, o dreaptă  $d_n$  nu poate avea mai mult de un singur punct întreg care să aibă abscisa într-un segment de pe axa  $Ox$  de lungime mai mică decît  $b$ , rezultă că toate punctele în număr de  $b - 1$  sînt situate cite unul pe fiecare dreaptă. În particular există un punct întreg și pe dreapta  $d_1$ . Lema 2 este demonstrată.

N.B. Vasiliev

**M 195.** Se dă triunghiul  $ABC$ . Cîte puncte  $D$  există astfel încît perimetrele patrulaterelor  $ADBC$ ,  $ABDC$  și  $ABCD$  să fie egale?

M.L. Gherver

**Rezolvare.** Vom construi trei cercuri ( $\alpha, \beta$  și  $\gamma$ ) cu centrele în punctele  $A, B$  și  $C$  care sînt două cite două tangente exterioare (fig. 326). Razele acestor cercuri  $a, b$  și  $c$  se determină din sistemul de ecuații

$$a + b = AB, a + c = AC, b + c = BC.$$

Astfel

$$a = p - BC, b = p - AC, c = p - AB \quad (1)$$

unde  $p$  este semiperimetrul triunghiului  $ABC$ .

Fie  $D$  centrul cercului  $\delta$  care este tangent exterior la cercurile  $\alpha, \beta$  și  $\gamma$ . Raza lui  $\delta$  o vom nota prin  $d$ .

Faptul că acest cerc există îl presupunem cunoscut. Construcția acestui cerc reprezintă conținutul uneia dintre celebrele probleme ale lui Apollonius din Perga (sec. III î.e.n.).

Din figura 326 rezultă direct că fiecare dintre cele trei patrulatere  $ADBC$ ,  $ABDC$  și  $ABCD$  are perimetrul  $2(p + d) = 2(a + b + c + d)$ . Astfel, cel puțin un punct  $D$  există.

Se poate să existe mai multe puncte? Trecînd la rezolvarea acestei probleme, înainte de toate să ne convingem că dacă perimetrele patrulaterelor  $ADBC$ ,  $ABDC$  și  $ABCD$  sînt egale, atunci punctul  $D$  este situat în afara cercurilor  $\alpha, \beta$  și  $\gamma$  și este egal depărtat de ele. Să punem  $AD = x$ ,  $BD = y$ ,  $CD = z$ . Atunci egalitatea perimetrelor patrulaterelor considerate se scrie astfel:

$$\begin{aligned} 2p - AB + x + y &= \\ &= 2p - AC + x + z \\ &= 2p - BC + y + z \end{aligned} \quad (2)$$

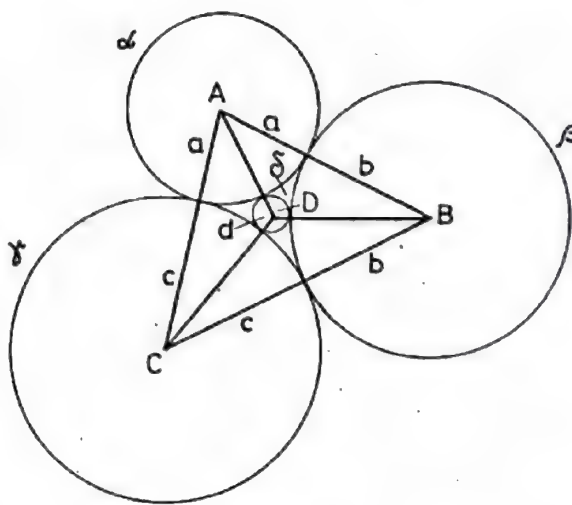


Fig. 326



Scăzând termen cu termen egalitățile (2) din numărul  $p + x + y + z$ , vom obține:

$$z - (p - AB) = y - (p - AC) = x - (p - BC).$$

Folosind formulele (1), vom găsi

$$z - c = y - b = x - a.$$

Conform cu (3), numerele  $x - a$ ,  $y - b$ ,  $z - c$  au același semn și anume  $x - a > 0$  dacă punctul  $D$  este situat în exteriorul lui  $\alpha$  și  $x - a \leq 0$  dacă  $D$  este situat în interior sau pe  $\alpha$ ; semnele lui  $y - b$  și  $z - c$  au semnificații analoage. Fiindcă nici un punct nu aparține deodată tuturor celor trei cercuri, cazul

$$x - a = y - b = z - c \leq 0$$

se exclude. Rezultă că

$$x - a = y - b = z - c > 0$$

adică  $D$  este situat în exteriorul cercurilor și este egal depărtat de ele.

Bazindu-ne pe acest lucru să demonstrăm unicitatea lui  $D$ . Fie, ca să precizăm,  $\alpha$  cel mai mic dintre cercurile  $\alpha$ ,  $\beta$ , și  $\gamma$ ;  $a \leq b$ ,  $a \leq c$ . Cu razele  $b - a$  și  $c - a$  descriem cercurile  $\beta'$  și  $\gamma'$  cu centrele în punctele  $B$  și  $C$ . Punctul  $D$  situat în afara cercurilor  $\alpha$ ,  $\beta$  și  $\gamma$  și egal depărtat de ele este de asemenea egal depărtat de punctul  $A$  și de cercurile  $\beta'$  și  $\gamma'$  (fig. 327). Vom construi încă trei cercuri ( $\alpha''$ ,  $\beta''$  și  $\gamma''$ ) cu centrele în punctele  $A$ ,  $B$  și  $C$  și cu razele  $AD$ ,  $BD$  și  $CD$ . Fie  $T$  un punct oarecare situat în interiorul lui  $\alpha''$  sau pe  $\alpha''$ , diferit de  $D$ . Atunci (fig. 327)  $T$  este situat sau în exteriorul lui  $\beta''$  sau în exteriorul lui  $\gamma''$  sau în exteriorul ambelor cercuri. Astfel  $T$  este mai apropiat de  $A$  decât de unul dintre cercurile  $\beta'$  sau  $\gamma'$ . Ultimul raționament arată că două puncte diferite  $D_1$  și  $D_2$  nu pot să fie egal depărtate de  $A$ ,  $\beta'$  și  $\gamma'$ ; presupunând contrarul (fie  $D_1$  și  $D_2$  aceste puncte și  $AD_1 \geq AD_2$ ) și notînd pe  $D_1$  prin  $D$  și pe  $D_2$  prin  $T$  ajungem, conform celor de mai sus, la o contradicție. Unicitatea lui  $D$  este demonstrată.

Problema duală. Mai sus s-a pus în evidență strînsa legătură care există între problema dată cu cele trei patrulatere și problema lui Apollonius. În formularea acesteia („Să se construiască un cerc tangent la trei cercuri date”) nu s-a indicat în ce mod trebuie să fie tangent exterior sau interior. Mai sus, cercul  $\delta$  era tangent la cercurile  $\alpha$ ,  $\beta$  și  $\gamma$  în mod exterior. Să notăm prin  $\epsilon$  cercul care este tangent la  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  și le cuprinde pe acestea: vom nota centrul său prin  $E$  (fig. 328). Ne punem întrebarea: nu este punctul  $E$  soluția unei probleme asemănătoare cu problema celor trei patrulatere? (Înainte de a citi mai departe, încercați să vă gândiți singuri la această problemă.)

Să punem  $AE = x$ ,  $BE = y$ ,  $CE = z$  iar raza cercului  $\epsilon$  să o notăm prin  $e$ . Atunci (fig. 328)  $x + a = y + b = z + c = e$ . De aici rezultă că  $x + y + a + b = 2e$ , adică  $x + y + AB = 2e$ . La fel se stabilește că  $x + z + AC = y + z + BC = 2e$ . Mărimile  $x + y + AB$ ,  $x + z + AC$  și  $y + z + BC$  reprezintă perimetrele triunghiurilor  $AEB$ ,  $AEC$  și  $BEC$ . Astfel, centrul  $E$  al cercului  $\epsilon$  este soluția problemei „cu trei triunghiuri de perimetre egale” complet analoagă cu problema inițială cu trei patrulatere. Formularea exactă a problemei este:

Se dă un triunghi  $ABC$ . Cîte puncte  $E$  există astfel încît perimetrele triunghiurilor  $AEB$ ,  $AEC$  și  $BEC$  să fie egale? (ca] și mai sus se consideră numai puncte din planul triunghiului  $ABC$ ),

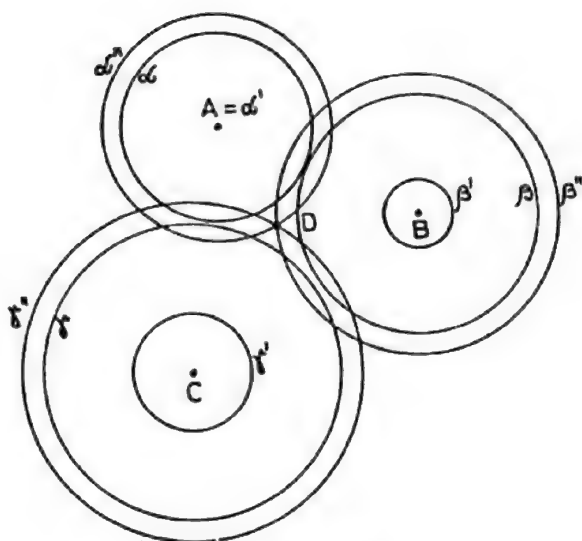


Fig. 327

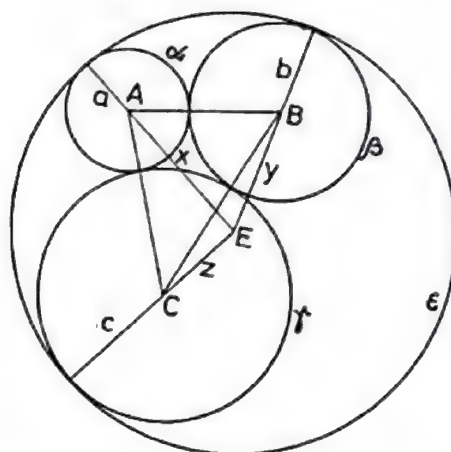


Fig. 328

Mai sus am stabilit că cel puțin un astfel de punct  $E$  există.

În problemele despre trei patrulatere și trei triunghiuri de mai sus, am demonstrat nu numai existența și unicitatea punctelor  $D$  și  $E$  ci am găsit și formulele pentru perimetre:  $2(p + d) = 2(a + b + c + d)$  și  $2e$ . Ne întrebăm: putem calcula aceste perimetre știind laturile triunghiului  $ABC$ ? Razele  $a$ ,  $b$  și  $c$  se calculează cu formulele simple (1). Se pot exprima  $d$  și  $e$  cu ajutorul lui  $a$ ,  $b$  și  $c$ ? Răspunsul pozitiv la această chestiune este dat de formula lui Frederic Soddi (chimist nu matematician!)

Să notăm prin  $k$ ,  $l$ ,  $m$  și  $n$  inversele mărimilor razelor cercurilor  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  și  $\delta$ :  $k = 1/a$ ,  $l = 1/b$ ,  $m = 1/c$ ,  $n = 1/d$ .

Atunci

$$2(k^2 + l^2 + m^2 + n^2) = (k + l + m + n)^2.$$

Această relație elegantă este formula lui Soddi. Ea poate fi considerată ca o ecuație de gradul al doilea relativ la  $n$ . Rezolvând această ecuație se obține

$$n_{1,2} = k + l + m \pm 2\sqrt{kl + lm + mk}$$

Rădăcina pozitivă  $n_1$  va fi desigur  $1/d$ . Dar cine va fi  $n_2$ ? Se arată că  $n_2 = -1/e$  unde  $e$  este raza cercului din problema duală.

Care este sensul semnelor „plus” și „minus” din formulele de mai sus?

Mărimea inversă razei unui cerc are o denumire specială; se numește „curbură”. Cu cât este mai mare raza unui cerc cu atât el „se îndoaie” mai puțin deci cu atât curbura sa este mai mică. O dreaptă considerată ca un caz limită a unui cerc („cercul de rază infinită”) are curbura nulă. Prin semne este natural să distingem curbura curbelor convexe de cele concave. Dar ce ar fi niște cercuri convexe sau concave? Toate cercurile, desigur, sînt „identice”. Dar atunci cînd ne găsim în exteriorul unui cerc este natural să-l considerăm convex iar dacă ne găsim în interiorul aceluiași cerc, atunci ni-l reprezentăm ca concav. Astfel „din punct de vedere al cercurilor  $\alpha$ ,  $\beta$  și  $\gamma$ ” cercurile  $\delta$  și  $\epsilon$  este natural să le considerăm „diferite”, primul convex iar al doilea concav.

Deducerea formulei lui Soddi.

1. Fie  $U$ ,  $V$  și  $W$  trei numere arbitrare nenegative a căror sumă este egală cu  $\pi$ .

Atunci

$$\sin^2 U = \sin^2 V + \sin^2 W - 2 \sin V \sin W \cos U.$$



**Demonstrație.** Construim triunghiul cu unghiurile  $U, V$  și  $W$ . Fie lungimile laturilor opuse corespunzătoare  $u, v$  și  $w$ . După teorema cosinusului avem

$$u^2 = v^2 + w^2 - 2vw \cos U.$$

Din teorema sinusurilor avem  $u/\sin U = v/\sin V = w/\sin W$ . De aici prin înlocuire se obține formula necesară pentru orice valori  $U, V, W$  nenule. Dacă cel puțin unul dintre unghiurile  $U, V$  și  $W$  este nul atunci formula se verifică direct.

2. Fie  $A, B, C$  și  $D$  patru puncte arbitrare în plan. Atunci

$$\left( \sin^2 \frac{\sphericalangle ADB}{2} + \sin^2 \frac{\sphericalangle ADC}{2} - \sin^2 \frac{\sphericalangle BDC}{2} \right)^2 =$$

$$= 4 \sin^2 \frac{\sphericalangle ADB}{2} \sin^2 \frac{\sphericalangle ADC}{2} \cdot \cos^2 \frac{\sphericalangle BDC}{2}$$

**Demonstrație.** Sînt posibile patru cazuri de așezare a celor patru puncte (vezi fig. 329). În fiecare dintre ele vom lua pe  $U, V$  și  $W$  așa cum este indicat în tabelul de mai jos. În oricare caz,  $U \geq 0, V \geq 0, W \geq 0$  și  $U + V + W = \pi$ , așa că, conform cu punctul 1:

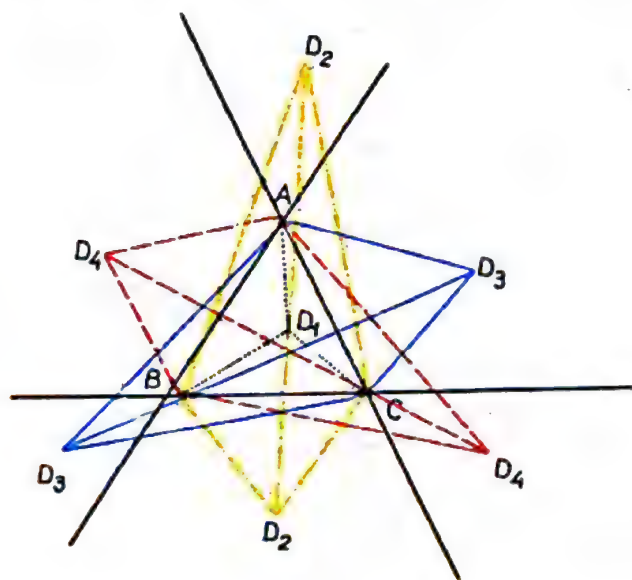


Fig. 329

$$(\sin^2 V + \sin^2 W - \sin^2 U)^2 =$$

$$= 4 \sin^2 V \cdot \sin^2 W \cdot \cos^2 U$$

Rămîne să se verifice că în fiecare caz

$$\sin U = \sin \frac{\sphericalangle BDC}{2}$$

$$\sin V = \sin \frac{\sphericalangle ADC}{2}$$

$$\sin W = \sin \frac{\sphericalangle ADB}{2}$$

$$\cos^2 U = \cos^2 \frac{\sphericalangle BDC}{2}$$

Nr.	Dacă	Atunci
1	$\sphericalangle BDC + \sphericalangle ADC + \sphericalangle ADB = 2\pi$	$U = \frac{\sphericalangle BDC}{2}, V = \frac{\sphericalangle ADC}{2}, W = \frac{\sphericalangle ADB}{2}$
2	$\sphericalangle BDC = \sphericalangle ADC + \sphericalangle ADB$	$U = \pi - \frac{\sphericalangle BCD}{2}, V = \frac{\sphericalangle ADC}{2}, W = \frac{\sphericalangle ADB}{2}$
3	$\sphericalangle ADC = \sphericalangle ADB + \sphericalangle BDC$	$U = \frac{\sphericalangle BDC}{2}, V = \pi - \frac{\sphericalangle ADC}{2}, W = \frac{\sphericalangle ADB}{2}$
4	$\sphericalangle ADB = \sphericalangle BDC + \sphericalangle ADC$	$U = \frac{\sphericalangle BDC}{2}, V = \frac{\sphericalangle ADC}{2}, W = \pi - \frac{\sphericalangle ADB}{2}$

3. Fie unul dintre unghiurile triunghiului egal cu  $\theta$ , latura opusă lui  $u$ , cele alăturate  $v$  și  $w$ , iar semiperimetrul triunghiului  $q$ . Atunci

$$\cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{q(q-u)}{v \cdot w}, \quad \sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{(q-v)(q-w)}{v \cdot w}.$$

**Demonstrație.** După teorema cosinusului

$$u^2 = v^2 + w^2 - 2vw \cos \theta, \quad \cos \theta = (v^2 + w^2 - u^2)/2vw.$$

Rezultă,

$$\begin{aligned} \cos^2 \frac{\theta}{2} &= \frac{1 + \cos \theta}{2} = \frac{(v+w)^2 - u^2}{4v \cdot w} = \frac{(v+w+u)(v+w-u)}{4v \cdot w} = \frac{q(q-u)}{v \cdot w}, \\ \sin^2 \frac{\theta}{2} &= \frac{1 - \cos \theta}{2} = \frac{u^2 - (v-w)^2}{4v \cdot w} = \frac{(u+v-w)(u+w-v)}{4v \cdot w} = \\ &= \frac{(q-w)(q-v)}{v \cdot w}. \end{aligned}$$

4. Să presupunem că cercurile  $\alpha, \beta, \gamma$  și  $\delta$  cu centrele în punctele  $A, B, C$  și  $D$  și de raze  $a, b, c$  și  $d$  sînt tangente două cite două exterior.

Atunci

$$\begin{aligned} \cos^2 \angle BDC &= \frac{(b+d+c)d}{(b+d)(d+c)}, \quad \sin^2 \angle BDC = \frac{bc}{(b+d)(d+c)}, \\ \sin^2 \angle ADB &= \frac{ab}{(a+d)(d+b)}, \quad \sin^2 \angle ADC = \frac{ac}{(a+d)(d+c)}. \end{aligned}$$

**Demonstrație.** În triunghiul  $BDC$  exprimăm laturile și semiperimetrul cu ajutorul lui  $b, c$  și  $d$ :

$$BC = b + c, \quad BD = b + d, \quad DC = d + c, \quad \frac{1}{2}(BC + BD + DC) = b + d + c$$

și vom folosi formulele de la punctul 3. Celelalte două formule le vom obține în mod analog din triunghiurile  $ADB$  și  $ADC$ .

4'. Fie cercurile  $\alpha, \beta, \gamma$  cu centrele în punctele  $A, B, C$  și cu razele  $a, b, c$  două cite două tangente în mod exterior, toate trei tangente interior la cercul  $\epsilon$  cu centrul în  $E$  și de rază  $e$ . Atunci:

$$\begin{aligned} \cos^2 \angle BEC &= \frac{(b-e+c)(-e)}{(b-e)(-e+c)}, \quad \sin^2 \angle BEC = \frac{bc}{(b-e)(-e+c)}, \\ \sin^2 \angle AEB &= \frac{ab}{(a-e)(-e+b)}, \quad \sin^2 \angle AEC = \frac{ac}{(a-e)(-e+c)}. \end{aligned}$$

Demonstrația se face la fel ca cea de la punctul 4.

5. În condițiile de la punctul 4 să punem:  $k = 1/a, l = 1/b, m = 1/c, n = 1/d$ .

Atunci

$$(-k + l + m + n)^2 = 4(lm + mn + nl).$$

**Demonstrație.** Conform punctelor 2 și 4

$$\begin{aligned} &\left[ \frac{ab}{(a+d)(b+d)} + \frac{ac}{(a+d)(d+c)} - \frac{bc}{(b+d)(d+c)} \right]^2 = \\ &= 4 \frac{ab}{(a+d)(d+b)} \cdot \frac{ac}{(a+d)(d+c)} \cdot \frac{(b+d+c)d}{(b+d)(d+c)}. \end{aligned}$$



Înmulțind ambii termeni ai egalității cu  $[(a+d)(b+d)(c+d)/abcd]^2$ , vom obține

$$\left[ \frac{c+d}{cd} + \frac{b+d}{bd} - \frac{a+d}{ad} \right]^2 = 4 \frac{b+d+c}{bdc}$$

sau

$$(-k + l + m + n)^2 = 4(lm + mn + nl)$$

**Observație.** Formulele punctului 4' se obțin din formulele punctului 4 dacă se înlocuiește  $d$  prin  $-e$ . De aceea formula demonstrată la punctul 5 rămâne valabilă și în condițiile punctului 4' dacă  $n = -1/e$ .

6. Curburile  $k, l, m, n$  ale cercurilor  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  două câte două tangente exterioare, sînt legate prin formula lui Soddi

$$(k + l + m + n)^2 = 2(k^2 + l^2 + m^2 + n^2)$$

Aceeași formulă rămîne valabilă dacă  $n$  este curbura cercului  $\varepsilon$  la care  $\alpha, \beta, \gamma$  sînt tangente interioare.

**Demonstrație.** Transformăm identitatea

$$(k + l + m + n)^2 = (-k + l + m + n)^2 + 4k(l + m + n)$$

ținînd cont de punctul 5:

$$(k + l + m + n)^2 - 4(kl + km + kn + lm + ln + mn).$$

Folosind identitatea

$$(k + l + m + n)^2 - (k^2 + l^2 + m^2 + n^2) = 2(kl + km + kn + lm + ln + mn)$$

obținem

$$(k + l + m + n)^2 = 2[(k + l + m + n)^2 - (k^2 + l^2 + m^2 + n^2)].$$

Reducînd termenii asemenea, obținem formula lui Soddi.

Dacă revenim acum la „rezolvarea“ problemei inițiale (și a celei duale) trebuie să facem observația că în cursul demonstrațiilor ne-am bazat pe niște fapte „evidente“ dar care... nu sînt adevărate.

1. Fie trei cercuri  $\alpha, \beta$  și  $\gamma$  două câte două tangente exterioare. Atunci există un singur cerc  $\delta$  tangent exterior la  $\alpha, \beta$  și  $\gamma$  și un singur cerc  $\varepsilon$  la care  $\alpha, \beta$  și  $\gamma$  sînt tangente interioare.

2. Fie trei cercuri  $\alpha'', \beta''$  și  $\gamma''$  care trec prin același punct  $D$ . Atunci orice punct  $T$  situat în interiorul lui  $\alpha''$ , este situat sau în exteriorul lui  $\beta''$ , sau în exteriorul lui  $\gamma''$  (sau în exteriorul ambelor cercuri).

În fig. 330 sînt desenate trei cercuri,  $\alpha, \beta$ , și  $\gamma$  pentru care există două cercuri ( $\delta_1$  și  $\delta_2$ ) care sînt tangente exterioare la  $\alpha, \beta$  și  $\gamma$  și pentru care nu există nici un cerc  $\varepsilon$  care să cuprindă cercurile  $\alpha, \beta$  și  $\gamma$  cu care să fie tangente. Figura 331 răstoarnă și afirmația 2.

Rezultă că nu sînt valabile nici consecințele acestor două „afirmații“ și ca atare toată rezolvarea trebuie revizuită. Acest lucru îl facem folosind următoarea teoremă.

**Teoremă.** Fie date cercurile  $\alpha, \beta$  și  $\gamma$  două câte două tangente exterioare. Atunci sînt posibile trei (și numai trei) cazuri:

- I. Există un singur cerc  $\delta$  care este tangent exterior la cele trei cercuri date și există un singur cerc  $\varepsilon$  la care cercurile  $\alpha, \beta$  și  $\gamma$  sînt tangente interioare.
- II.  $\alpha, \beta$  și  $\gamma$  admit o tangentă comună (și sînt situate de aceeași parte a sa) și în acest caz există un singur cerc  $\delta$  tangent exterior la  $\alpha, \beta$  și  $\gamma$  și nu există nici un cerc la care  $\alpha, \beta$  și  $\gamma$  să fie tangente interioare.

III. Există două cercuri  $\delta_1$  și  $\delta_2$  care sînt tangente exterioare la cercurile  $\alpha$ ,  $\beta$  și  $\gamma$  și nu există nici un cerc la care  $\alpha$ ,  $\beta$  și  $\gamma$  să fie tangente interioare.  
**Demonstrația teoremei o vom face folosind transformarea numită i n v e r s i u n e.**

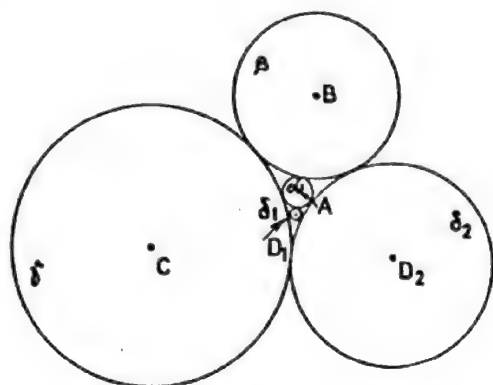


Fig. 330

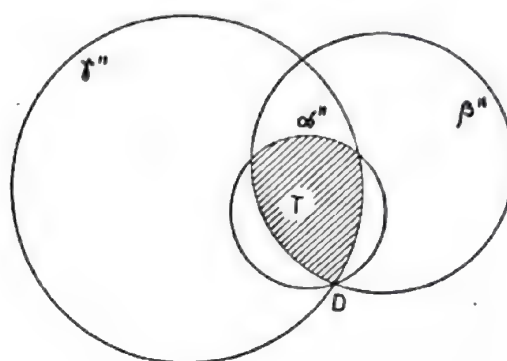


Fig. 331

Reamintim definiția și cîteva proprietăți ale inversiunii.

**Definiție.** Fie  $Q$  un cerc de centru  $O$  și de rază  $R$ , situat în planul  $\pi$ . Se numește **inversiune în raport cu cercul  $Q$** , următoarea transformare a planului  $\pi$ : fiecărui punct  $M$  al planului situat la distanța  $r$  de  $O$  îi corespunde un punct  $M'$  situat pe semidreapta  $OM$  la distanța  $r'$  de  $O$  astfel încît  $rr' = R^2$ ;  $O$  se numește centrul inversiunii,  $R^2$  se numește coeficientul de inversiune.

**Proprietăți.** 1. Dacă  $M$  aparține cercului  $Q$  atunci  $M' = M$ ; dacă  $M$  se găsește în interiorul lui  $Q$  și e diferit de  $O$ , atunci  $M'$  se găsește în exteriorul lui  $Q$ ; dacă  $M$  este în exteriorul lui  $Q$  atunci  $M'$  este situat în interiorul lui  $Q$ .

2. Dreptele și cercurile trec prin inversiune în drepte și cercuri și anume:

- a) punctele situate pe o dreaptă care trece prin  $O$ , se transformă în puncte situate pe aceeași dreaptă;
- b) o dreaptă care nu trece prin  $O$ , se transformă într-un cerc care trece prin  $O$ ;
- c) un cerc care trece prin  $O$ , se transformă într-o dreaptă care nu trece prin  $O$ ;
- d) un cerc care nu trece prin  $O$  se transformă într-un cerc care nu trece prin  $O$ ; în acest caz,  $O$  se găsește sau în exteriorul ambelor cercuri sau în interiorul ambelor cercuri.

**Demonstrația teoremei.** Cercurile  $\alpha$ ,  $\beta$  și  $\gamma$ , după ipoteză sînt tangente două cîte două în mod exterior (fig. 333, a). Notăm punctul de tangență dintre  $\alpha$  și  $\beta$  prin  $O$ . Vom lua un cerc  $Q$  cu centrul în  $O$  și aplicăm o inversiune față de acest cerc (fig. 332).

Prin inversiune, cercurile  $\alpha$  și  $\beta$  se transformă în dreptele  $\alpha'$  și  $\beta'$  iar cercul  $\gamma$  într-un cerc  $\gamma'$  tangent la aceste drepte (fig. 333, b). Centrul inversi-

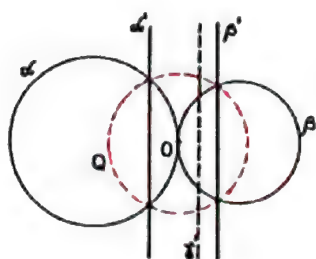


Fig. 332

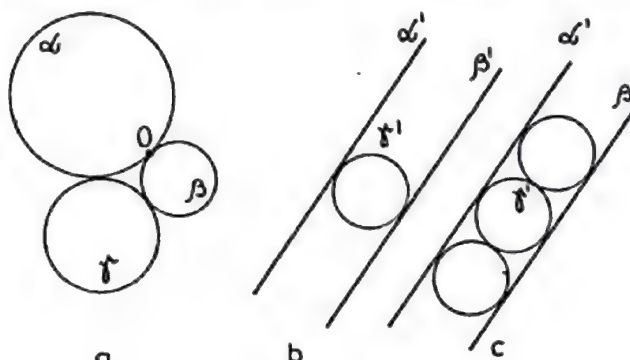


Fig. 333



unii  $O$  este situat (verificați aceasta!) în banda dintre dreptele  $\alpha'$  și  $\beta'$  în afara cercului  $\gamma'$ .

Există în mod evident exact două cercuri care sînt tangente și la  $\alpha'$  și la  $\beta'$  și la  $\gamma'$  (fig. 333, c). În acest caz sînt posibile trei cazuri.

I. Punctul  $O$  este situat în interiorul unuia dintre aceste cercuri (și în afara celuilalt).

II. Punctul  $O$  este situat pe unul dintre aceste cercuri (și în afara celuilalt).

III. Punctul  $O$  este situat în afara ambelor acestor cercuri.

În cazurile I și II să notăm cercurile considerate prin  $\delta'$  și  $\epsilon'$  (prin  $\delta'$  acela în afara căruia se găsește punctul  $O$ ), în cazul III să le notăm prin  $\delta'_1$  și  $\delta'_2$ .

Orice cerc sau dreaptă care este tangent și la  $\alpha$  și la  $\beta$  și la  $\gamma$  trece prin inversiune într-un cerc care este tangent la  $\alpha'$ ,  $\beta'$  și  $\gamma'$ . În cazul I, în cercurile  $\delta'$  și  $\epsilon'$  au trecut cercuri, pe care să le numim  $\delta$  și  $\epsilon$ . În cazul II în  $\delta'$  a trecut un cerc, pe care să-l numim  $\delta$ , iar în  $\epsilon'$  a trecut o dreaptă (adică  $\alpha$ ,  $\beta$  și  $\gamma$  admit în acest caz o tangentă comună și  $\alpha$ ,  $\beta$  și  $\gamma$  sînt situate de aceeași parte a ei). În cazul III în  $\delta'_1$  și  $\delta'_2$  au trecut cercuri (să le numim  $\delta_1$  și  $\delta_2$ ).

Astfel cercuri tangente și la  $\alpha$  și la  $\beta$  și la  $\gamma$ , sînt sau două sau unul. În cazul I, punctul  $O$  este situat în exteriorul lui  $\delta$  și în interiorul lui  $\epsilon$ , adică  $\delta$  este tangent exterior cu  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  iar acestea sînt tangente interioare la  $\epsilon$ . În cazul II, punctul  $O$  este situat în exteriorul lui  $\delta$  — din nou  $\delta$  este tangent exterior cu  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ . În cazul III punctul este situat și în exteriorul lui  $\delta_1$  și în exteriorul lui  $\delta_2$  așa că ambele sînt tangente exterioare la  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ . Teorema este demonstrată.

**Consecința I.** În cazurile I și II problema cu trei patrulatere are o soluție unică (centrul  $D$  al cercului  $\delta$ ), în cazul III, două soluții (centrele  $D_1$  și  $D_2$  ale cercurilor  $\delta_1$  și  $\delta_2$ ).

**Consecința II.** În cazul I problema cu cele trei triunghiuri are o singură soluție (centrul  $E$  al cercului  $\epsilon$ ), în cazurile II și III nu are soluție.

**Observație.** Cele afirmate la „rezolvarea” dată inițial, privitor la  $n_1 = 1/d$  și  $n_2 = -1/e$  se referă la cazul I. În acest caz  $n_2 < 0$ . În cazul II,  $n_2 = 0$  (adică dreapta tangentă la  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  are curbura nulă). În cazul III,  $n_1 = 1/d_1$  și  $n_2 = 1/d_2$ , unde  $d_1$  și  $d_2$  sînt razele cercurilor  $\delta_1$  și  $\delta_2$ ; în acest caz  $n_2 > 0$ .

Știind laturile triunghiului  $ABC$ , putem calcula  $n_{1,2}$  și să stabilim în care caz sîntem. Acest lucru poate fi făcut și fără atîtea calcule, așa cum vom arăta la rezolvarea problemei M 209.

M.L. Gherver

**M 196.** Într-un cerc de rază 1 se duc mai multe coarde. Să se demonstreze că dacă fiecare diametru intersectează cel mult  $k$  coarde, atunci suma lungimilor coardelor este mai mică decît  $\pi k$ .

A.T. Kolotov

Să presupunem că suma lungimilor coardelor nu este mai mică decît  $\pi k$ . Atunci suma arcelor (celor mai mici) subîntinse de aceste coarde este mai mare decît  $\pi$ . Adăugăm la aceste arce și arcele simetrice cu acestea față de centrul cercului. Suma lungimii tuturor arcelor este mai mare decît  $2\pi k$ . De aceea, se va găsi un punct de pe cerc acoperit de cel puțin  $k + 1$  arce (lungimea cercului este  $2\pi$ ). Dacă vom duce diametrul prin acest punct el va intersecta cel puțin  $k + 1$  coarde ceea ce contrazice ipoteza.

A.T. Kolotov

M. 197. Într-un tablou dreptunghiular cu  $m$  linii și  $n$  coloane sunt scrise  $mn$  numere arbitrare pozitive. Efectuăm produsul numerelor din fiecare coloană și apoi suma  $S$  a tuturor celor  $n$  produse. Să se demonstreze că dacă așezăm numerele de pe fiecare linie în ordine crescătoare, suma  $S$  pentru noul tablou nu va fi mai mică decât în cel inițial (În figura 334 este dat un exemplu din situația descrisă în problemă; aici  $m = 3$ ,  $n = 4$ .)

Să se rezolve această problemă:

- pentru  $m = n = 2$  (pentru tabloul  $2 \times 2$ );
- pentru  $m = 2$  și  $n$  arbitrar (pentru un tablou format din două linii);
- pentru orice numere naturale  $m$  și  $n$ .

1	5	6	2
4	3	7	2
1	2	1	2
4	30	42	8

$S = 84$

1	2	5	6
2	3	4	6
1	1	2	2
2	6	40	84

$S = 132$

Fig. 334

Vom examina direct cazul general, un tablou cu  $m$  linii și  $n$  coloane. Vom demonstra că prin ordonarea liniilor, suma produselor nu se va micșora. Demonstrația o vom face prin inducție după numărul de coloane ale tabloului. Dacă tabloul are o coloană, atunci afirmația problemei este adevărată. Presupunem că pentru tablourile cu  $n - 1$  coloane afirmația problemei este adevărată. O vom demonstra pentru tablourile formate din  $n$  coloane.

Să notăm prin  $\pi_i$  produsul numerelor din coloana  $i$ . Aranjăm acum coloanele astfel încât produsul  $\pi_1$  să fie minim (aceasta nu schimbă suma produselor). Vom nota prin  $x_{ij}$  numărul din coloana  $j$  și linia  $i$ . Presupunem că  $x_{i1}$  nu este numărul minim din linia  $i$  și că numărul minim este  $x_{ik}$ . Să schimbăm locurile lui  $x_{i1}$  și  $x_{ik}$  și să verificăm că suma produselor în acest caz va crește. Vom nota prin  $\tilde{\pi}_1$  produsul tuturor numerelor din prima coloană în afară de  $x_{i1}$ , prin  $\tilde{\pi}_k$  produsul tuturor numerelor din coloana  $k$ , în afară de  $x_{ik}$ . Diferența dintre suma veche și suma nouă este egală cu

$$x_{i1}\tilde{\pi}_k + x_{ik}\tilde{\pi}_1 - x_{i1}\tilde{\pi}_1 - x_{ik}\tilde{\pi}_k = (x_{i1} - x_{ik})(\tilde{\pi}_k - \tilde{\pi}_1).$$

Dar această mărime este pozitivă, pentru că  $x_{i1} > x_{ik}$  și  $\pi_k > \pi_1$  întrucât  $x_{ik}\pi_k > x_{i1}\pi_1$ . Rezultă că după schimbarea numerelor, suma se mărește. În afară de aceasta, este evident că produsul  $\pi_1$  al noilor numere din prima coloană, ca și mai înainte, este minim. Deci dacă un anumit număr  $x_{i1}$  nu este minimal în linia sa, putem să schimbăm locul său cu cel al numărului minimal și în acest fel suma se mărește. Astfel putem ca toate numerele minimale de pe linii să le considerăm în prima coloană și suma produselor să se mărească.



Vom folosi acum presupunerea de inducție. Evident că dacă ordonăm liniile într-un tablou format din coloanele de la a 2-a la a  $n - 2$ , vom obține tabloul inițial cu liniile ordonate. Cu presupunerea de inductiv putem afirma că suma produselor  $\pi_2 + \dots + \pi_n$  nu se micșorează. Prin urmare, suma  $\pi_1 + \dots + \pi_n$  din primul tablou nu e mai mare decât suma analogă din tabloul cu liniile ordonate. Rezolvarea problemei este terminată.

*Observații 1.* Remarcăm că prin schimbările locurilor numerelor suma produselor se mărește strict. De aici rezultă că suma produselor este maximă atunci și numai atunci când tabloul se obține dintr-un tablou cu linii ordonate prin permutarea coloanelor.

2. Dacă nu se presupune că în tablou sînt numere pozitive, atunci afirmația nu e adevărată. Un exemplu simplu de tablou  $2 \times 3$  este dat în figura 335.

B.M. Makarevici

-1	-2
-2	-1
-1	2
<hr/>	
-2	4
<hr/>	
$S = 2$	

-2	-1
-2	-1
-1	2
<hr/>	
-4	2
<hr/>	
$S = -2$	

Fig. 335

**M 198.** Se dă paralelogramul  $ABCD$ . Pe dreptele  $AB$  și  $BC$  se aleg punctele  $H$  respectiv  $K$  astfel încît triunghiurile  $KAB$  și  $HCB$  să fie isoscele ( $KA = AB$  și  $HC = CB$ ; fig. 336). Să se demonstreze că triunghiul  $KDH$  este de asemenea isoscel.

V.L. Gutenmaher

Este o problemă foarte simplă. Considerăm triunghiurile  $AKD$  și  $CDH$ . Ele sînt congruente, întrucît  $AD = CH$ ,  $AK = DC$  și  $\angle DAK = \angle DCH$  (vezi fig. 337, a, b și c). De aceea segmentele  $KD$  și  $DH$  au aceeași lungime. Se verifică ușor și faptul că triunghiurile  $KDH$ ,  $AKB$  și  $BHC$  sînt asemenea (demonstrați!).

V.L. Gutenmaher

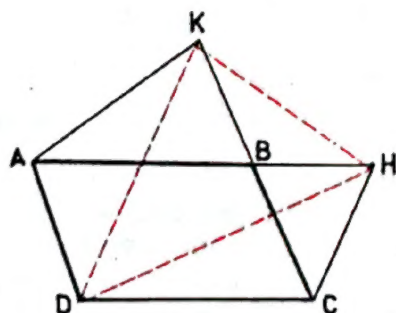


Fig. 336

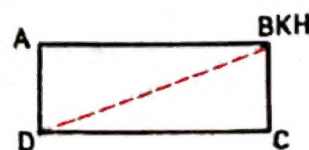
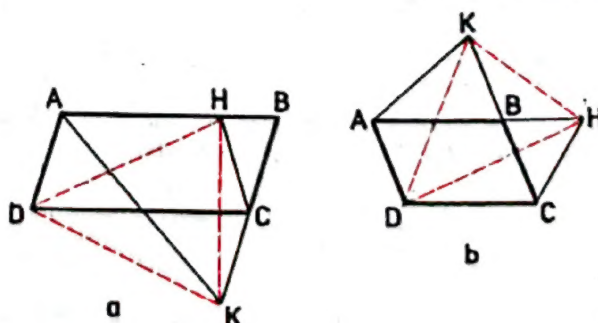


Fig. 337

M 199. a) Să se demonstreze că suma

$$C_n^0 - C_{n-1}^1 \frac{1}{4} + C_{n-2}^2 \frac{1}{4^2} - \dots + (-1)^i C_{n-i}^i \frac{1}{4^i} + \dots$$

(suma se ia după toți întregii  $i$ ,  $0 \leq i \leq \frac{n}{2}$ ) este egală cu  $\frac{n+1}{2^n}$ .

b) Să se demonstreze că dacă  $p$  și  $q$  sînt două numere diferite și  $p + q = 1$ , atunci suma

$$C_n^0 - C_{n-1}^1 pq + C_{n-2}^2 p^2 q^2 - \dots + (-1)^i C_{n-i}^i p^i q^i + \dots$$

este egală cu

$$\frac{p^{n+1} - q^{n+1}}{p - q}$$

pentru orice  $n$ .

D.A. Fridkin

Punctul a) este un caz particular al punctului b). Într-adevăr, dacă înlocuim expresia  $\frac{p^{n+1} - q^{n+1}}{p - q}$  prin  $p^n + p^{n-1}q + \dots + pq^{n-1} + q^n$  și apoi înlocuim  $p = q = \frac{1}{2}$ , vom obține  $\frac{n+1}{2^n}$ . De aceea vom rezolva direct punctul b).

Fie  $C_n^0 - C_{n-1}^1 pq + \dots = S_n$ . Atunci

$$\begin{aligned} S_{n+1} - S_n &= \sum (-1)^i (C_{n+1-i}^i - C_{n-i}^i) p^i q^i = \sum (-1)^i C_{n-i}^{i-1} p^i q^i = \\ &= -pq \sum (-1)^{i-1} C_{n-i-(i-1)}^{i-1} p^{i-1} q^{i-1} = -pq S_{n-1}. \end{aligned}$$

Astfel,  $S_{n+1} = S_n - pq S_{n-1}$ .

Vom folosi acum metoda inducției matematice. Presupunem că formula

$$S_n = \frac{p^{n+1} - q^{n+1}}{p - q} \text{ este demonstrată pentru orice } n \leq k.$$

Atunci

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= S_k - pq S_{k-1} = \frac{p^{k+1} - q^{k+1} - pq(p^k - q^k)}{p - q} = \\ &= \frac{p^{k+1}(1 - q) - q^{k+1}(1 - q)}{p - q} = \frac{p^{k+2} - q^{k+2}}{p - q} \end{aligned}$$

(amintim că  $p + q = 1$ ).

Rămîne să mai facem și verificarea. Pentru  $n = 0$ ,  $S_n = 1$  și  $\frac{p - q}{p - q} = 1$  formula este adevărată. De asemenea pentru  $n = 1$ ,  $S_n = 1$  și  $\frac{p^2 - q^2}{p - q} = p + q = 1$ .

**Observație.** În calcule am folosit formula  $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$ . Demonstrați această formulă.

L.G. Limanov



M 200. Se dă un unghi cu vârful în  $O$  și un cerc tangent la laturile sale în punctele  $A$  și  $B$ . Din punctul  $A$ , paralel cu  $OB$  se duce o semidreaptă care intersectează cercul în punctul  $C$ . Segmentul  $OC$  intersectează cercul în punctul  $E$ , iar dreptele  $AE$  și  $OB$  se intersectează în punctul  $K$ . Să se demonstreze că  $OK = KB$ .

E. V. Sallinen

Această problemă poate fi rezolvată în foarte multe feluri, folosind teoreme privind tangentele și coardele, asemănarea triunghiurilor, unghiurile înscrise în cerc ș.a.m.d. Dăm mai jos una dintre cele mai scurte și mai frumoase rezolvări.

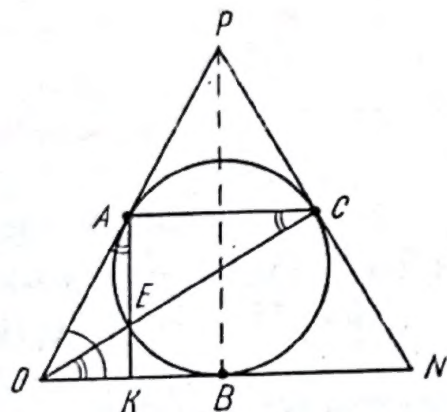


Fig. 338.

Ducem tangenta la cerc în punctul  $C$ : fie  $P$  și  $N$  punctele sale de intersecție cu laturile  $AO$  și  $OB$  ale unghiului  $AOB$  (fig. 338). Este evident că  $PB$  este axa de simetrie a triunghiului  $OPN$ , de aceea toate cele patru tangente sînt congruente

$$OA = OB = BN = CN.$$

Triunghiurile  $NOC$  și  $OAK$  sînt asemenea, întrucît  $\angle CNO = \angle AOK$ ,  $\angle NOC = \angle ACO = \angle OAK$  (fiecare dintre ultimele două unghiuri se măsoară prin suma măsurii arcului  $AE$ ). De aici

$$\frac{OK}{OB} = \frac{OK}{OA} = \frac{CN}{ON} = \frac{1}{2}.$$

Nr. colilor de tipar: 17  
Bun de tipar: 12.01.1983



Com. nr. 20 033/7121  
Combinatul poligrafic  
„CASA SCÎNTEII”  
București — R.S.R.



**Au apărut :**

- |  |  |
|--|--|
| IOAN TOMESCU   | <b>Probleme de combinatorică și teoria grafurilor</b>          |
| S. RADULESCU<br>M. RADULESCU                                   | <b>Teoreme și probleme de analiză matematică</b>               |
| C. MIHU<br>T. DANET  | <b>Probleme pentru aplicarea matematicii în practică</b>       |
| C. NĂSTĂSESCU<br>C. NIȚA<br>M. BRANDIBURU<br>D. JOIȚA          | <b>Exerciții și probleme de algebră pentru clasele IX–XII</b>  |
| S. IANUȘ<br>L. NICULESCU<br>M. TENA<br>N. SOARE<br>S. DRAGOMIR | <b>Probleme de geometrie și de trigonometrie, clasele IX–X</b> |

**În curs de apariție :**

- |                                 |  |
|---------------------------------|--|
| E. E. MOISE<br>F. L. DOWNS, JR. | <b>Geometrie elementară, manualul elevului (traducere din limba engleză)</b> |
| M. M. POSTNIKOV                 | <b>Despre teorema lui Fermat (traducere din limba rusă)</b>                  |